非线性偏微分方程

上册

王元明 编著

东南大学出版社

非线性偏微分方程

上册

王元明 编著

东南大学出版社

(苏)新登字第012号

内 容 简 介

本书分上、下两册出版。上册除包括非线性分析中的拓扑度理论、临界点理论、算子半群理论、单调算子理论和Aubin紧致性引理以及这些理论在非线性偏微分方程中应用以外，还包括半线性椭圆型方程的上、下解方法，非线性双曲型方程的Nash-Moser-Hörmander迭代法及退化抛物型方程的正则化方法。下册包括退化抛物型方程的进一步研究，半导体方程及在几何学、物理学、生物学中几类重要的半线性椭圆型方程等内容。

本书可以作为综合大学、师范院校的数学系及理工大学的应用数学系的微分方程、泛函分析、计算数学等方向的研究生教材或教学参考书。

责任编辑　徐步政

非线性偏微分方程
王元明　编著

东南大学出版社出版
（南京四牌楼2号）
江苏省新华书店发行　东南大学印刷厂印刷
开本850×1168毫米1/32 印张13 13/16 字数358千
1992年9月第1版　1992年9月第1次印刷
印数：1—1000册

ISBN 7—81023—645—8

O·59　定价：4.20元

前　言

近30年来，非线性偏微分方程的理论获得了很大的发展，其中以半线性椭圆型方程与半线性抛物型（包括退化抛物型）方程的结果更为丰富。本书是在作者多年来为研究生开设的《非线性偏微分方程》课程讲稿的基础上经过逐步加工、修改而成的。全书分上、下两册出版。上册侧重于研究非线性偏微分方程的一些重要方法，其中不少篇幅均属于非线性分析方面的内容。例如，拓扑度理论、算子半群理论、单调算子理论、临界点理论等，当然，着眼点是放在这些理论在非线性偏微分方程中的应用。力求将它们有机地结合起来，它可以作为理工科大学及综合性大学数学系中微分方程、泛函分析、计算数学等方向的教学参考书和研究生教材。下册将侧重于非线性偏微分方程研究中的几个最活跃的分支。例如，以渗流方程为代表的退化抛物型方程的进一步研究；以半导体方程为代表的椭圆-抛物耦合方程组以及在几何学、物理学、生物学中几类重要的半线性椭圆型方程。此外，还涉及到完全非线性偏微分方程的一些基本内容。书中（特别是下册）也包括作者及其学生们近几年来所获得的一些结果。

北京理工大学叶其孝教授仔细地阅读了书的原稿，并提出了一些有益的修改意见，作者向他表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，真诚地欢迎读者批评指正。

作　者

1991.10

目　录

第一篇　非线性椭圆型方程

第二篇 非线性发展方程

第一篇　非线性椭圆型方程

在这一篇里，我们研究半线性椭圆型方程(组)的边值问题，主要的技巧是拓扑度理论、变分方法与比较原理。这一篇内容分为两章：第一章介绍拓扑度的理论，第二章讲半线性椭圆型方程的各种边值问题。

第一章　拓扑度理论及其应用

拓扑度理论是非线性泛函分析的重要方向之一。它对研究算子方程解的存在性、解的个数、解的稳定性和分歧理论等都是一个极好的工具。本章将介绍有限维赋范空间的Brouwer度和无限维赋范空间上的 Leray-Schauder 度。

1.1　非线性算子的一些基本概念

1.1.1　有界性与连续性

设X和Y是两个实的 Banach 空间，算子 T 的定义域$D(T)\subset X$。

定义 1.1　若算子T：$D(T)\subset X\to Y$ 将 $D(T)$中任一有界集映成Y中的有界集，则称T在 $D(T)$ 上有界。

定义 1.2　设$x_0\in D(T)$。若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(x_0，\varepsilon)$，使得

当 $x\in D(T)$ 且$\|x-x_0\|_X<\delta$时，恒有$\|Tx-Tx_0\|_Y<\varepsilon$，则称$T$在 x_0 连续；若T在$D(T)$中每一点都连续，则称T在$D(T)$上连续；若上述 δ 仅与ε有关而与 $x_0\in D(T)$ 无关，则称 T 在 $D(T)$ 上一致连续。

注 在后面的叙述中，为了书写方便，在不致混淆的情况下，将略去范数$\|\cdot\|$的下标。

众所周知，对于线性算子而言，连续性与有界性是等价的。但对于非线性算子，则没有这种等价关系。例如，设 $X=l_2$，$Y=\mathscr{R}^1$($\mathscr{R}^n$表示 n 维欧氏空间)，$\forall x=(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)\in X$，定义泛函

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kr_k$$

其中$r_k=\max(|x_k|-1,0)$，$k=1, 2, \cdots$。由于$x_k\to 0(k\to\infty)$，所以上述和式中只有有限项不为零，即$f(x)$存在。下面证明f在X 上连续，设 $x^{(n)}=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots)\in l_2$，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)\in l_2$，且 $x^{(n)}\to x(n\to\infty)$，则$f(x^{(n)})=\sum_{k=1}^{\infty}kr_k^{(n)}=\sum_{|x_k^{(n)}|\geq 1}k(|x_k^{(n)}|-1)$，$f(x)=\sum_{|x_k|\geq 1}k(|x_k|-1)$。由于 $\|x^{(n)}-x\|=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)}-x_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\to 0(n\to\infty)\Longrightarrow$ $x_k^{(n)}\to x_k(n\to\infty)$，$k=1, 2, \cdots$，而 $f(x)$ 定义中的和式仅对有限项求和，因而 $f(x^{(n)})\to f(x)(n\to\infty)$，即 $f(x)$ 是连续的。但 f 不是有界的。事实上，任取 $\varepsilon_0>0$，令

$$x_k^{(n)}=\begin{cases}1+\varepsilon_0, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}$$

则$x^{(n)}=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots)\in l_2$且$\|x^{(n)}\|=1+\varepsilon_0$，而 $f(x^{(n)})=n\varepsilon_0\to\infty(n\to\infty)$，故 f 无界。

下面我们较详细地讨论一个常用的非线性算子的连续性与有界性的问题。

设$\Omega\subset\mathscr{R}^n$是可测集，函数$f(s,u)(s\in\Omega,|u|<\infty)$称为满足Caratheodory条件，如果

（1） 对几乎所有的$s\in\Omega$，$f(s,u)$是u的连续函数；

（2） 对任意固定的u，$f(s,u)$是s的可测函数。

设$x(s)$是实函数，定义$(Fx)(s)=f(s,x(s))$，它将Ω上的实函数映成Ω上的实函数，称此算子为Nemyskii(Немычкий)算子。

引理 1.1 （Nemyskii V. V., 1934） 设$m\Omega<\infty$，则F映依测度收敛序列$\{x_n(s)\}$为依测度收敛序列$\{f(s,x_n(s))\}$。

证明 设$x_n(s)$依测度收敛于$x(s)$，$\forall\sigma>0$，令

$$\Omega_n=\{s\in\Omega\,|\,|F(s,x_n(s))-f(s,x(s))|\geqslant\sigma\}$$

我们要证 $\lim\limits_{n\to\infty}m\Omega_n=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}mD_n=m\Omega$$

其中 $D_n=\Omega\setminus\Omega_n=\{s\in\Omega\,\|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))|<\sigma\}$。

令$G_k=\{s\in\Omega\,|$对于任意u，只要$|x(s)-u|<\dfrac{1}{k}\Longrightarrow|f(s,x(s))-f(s,u)|<\sigma\}$。显然 $G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_k\subset G_{k+1}\cdots$。记$E=\Omega\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}G_k$，若$s\in E$，则$s\bar{\in}G_k$，因此$\exists u_k$使得$|x(s)-u_k|<\dfrac{1}{k}$，但$|f(s,x(s))-f(s,u_k)|\geqslant\sigma$。这说明$f(s,\cdot)$在$u=x(s)$处不连续，由Caratheodory条件知$mE=0$，即$\lim\limits_{k\to\infty}mG_k=m\Omega$

故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists k_0$使

$$mG_{k_0}>m\Omega-\frac{\varepsilon}{2}\tag{1.1-1}$$

令

$$F_n=\left\{s\in\Omega \mid |x_n(s)-x(s)|<\frac{1}{k_0}\right\}$$

由于 $\{x_n(s)\}$ 依测度收敛于 $x(s)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} mF_n=m\Omega$，即 $\exists N$，当 $n>N$ 时

$$mF_n>m\Omega-\frac{\varepsilon}{2} \tag{1.1-2}$$

显然，$G_{k_0}\cap F_n\subset D_n$，故

$$0\leqslant m\Omega-mD_n=m(\Omega-D_n)\leqslant m(\Omega\backslash(G_{k_0}\cap F_n))$$

$$=m(\Omega\backslash G_{k_0})+m(\Omega\backslash F_n)<\varepsilon \qquad \square$$

定理 1.1 (Vainberg M. M., 1951) 若 $m\Omega<\infty$，$p_i\geqslant 1$ $(i=1, 2)$，且

$$|f(s, u)|\leqslant a(s)+b|u|^{p_1/p_2}(x\in\Omega, |u|<\infty) \tag{1.1-3}$$

则F：$L^{p_1}\to L^{p_2}$ 连续，其中 $a(s)\in L^{p_2}$，$b=\text{const}>0$。

证明 设 $x(s)\in L^{p_1}$，则 $a(s)+b|x(s)|^{p_1/p_2}\in L^{p_2}$，由 (1.1-3)

$$|f(s, x(s))|\leqslant a(s)+b|x(s)|^{p_1/p_2}\in L^{p_2}，即$$

F：$L^{p_1}\to L^{p_2}$。剩下的问题是证明F连续。设$\{x_n\}\subset L^{p_1}$，且$x_n\to x$ $(n\to\infty)$，则x_n依测度收敛于 x，引理1.1表明，$f(s, x_n(s))$ 也依测度收敛于 $f(s,x(s))$，此时，$|f(s, x_n(s))-f(s, x(s))|^{p_2}$ 依测度收敛于0，若能证明$|f(s, x_n(s))-f(s, x(s))|^{p_2}$的积分具有等度绝对连续性，则由 Vitali定理知

$$\int_\Omega |f(s, x_n(s))-f(s, x(s))|^{p_2}\mathrm{d}s\to 0，即 f 在 x 处连续。$$

注意到

$$|f(s, x_n(s))-f(s, x(s))|^{p_2}$$

$$\leqslant 2^{p_2}[|f(s, x_n(s))|^{p_2}+|f(s, x(s))|^{p_2}]$$

$$\leqslant 4^{p_2}[2|a(s)|^{p_2}+b^{p_2}|x_n(s)|^{p_1}+b^{p_2}|x(s)|^{p_1}]$$

及

$$|x_n(s)|^{p_1}\leqslant 2^{p_1}|x_n(s)-x(s)|^{p_1}+2^{p_1}|x(s)|^{p_1}$$

所以只要证明 $|x_n(s)-x(s)|^{p_1}$ 的积分具有等度绝对连续性即可。

$\forall\varepsilon>0$，由 $\int_\Omega|x_n(s)-x(s)|^{p_1}ds\to 0$ 知，$\exists N$，当 $n>N$ 时

$$\int_\Omega|x_n(s)-x(s)|^{p_1}ds<\varepsilon$$

因此，对任一可测集 $A\subset\Omega$，当 $n>N$ 时，

$$\int_A|x_n(s)-x(s)|^{p_1}ds<\varepsilon$$

对$n=1, 2,\cdots,N$，我们来考虑上述积分，由 $|x_n(s)-x(s)|^{p_1}$的积分的绝对连续性知，$\forall$ 上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对于任一可测集 $A\subset\Omega$，$mA<\delta$ 时，有

$$\int_A|x_n(s)-x(s)|^{p_1}ds<\varepsilon\quad(n=1, 2, \cdots, N)$$

这样一来，只要 $mA<\delta$，就有

$$\int_A|x_n(s)-x(s)|^{p_1}ds<\varepsilon\quad(n=1, 2, \cdots, N)$$

即 $|x_n(s)-x(s)|^{p_1}$ 的积分具有等度绝对连续性。 □

定理中的条件(1.1-3)式不仅保证了 F 把 L^{p_1} 映到 L^{p_2}，而且保证了这个算子的连续性。

定理 1.2 (Krasnoselskii, M. A., 1951) 若F：$L^{p_1}\to L^{p_2}$ 连续，则F有界。

证明 不妨设$f(x, \theta)=\theta$*，否则，考虑$f_1(s,u)=f(s, u)$

---

* 我们将用 θ 表示线性赋范空间中的零元素。

$-f(s,\ \theta)$，此时$f_1(s,\ u)$也满足 Caratheodory 条件，且

$$F_1:\ L^{p_1}\to L^{p_2}\text{及}f_1(x,\ \theta)=\theta$$

由于f在$u=\theta$处连续，所以它在该点附近有界，即$\exists r>0$，当$\|x(s)\|_{p_1}<r$时，$\|f(s,\ x(s))\|_{p_2}<1$。

设$x\in L^{p_1}$，则$\exists n_0$，满足

$$n_0 r^{p_1}\leqslant\|x(s)\|_{p_1}^{p_1}<(n_0+1)r^{p_1} \tag{1.1-4}$$

由 Lebesgue 测度的连续性，分割Ω：$\Omega=\bigcup\limits_{k=1}^{n_0+1}\Omega_k$，使$\Omega_k$两两不相交，且

$$\int_{\Omega_k}|x(s)|^{p_1}\mathrm{d}s<r^{p_1}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_0+1)$$

令

$$x_k(s)=\begin{cases}x(s),\ s\in\Omega_k\\ 0\quad,\ s\in\Omega\backslash\Omega_k\end{cases}\qquad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_0+1)$$

则$\|x_k(s)\|_{p_1}<r$，从而

$$\int_{\Omega}|f(s,\ x_k(s))|^{p_2}\mathrm{d}s=\int_{\Omega_k}|f(s,\ x(s))|^{p_2}\mathrm{d}s<1$$

故

$$\int_{\Omega}|f(s,\ x(s))|^{p_2}\mathrm{d}s\leqslant\sum_{k=1}^{n_0+1}\int_{\Omega_k}|f(s,\ x(s))|^{p_2}\mathrm{d}s<n_0+1 \tag{1.1-5}$$

综合(1.1-4)式与(1.1-5)式得

$$\|f(s,\ x(s))\|_{p_2}<(n_0+1)^{1/p_2}\leqslant(r^{-p_1}\|x(s)\|_{p_1}^{p_1}+1)^{1/p_2}$$

即F：$L^{p_1}\to L^{p_2}$有界。 □

关于 Nemyskii 算子还有更好的结果，即若F：$L^{p_1}\to L^{p_2}$

$(p_i \geqslant 1)$，则 $|f(s,u)| \leqslant a(s)+b|u|^{p_1/p_2}$，其中 $a(s) \in L^{p_2}$，$b=\text{const.}>0$。此外，定理1.1中的条件 $m\Omega<\infty$ 也可去掉[2]。这样，我们可以得到结论：若F：$L^{p_1} \to L^{p_2}$，则F连续且有界。

1.1.2 导算子与微分

现在我们将数学分析中的全微分和方向导数的概念推广到作用于 Banach 空间中的算子上去。

一、G-微分与G-导算子

定义 1.3 设 X，Y是线性赋范空间，T：$D(T) \subset X \to Y$，$D(T)$是X中开集，x_0 是 $D(T)$ 中的内点。若对任意 $h \in X$，当 $x_0+th \in D(T)$ 时极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(x_0+th)-Tx_0}{t} \tag{1.1-6}$$

都存在（是Y中元素），则称 T 在 x_0 处 Gateaux 可微，(1.1-6)中的极限称为 T 在 x_0 处（沿方向 h）的Gateaux微分，简称G-微分，记为 $D[T(x_0)h]$，即

$$D[T(x_0)h]=\lim_{t \to 0} \frac{T(x_0+th)-Tx_0}{t} \tag{1.1-7}$$

如果 Gateaux 微分可以表示成 $D[T(x_0)h]=Ah$，其中 $A \in B(X, Y)$（X到Y的有界线性算子空间），则称T在 x_0 处具有有界线性的G-微分，A 称为T在 x_0 处 G-导算子，以后将 A 记成 $dT(x_0)$。显然，(1.1-7)式等价于

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\|T(x_0+th)-Tx_0-tD(T(x_0)h]\|=0 \tag{1.1-8}$$

命题1.1 (1°) 若对 $h \neq 0$，$D[T(x_0)h]$ 存在，则对任意实数 $r \neq 0$，$D[T(x_0)(rh)]$ 存在，且

$$D[T(x_0)(rh)]=rD[T(x_0)h] \quad \text{（齐次性）；}$$

(2°) 若 $D[T(x_0)h]$ 存在，则 $\lim\limits_{t \to 0}\|T(x_0+th)-Tx_0\|=0$

证明 (1°) 在(1.1-8)中令 $t=t'r$，得

$$\lim_{t'\to 0}\frac{1}{t'r}\|T(x_0+t'rh)-Tx_0-t'rD[T(x_0)h]\|=0$$

故

$$\lim_{t'\to 0}\frac{1}{t'}\|T(x_0+t'rh)-Tx_0-t'rD[T(x_0)h]\|=0$$

即

$$D[T(x_0)(rh)]=rD[T(x_0)h]$$

(2°) 由(1.1-8)式及估计式

$$\|T(x_0+th)-Tx_0\|\leqslant\|T(x_0+th)-Tx_0-tD[T(x_0)h]\|+|t|\|D[T(x_0)h]\|$$

立即得到结论。 □

这个命题说明，$D[T(x_0)h]$ 关于 h 是齐次的，且若 $D[T(x_0)h]$ 存在，则算子T在 x_0 处沿 h 方向是连续的。

例 1 设 $X=\mathscr{R}^2$，$Y=\mathscr{R}^1$，$x=(x_1,\ x_2)\in X$，定义

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1^2x_2}{x_1^2+x_2^2} & (x_1,\ x_2)\neq(0,\ 0)\\ 0 & (x_1,\ x_2)=(0,\ 0)\end{cases}$$

设 $h\in\mathscr{R}^2$，$h=(h_1,\ h_2)\neq(0,\ 0)$，则易得 $D[f(0)h]=f(h)$。这个例子说明，$D[f(0)h]$不是h的线性函数，即 f 在 $x=0$ 处不具有有界线性的 G-微分。

G-微分有一条重要的性质，即对泛函来说中值公式成立。

定理 1.3 设 $S\subset X$是凸开集，泛函φ：$S\to\mathscr{R}^1$ 在 S上G-可微的，即对任意 $x\in S$，φ 在 x 处G-可微，则对任意的 $x\in S$ 及 $h\in X$，当$x+h\in S$ 时，存在 $\tau=\tau(x,\ h)\in(0,\ 1)$，满足

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=D[\varphi(x+\tau h)h] \qquad (1.1\text{-}9)$$

证明 设 $x\in S$，$h\in X$ 及 $x+h\in S$，由 S 的凸性知，当

$0\leqslant t\leqslant 1$时，$x+th=(1-t)x+t(x+h)\in S$，令

$$f(t)=\varphi(x+th)\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

因 φ 在 $x+th(0\leqslant t\leqslant 1)$ 处有G-微分，故

$$\left|\frac{f(t+\lambda)-f(t)}{\lambda}-D[\varphi(x+th)h]\right|\to 0\quad(\lambda\to 0)$$

即$f(t)$在$(0,1)$内可微，且

$$f'(t)=D[\varphi(x+th)h]$$

于是

$$f(1)-f(0)=f'(\tau)=D[\varphi(x+\tau h)h]$$

其中 $\tau\in(0,1)$，即

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=D[\varphi(x+\tau h)h]\qquad\square$$

上述定理要求φ是泛函，对于一般的非线性算子，中值公式不成立。但有下列较弱的结果。

定理 1.4 (Vainberg, M. M., 1952) 设 $S\subset X$ 是凸开集，$T: S\to Y$ 在 S 上 G-可微的，则对任意 $x\in S$，$h\in X$ 及 $e\in Y'$，当 $x+h\in S$ 时，存在 $\tau=\tau(x,h,e)\in(0,1)$ 使得

$$(e,\ T(x+h)-Tx)=(e,\ D[T\ x+\tau h)h])\qquad(1.1\text{-}10)$$

证明 作 $\varphi(x)=(e,Tx)$，则 φ：$S\to\mathscr{R}^1$。因 T 在 S 上G-可微，所以φ在 S 上也G-可微，且

$$D[\varphi(x)h]=(e,\ D[T(x)h])$$

定理 1.3 说明，$\varphi(x+t)-\varphi(x)=D[\varphi(x+\tau h)h]$，故

$$(e,\ T(x+h)-Tx)=(e,\ D[T(x+\tau h)h])\qquad\square$$

定理 1.5 设 X，Y是线性赋范空间，T：$D(T)\subset X\to Y$，x_0 是 $D(T)$的内点，则T在 x_0 处具有有界线性的G-微分的充要条件是存在 $a(x_0)\in B(X,Y)$及 $q(x_0)$：$D(q(x_0))\to Y$ 满足