

非线性偏微分方程

上册

● 王元明 编著

● 东南大学出版社

非线性偏微分方程 (上册)

王元明 编著

上册

王元明 编著

东南大学出版社

(苏)新登字第 012 号

内 容 简 介

本书分上、下两册出版。上册除包括非线性分析中的拓扑度理论、临界点理论、算子半群理论、单调算子理论和 Aubin 紧致性引理以及这些理论在非线性的偏微分方程中应用以外,还包括半线性椭圆型方程的上、下解方法,非线性双曲型方程的 Nash-Moser-Hörmander 迭代法及退化抛物型方程的正则化方法。下册包括退化抛物型方程的进一步研究,半导体方程及在几何学、物理学、生物学中几类重要的半线性椭圆型方程等内容。

本书可以作为综合大学、师范院校的数学系及理工大学的应用数学系的微分方程、泛函分析、计算数学等方向的研究生教材或教学参考书。

责任编辑 徐步政

非 线 性 偏 微 分 方 程

王元明 编著

东南大学出版社出版

(南京四牌楼 2 号)

江苏省新华书店发行 东南大学印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 13 13/16 字数 358 千

1992 年 9 月第 1 版 1992 年 9 月第 1 次印刷

印数: 1—1000 册

ISBN 7-81023-645-8

O·59

定价: 4.20 元

前 言

近30年来,非线性偏微分方程的理论获得了很大的发展,其中以半线性椭圆型方程与半线性抛物型(包括退化抛物型)方程的结果更为丰富。本书是在作者多年来为研究生开设的《非线性偏微分方程》课程讲稿的基础上经过逐步加工、修改而成的。全书分上、下两册出版。上册侧重于研究非线性偏微分方程的一些重要方法,其中不少篇幅均属于非线性分析方面的内容。例如,拓扑度理论、算子半群理论、单调算子理论、临界点理论等,当然,着眼点是放在这些理论在非线性偏微分方程中的应用。力求将它们有机地结合起来,它可以作为理工科大学及综合性大学数学系中微分方程、泛函分析、计算数学等方向的教学参考书和研究生教材。下册将侧重于非线性偏微分方程研究中的几个最活跃的分支。例如,以渗流方程为代表的退化抛物型方程的进一步研究;以半导体方程为代表的椭圆-抛物耦合方程组以及在几何学、物理学、生物学中几类重要的半线性椭圆型方程。此外,还涉及到完全非线性偏微分方程的一些基本内容。书中(特别是下册)也包括作者及其学生们近几年来所获得的一些结果。

北京理工大学叶其孝教授仔细地阅读了书的原稿,并提出了一些有益的修改意见,作者向他表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中难免存在一些缺点和错误,真诚地欢迎读者批评指正。

作 者

1991.10

目 录

第一篇 非线性椭圆型方程

第一章 拓扑度理论及其应用	1
1.1 非线性算子的一些基本概念	1
1.1.1 有界性与连续性	1
1.1.2 导算子与微分	7
1.2 隐函数定理与方程的分支解	18
1.2.1 隐函数定理	18
1.2.2 分支定理	21
1.3 有限维空间映射的拓扑度 (Brouwer度)	25
1.3.1 C^1 映射的拓扑度	25
1.3.2 Brouwer 度的积分表达式	32
1.3.3 P 是临界值的情形	34
1.3.4 连续映射的拓扑度	41
1.4 Leray-Schauder 度	47
1.4.1 全连续算子	47
1.4.2 Leray-Schauder度的定义	51
1.4.3 Leray-Schauder度的性质	55
1.4.4 Leray-Schauder度的计算	59
1.5 不动点定理	64
1.6 一般的分支定理	68
第二章 半线性二阶椭圆型方程	74
2.1 二阶线性椭圆型方程的理论简述及其应用	74
2.2 耦合方程组的边值问题	81
2.2.1 解的梯度的最大模估计	81

2.2.2 解的存在性	83
2.3 单个方程的边值问题	91
2.3.1 上、下解方法	92
2.3.2 拟上、下解方法	97
2.3.3 最大解与最小解	101
2.3.4 二维半线性椭圆型方程的正解	106
2.4 多解性的一些结果	114
2.5 非线性边界条件的边值问题	120
2.6 具散度型主部方程弱解的存在性	123
2.7 无界域内的边值问题	128
2.8 变分方法	139
2.8.1 泛函极值的必要条件	139
2.8.2 弱下半连续泛函的极值	140
2.8.3 凸泛函的极值	141
2.8.4 Palais-Smale 条件	147
2.8.5 山路引理	150
2.8.6 临界点理论在半线性椭圆型方程中的应用	154

第二篇 非线性发展方程

第三章 半群理论及其应用	170
3.1 有界线性算子半群	170
3.1.1 一个例子	170
3.1.2 有界线性算子的一致连续半群	172
3.1.3 有界线性算子的强连续半群	175
3.2 Hille-Yosida 定理	178
3.3 增殖算子	186
3.4 抽象发展方程的初值问题	188
3.5 半线性发展方程	199
3.6 一些特殊类型的发展方程	210
3.6.1 线性热传导方程的初边值问题	210
3.6.2 半线性热传导方程的初边值问题	213

3.6.3	线性波动方程的初边值问题	215
3.6.4	非线性波动方程的初边值问题	218
3.6.5	非线性Schrödinger方程	220
3.7	Kōmura-Kato 方法	225
3.7.1	Banach空间内的一些收敛性	226
3.7.2	Bochner积分	228
3.7.3	增殖算子与增殖集	230
3.7.4	Kōmura方法	234
3.8	Crandall-Liggett 方法	240
第四章	单调算子的理论及其应用	257
4.1	单调算子及其基本性质	257
4.1.1	单调算子的概念	257
4.1.2	单调算子的基本性质	260
4.2	单调算子的满射性	266
4.3	非线性发展方程的初值问题	271
第五章	Aubin 紧性引理及其应用	281
5.1	Aubin 紧性引理	281
5.2	其它一些命题	285
5.3	应用举例	289
5.4	一类退化抛物型方程的初边值问题	299
5.4.1	几个引理	300
5.4.2	$p > 2 + \alpha$ 时的整体存在性与唯一性	304
5.4.3	$p < 2 + \alpha$ 时的整体存在性与唯一性	309
5.4.4	Blow-up 现象	311
第六章	Nash-Moser-Hörmander迭代法	316
6.1	普通迭代法中的导数损失问题	316
6.2	n 维波动方程 Cauchy 问题解的先验估计	322
6.2.1	解的表达式	322
6.2.2	解的 L^∞ 模估计	324
6.2.3	解的导数的 L^∞ 模估计	330

6.2.4 非齐次方程解的估计	336
6.3 二阶线性双曲型方程解的估计	338
6.3.1 一些引理	340
6.3.2 二阶双曲型方程的能量估计	344
6.3.3 非线性双曲型方程解的估计	350
6.4 光滑化算子	354
6.5 Nash-Moser-Hörmander 迭代方法	357
6.5.1 迭代程序	358
6.5.2 一些估计式	359
6.5.3 主要结果的证明	378
第七章 退化抛物型方程的正则化方法	381
7.1 方程的实际背景	381
7.1.1 液体通过稀疏介质的流动	381
7.1.2 人口模型	383
7.2 比较原理	385
7.2.1 初边值问题的比较原理	385
7.2.2 Cauchy 问题的比较原理	390
7.3 正则化方法	394
7.3.1 一维渗流方程的初边值问题	394
7.3.2 高维渗流方程的初边值问题	397
7.3.3 Cauchy 问题	403
7.4 界面的增长性与解的渐近性态	418
参考文献	428

第一篇 非线性椭圆型方程

在这一篇里,我们研究半线性椭圆型方程(组)的边值问题,主要的技巧是拓扑度理论、变分方法与比较原理。这一篇内容分为两章:第一章介绍拓扑度的理论,第二章讲半线性椭圆型方程的各种边值问题。

第一章 拓扑度理论及其应用

拓扑度理论是非线性泛函分析的重要方向之一。它对研究算子方程解的存在性、解的个数、解的稳定性和分歧理论等都是一个极好的工具。本章将介绍有限维赋范空间的Brouwer度和无限维赋范空间上的Leray-Schauder度。

1.1 非线性算子的一些基本概念

1.1.1 有界性与连续性

设 X 和 Y 是两个实的Banach空间,算子 T 的定义域 $D(T) \subset X$ 。

定义 1.1 若算子 $T: D(T) \subset X \rightarrow Y$ 将 $D(T)$ 中任一有界集映成 Y 中的有界集,则称 T 在 $D(T)$ 上有界。

定义 1.2 设 $x_0 \in D(T)$ 。若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$,使得

当 $x \in D(T)$ 且 $\|x - x_0\|_X < \delta$ 时, 恒有 $\|Tx - Tx_0\|_Y < \varepsilon$, 则称 T 在 x_0 连续; 若 T 在 $D(T)$ 中每一点都连续, 则称 T 在 $D(T)$ 上连续; 若上述 δ 仅与 ε 有关而与 $x_0 \in D(T)$ 无关, 则称 T 在 $D(T)$ 上一致连续。

注 在后面的叙述中, 为了书写方便, 在不致混淆的情况下, 将略去范数 $\|\cdot\|$ 的下标。

众所周知, 对于线性算子而言, 连续性与有界性是等价的。但对于非线性算子, 则没有这种等价关系。例如, 设 $X = l_2$, $Y = \mathcal{P}^1$ ($\mathcal{P}^n$ 表示 n 维欧氏空间), $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in X$, 定义泛函

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k r_k$$

其中 $r_k = \max(|x_k| - 1, 0)$, $k = 1, 2, \dots$ 。由于 $x_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 所以上述和式中只有有限项不为零, 即 $f(x)$ 存在。下面证明 f 在 X 上连续, 设 $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots) \in l_2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_2$, 且 $x^{(n)} \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$, 则 $f(x^{(n)})$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k r_k^{(n)} = \sum_{|x_k^{(n)}| > 1} k(|x_k^{(n)}| - 1), \quad f(x) = \sum_{|x_k| > 1} k(|x_k| - 1)$$

由于 $\|x^{(n)} - x\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow x_k^{(n)} \rightarrow x_k (n \rightarrow \infty)$, $k = 1, 2, \dots$, 而 $f(x)$ 定义中的和式仅对有限项求和, 因而 $f(x^{(n)}) \rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty)$, 即 $f(x)$ 是连续的。但 f 不是有界的。事实上, 任取 $\varepsilon_0 > 0$, 令

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} 1 + \varepsilon_0, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

则 $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots) \in l_2$ 且 $\|x^{(n)}\| = 1 + \varepsilon_0$, 而 $f(x^{(n)}) = n\varepsilon_0 \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 故 f 无界。

下面我们较详细地讨论一个常用的非线性算子的连续性与有界性的问题。

设 $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ 是可测集, 函数 $f(s, u) (s \in \Omega, |u| < \infty)$ 称为满足 Caratheodory 条件, 如果

(1) 对几乎所有的 $s \in \Omega$, $f(s, u)$ 是 u 的连续函数;

(2) 对任意固定的 u , $f(s, u)$ 是 s 的可测函数。

设 $x(s)$ 是实函数, 定义 $(Fx)(s) = f(s, x(s))$, 它将 Ω 上的实函数映成 Ω 上的实函数, 称此算子为 Nemyskii (Немыцкий) 算子。

引理 1.1 (Nemyskii V. V., 1934) 设 $m\Omega < \infty$, 则 F 映依测度收敛序列 $\{x_n(s)\}$ 为依测度收敛序列 $\{f(s, x_n(s))\}$ 。

证明 设 $x_n(s)$ 依测度收敛于 $x(s)$, $\forall \sigma > 0$, 令

$$\Omega_n = \{s \in \Omega \mid |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| \geq \sigma\}$$

我们要证 $\lim_{n \rightarrow \infty} m\Omega_n = 0$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = m\Omega$$

其中 $D_n = \Omega \setminus \Omega_n = \{s \in \Omega \mid |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| < \sigma\}$ 。

令 $G_k = \{s \in \Omega \mid \text{对于任意 } u, \text{ 只要 } |x(s) - u| < \frac{1}{k} \implies |f(s, x(s)) - f(s, u)| < \sigma\}$ 。显然 $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset G_{k+1} \dots$ 。记 $E = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, 若 $s \in E$, 则 $s \notin G_k$, 因此 $\exists u_k$ 使得 $|x(s) - u_k| < \frac{1}{k}$, 但 $|f(s, x(s)) - f(s, u_k)| \geq \sigma$ 。这说明 $f(s, \cdot)$ 在 $u = x(s)$ 处不连续, 由 Caratheodory 条件知 $mE = 0$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} mG_k = m\Omega$ 。

故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0$ 使

$$mG_{k_0} > m\Omega - \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.1-1)$$

令

$$F_n = \left\{ s \in \Omega \mid |x_n(s) - x(s)| < \frac{1}{k_0} \right\}$$

由于 $\{x_n(s)\}$ 依测度收敛于 $x(s)$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} mF_n = m\Omega$, 即 $\exists N$, 当 $n > N$ 时

$$mF_n > m\Omega - \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.1-2)$$

显然, $G_{k_0} \cap F_n \subset D_n$, 故

$$\begin{aligned} 0 \leq m\Omega - mD_n &= m(\Omega - D_n) \leq m(\Omega \setminus (G_{k_0} \cap F_n)) \\ &= m(\Omega \setminus G_{k_0}) + m(\Omega \setminus F_n) < \varepsilon \quad \square \end{aligned}$$

定理 1.1 (Vainberg M. M., 1951) 若 $m\Omega < \infty$, $p_i \geq 1$ ($i=1, 2$), 且

$$|f(s, u)| \leq a(s) + b|u|^{p_1/p_2} (x \in \Omega, |u| < \infty) \quad (1.1-3)$$

则 $F: L^{p_1} \rightarrow L^{p_2}$ 连续, 其中 $a(s) \in L^{p_2}$, $b = \text{const} > 0$.

证明 设 $x(s) \in L^{p_1}$, 则 $a(s) + b|x(s)|^{p_1/p_2} \in L^{p_2}$, 由 (1.1-3)

$$|f(s, x(s))| \leq a(s) + b|x(s)|^{p_1/p_2} \in L^{p_2}, \text{ 即}$$

$F: L^{p_1} \rightarrow L^{p_2}$. 剩下的问题是证明 F 连续. 设 $\{x_n\} \subset L^{p_1}$, 且 $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), 则 x_n 依测度收敛于 x , 引理 1.1 表明, $f(s, x_n(s))$ 也依测度收敛于 $f(s, x(s))$, 此时, $|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))|^{p_2}$ 依测度收敛于 0, 若能证明 $|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))|^{p_2}$ 的积分具有等度绝对连续性, 则由 Vitali 定理知

$$\int_{\Omega} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))|^{p_2} ds \rightarrow 0, \text{ 即 } f \text{ 在 } x \text{ 处连续.}$$

注意到

$$\begin{aligned} &|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))|^{p_2} \\ &\leq 2^{p_2} [|f(s, x_n(s))|^{p_2} + |f(s, x(s))|^{p_2}] \end{aligned}$$

$$\leq 4^{p_2} [2|a(s)|^{p_2} + b^{p_2}|x_n(s)|^{p_1} + b^{p_2}|x(s)|^{p_1}]$$

及

$$|x_n(s)|^{p_1} \leq 2^{p_1}|x_n(s) - x(s)|^{p_1} + 2^{p_1}|x(s)|^{p_1}$$

所以只要证明 $|x_n(s) - x(s)|^{p_1}$ 的积分具有等度绝对连续性即可。

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\int_{\Omega} |x_n(s) - x(s)|^{p_1} ds \rightarrow 0$ 知, $\exists N$, 当 $n > N$ 时

$$\int_{\Omega} |x_n(s) - x(s)|^{p_1} ds < \varepsilon$$

因此, 对任一可测集 $A \subset \Omega$, 当 $n > N$ 时,

$$\int_A |x_n(s) - x(s)|^{p_1} ds < \varepsilon$$

对 $n=1, 2, \dots, N$, 我们来考虑上述积分, 由 $|x_n(s) - x(s)|^{p_1}$ 的积分的绝对连续性知, $\forall$ 上述 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 对于任一可测集 $A \subset \Omega$, $mA < \delta$ 时, 有

$$\int_A |x_n(s) - x(s)|^{p_1} ds < \varepsilon \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

这样一来, 只要 $mA < \delta$, 就有

$$\int_A |x_n(s) - x(s)|^{p_1} ds < \varepsilon \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

即 $|x_n(s) - x(s)|^{p_1}$ 的积分具有等度绝对连续性。 $\square$

定理中的条件(1.1-3)式不仅保证了 F 把 L^{p_1} 映到 L^{p_2} , 而且保证了这个算子的连续性。

定理 1.2 (Krasnoselskii, M. A., 1951) 若 $F: L^{p_1} \rightarrow L^{p_2}$ 连续, 则 F 有界。

证明 不妨设 $f(x, \theta) = \theta^*$, 否则, 考虑 $f_1(s, u) = f(s, u)$

* 我们将用 θ 表示线性赋范空间中的零元素。

$-f(s, \theta)$, 此时 $f_1(s, u)$ 也满足 Caratheodory 条件, 且

$$F_1: L^{p_1} \rightarrow L^{p_2} \text{ 及 } f_1(x, \theta) = \theta$$

由于 f 在 $u = \theta$ 处连续, 所以它在该点附近有界, 即 $\exists r > 0$, 当 $\|x(s)\|_{p_1} < r$ 时, $\|f(s, x(s))\|_{p_2} < 1$ 。

设 $x \in L^{p_1}$, 则 $\exists n_0$, 满足

$$n_0 r^{p_1} \leq \|x(s)\|_{p_1}^{p_1} < (n_0 + 1) r^{p_1} \quad (1.1-4)$$

由 Lebesgue 测度的连续性, 分割 $\Omega: \Omega = \bigcup_{k=1}^{n_0+1} \Omega_k$, 使 Ω_k 两两不相交, 且

$$\int_{\Omega_k} |x(s)|^{p_1} ds < r^{p_1} \quad (k=1, 2, \dots, n_0+1)$$

令

$$x_k(s) = \begin{cases} x(s), & s \in \Omega_k \\ 0, & s \in \Omega \setminus \Omega_k \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots, n_0+1)$$

则 $\|x_k(s)\|_{p_1} < r$, 从而

$$\int_{\Omega} |f(s, x_k(s))|^{p_2} ds = \int_{\Omega_k} |f(s, x(s))|^{p_2} ds < 1$$

故

$$\int_{\Omega} |f(s, x(s))|^{p_2} ds \leq \sum_{k=1}^{n_0+1} \int_{\Omega_k} |f(s, x(s))|^{p_2} ds < n_0 + 1 \quad (1.1-5)$$

综合(1.1-4)式与(1.1-5)式得

$$\|f(s, x(s))\|_{p_2} < (n_0 + 1)^{1/p_2} \leq (r^{-p_1} \|x(s)\|_{p_1}^{p_1} + 1)^{1/p_2}$$

即 $F: L^{p_1} \rightarrow L^{p_2}$ 有界。 $\square$

关于 Nemyskii 算子还有更好的结果, 即若 $F: L^{p_1} \rightarrow L^{p_2}$

($p_i \geq 1$), 则 $|f(s, u)| \leq a(s) + b|u|^{p_1/p_2}$, 其中 $a(s) \in L^{p_2}$, $b = \text{const.} > 0$. 此外, 定理1.1中的条件 $m\Omega < \infty$ 也可去掉[2]. 这样, 我们可以得到结论: 若 $F: L^{p_1} \rightarrow L^{p_2}$, 则 F 连续且有界.

1.1.2 导算子与微分

现在我们将数学分析中的全微分和方向导数的概念推广到作用于 Banach 空间中的算子上去.

一、G-微分与G-导算子

定义 1.3 设 X, Y 是线性赋范空间, $T: D(T) \subset X \rightarrow Y$, $D(T)$ 是 X 中开集, x_0 是 $D(T)$ 中的内点. 若对任意 $h \in X$, 当 $x_0 + th \in D(T)$ 时极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(x_0 + th) - Tx_0}{t} \quad (1.1-6)$$

都存在 (是 Y 中元素), 则称 T 在 x_0 处 Gateaux 可微, (1.1-6) 中的极限称为 T 在 x_0 处 (沿方向 h) 的 Gateaux 微分, 简称 G-微分, 记为 $D[T(x_0)h]$, 即

$$D[T(x_0)h] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(x_0 + th) - Tx_0}{t} \quad (1.1-7)$$

如果 Gateaux 微分可以表示成 $D[T(x_0)h] = Ah$, 其中 $A \in B(X, Y)$ (X 到 Y 的有界线性算子空间), 则称 T 在 x_0 处具有有界线性的 G-微分, A 称为 T 在 x_0 处 G-导算子, 以后将 A 记成 $dT(x_0)$. 显然, (1.1-7) 式等价于

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \|T(x_0 + th) - Tx_0 - tD[T(x_0)h]\| = 0 \quad (1.1-8)$$

命题 1.1 (1°) 若对 $h \neq 0$, $D[T(x_0)h]$ 存在, 则对任意实数 $r \neq 0$, $D[T(x_0)(rh)]$ 存在, 且

$$D[T(x_0)(rh)] = rD[T(x_0)h] \quad (\text{齐次性});$$

(2°) 若 $D[T(x_0)h]$ 存在, 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \|T(x_0 + th) - Tx_0\| = 0$

证明 (1°) 在(1.1-8)中令 $t=t'r$, 得

$$\lim_{t' \rightarrow 0} \frac{1}{t'r} \|T(x_0 + t'r h) - T x_0 - t'r D[T(x_0)h]\| = 0$$

故

$$\lim_{t' \rightarrow 0} \frac{1}{t'} \|T(x_0 + t'r h) - T x_0 - t'r D[T(x_0)h]\| = 0$$

即

$$D[T(x_0)(rh)] = r D[T(x_0)h]$$

(2°) 由(1.1-8)式及估计式

$$\|T(x_0 + th) - T x_0\| \leq \|T(x_0 + th) - T x_0 - t D[T(x_0)h]\| + |t| \|D[T(x_0)h]\|$$

立即得到结论。 $\square$

这个命题说明, $D[T(x_0)h]$ 关于 h 是齐次的, 且若 $D[T(x_0)h]$ 存在, 则算子 T 在 x_0 处沿 h 方向是连续的。

例 1 设 $X = \mathcal{R}^2$, $Y = \mathcal{R}^1$, $x = (x_1, x_2) \in X$, 定义

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

设 $h \in \mathcal{R}^2$, $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0)$, 则易得 $D[f(0)h] = f(h)$ 。这个例子说明, $D[f(0)h]$ 不是 h 的线性函数, 即 f 在 $x=0$ 处不具有有界线性的 G-微分。

G-微分有一条重要的性质, 即对泛函来说中值公式成立。

定理 1.3 设 $S \subset X$ 是凸开集, 泛函 $\varphi: S \rightarrow \mathcal{R}^1$ 在 S 上 G-可微的, 即对任意 $x \in S$, φ 在 x 处 G-可微, 则对任意的 $x \in S$ 及 $h \in X$, 当 $x+h \in S$ 时, 存在 $\tau = \tau(x, h) \in (0, 1)$, 满足

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = D[\varphi(x+\tau h)h] \quad (1.1-9)$$

证明 设 $x \in S$, $h \in X$ 及 $x+h \in S$, 由 S 的凸性知, 当

当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $x+th = (1-t)x + t(x+h) \in S$, 令

$$f(t) = \varphi(x+th) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

因 φ 在 $x+th$ ($0 \leq t \leq 1$) 处有 G -微分, 故

$$\left| \frac{f(t+\lambda) - f(t)}{\lambda} - D[\varphi(x+th)h] \right| \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow 0)$$

即 $f(t)$ 在 $(0, 1)$ 内可微, 且

$$f'(t) = D[\varphi(x+th)h]$$

于是

$$f(1) - f(0) = f'(\tau) = D[\varphi(x+\tau h)h]$$

其中 $\tau \in (0, 1)$, 即

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = D[\varphi(x+\tau h)h] \quad \square$$

上述定理要求 φ 是泛函, 对于一般的非线性算子, 中值公式不成立。但有下列较弱的结果。

定理 1.4 (Vainberg, M. M., 1952) 设 $S \subset X$ 是凸子集, $T: S \rightarrow Y$ 在 S 上 G -可微的, 则对任意 $x \in S$, $h \in X$ 及 $e \in Y'$, 当 $x+h \in S$ 时, 存在 $\tau = \tau(x, h, e) \in (0, 1)$ 使得

$$(e, T(x+h) - Tx) = (e, D[T(x+\tau h)h]) \quad (1.1-10)$$

证明 作 $\varphi(x) = (e, Tx)$, 则 $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^1$ 。因 T 在 S 上 G -可微, 所以 φ 在 S 上也 G -可微, 且

$$D[\varphi(x)h] = (e, D[T(x)h])$$

定理 1.3 说明, $\varphi(x+t) - \varphi(x) = D[\varphi(x+\tau h)h]$, 故

$$(e, T(x+h) - Tx) = (e, D[T(x+\tau h)h]) \quad \square$$

定理 1.5 设 X, Y 是线性赋范空间, $T: D(T) \subset X \rightarrow Y$, x_0 是 $D(T)$ 的内点, 则 T 在 x_0 处具有有界线性的 G -微分的充要条件是存在 $a(x_0) \in B(X, Y)$ 及 $q(x_0): D(q(x_0)) \rightarrow Y$ 满足