

高等医药专业理工素质教育新概念系列规划教材

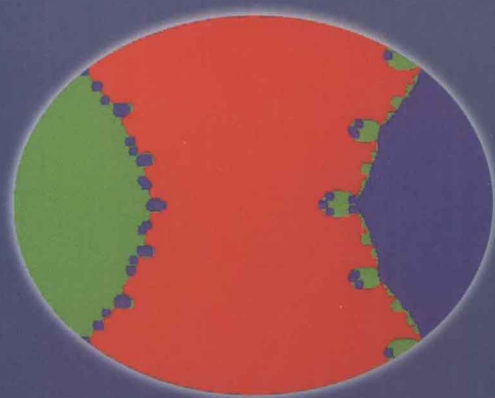
丛书总主编 刘志成

丛书副总主编 张旭 童隆正 全海英 李林

医用高等数学 新概念教程

李林 主 编

刘红 闫岩 副主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等医药专业理工素质教育新概念系列规划教材

医用高等数学新概念教程

主 编	李 林				
副主编	刘 红	闫 岩			
编 著	张金旺	高 磊	华 琳		
	李冬果	郑卫英	张 建		
	郑文新				

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等医药专业理工素质教育新概念系列规划教材

编
审
委
员
会

主 任：刘志成

副主任：张 旭 童隆正 全海英 李 林

编 委：（按姓氏笔画排序）

王 磊 王春燕 全海英 刘志成

刘志翔 闫松华 杜 菁 李 林

李 霞 宋红芳 张 旭 张 宽

张 楠 陈 卉 陈安宇 武文芳

钱秀清 梁志远 潘 清

秘 书：韩晓鹏 王 燕 曲 典

医学学科的发展目标是认识人类生理功能改变的客观规律,改进病理过程的干预技术,提升诊治疾病的技术水平,是一个专业技术极高的应用性学科。人体是物质存在的一种特殊形式,呵护人体健康离不开描述物质世界的理学原理和工学技术的支持与帮助,如X射线晶格衍射技术帮助我们获得了DNA的双螺旋结构构象;X射线成像、核磁共振成像、超声成像等一组成像技术使得我们可以在非手术状态下获得体内的形态学信息,甚至可以获得其相应的运动信息;各种导管与微创技术使医生能够自如地对患者体内的疾病实施干预治疗;生物材料、人工器官、组织工程的发展使得人体废用器官或组织的处理从单纯的外科切除发展到修补、置换和再生的水平;影像技术、生物系统仿真与建模技术同计算机技术结合所构建的手术预设计系统大大地提高了手术的成功率;各种生物医学信息处理技术的出现帮助研究人员设计出各种切合实际的药物和装置,网络技术与计算技术的结合使得我们能够实现远程医疗,进而达到紧缺的医学技术资源的共享,如此事例比比皆是。

纵观这些医学新技术的发展历程,大都是医生或医学研究者提出需求,刺激理工专家通过技术创新来达到医学技术需求的目的。我国是人口大国,同时也是医学资源的消耗大国,而我们对医学新技术的贡献却微乎其微。形成这种局面的主要原因在于我国高等医学教育是高中起点,医药专业学生先天理工素质不足,而医学院校对理工素质教育认识不清,导致了毕业后的医生、药剂师和研究者缺乏提出创新要求的意识以及与理工技术人员进行医学技术创新的沟通能力。

世界各国为临床医学制订了超级严格的执业资格准入制度,不允许没有受过系统、规范的专业教育人员从事临床医务活动。医生在临床医务活动中的主导地位决定了医学技术的创新源头属于医生,而医生的理工素质高低在很大程度上决定着其创新意识和创新能力。

针对我国高等医学教育中理工素质教育偏弱的情况,我们按照“以追求专业教育效果为目标”的医药专业学生理工素质教育理念,构建了一个以公共基础、专业基础和专业技术分类,按照必修与选修相结合的原则,适合医学生本科和研究生阶段教育的立体化课程体系,对各部门课程在医学生理工素质提高方面的作用与地位进行了明确的定义和界定。

“高等医药专业理工素质教育新概念系列规划教材”就是为这些课程的实施而编写的。

在课程内容组织上,因为处于基础阶段的医药专业学生对自己的专业追求迫切但医学内容涉足不深,我们对“医用高等数学”、“医用物理学(含实验)”和“计算机技术”等基础必修课程进行了“内容拓展、深度放浅”的技术处理;经过对临床医学诊治和基础医学研究中的常见或新生理工技术进行梳理分类,本着“精炼实用、好理解易接受”的原则,按照“这是什么、能干什么、原理如何、怎么干、想用找谁”的思路组织了选修课程的教学内容。

在编写体例上,基础必修课程的教材尽可能保证内容的系统性,兼顾完整性,坚持严谨性,各章节内容尽量以比较震撼的实例开篇,以提出问题的方式展开内容讲解,淡化过于深邃的推导,强调理解基础上的充分接受,为便于学生理解课程内容,选择的例题和练习尽量以“生”为主线,结合生活、生产和生物医学实际情况设计。结合课程内容的讲解,在适当的位置插入了小贴士、拾遗和相关链接,以给出学生可以深入学习的资源性内容,引导学生根据自己的兴趣拓展所学内容。

总体来说,本书的“新概念”体现在如下一些方面:首先,在课程内容设计上,注意到了学时有限的实际情况,力图在有限的学时之内让学生获得更多的相关知识和技术,以便他们在将来的职业生涯中更有效地利用好这些知识和方法,能够有意识并且方便地寻求到相关理工技术人员的合作与支持,达到通过学科交叉实现医药技术和认识创新的目的;其次,在课程定位上,注意到了“医用高等数学”、“医用物理学”和“计算机技术”等基础课程在现有的高中起点高等医学教育培养方案所规定的课程体系均属于“绝课”,即没有后续课程接应,所以它们在培养方案中的课程定位应该属于“公共基础兼专业基础”的性质,考虑到其专业应用的需要,数学、物理等理学课程又必须带有一定的工学色彩;再次,在教材编写体例上,为便于基础阶段学生的理解和接受,非常注意在保持课程内容系统性的同时,兼顾贴合实际和专业,在专业学习阶段和研究生学习阶段开设的选修课程,讲究实用和简练,学生可根据兴趣所好,有所选择地学习。

各校可以根据师资和教学条件选择使用本系列教材,我们也希望通过该系列教材的出版能够与同行们进行关于“医学生理工素质教育”方面的讨论与切磋,逐步完善这一课程体系,以期达到促进我国医学新技术创新水平的目的。本系列教材是我们教学改革与研究中的一种尝试,无论在想法、思路和做法上都可能存在不妥之处,诚请各位读者反馈意见和建议,以便今后的改进与提高。

刘志成

2010年8月

前言

数学科学与哲学、自然科学、社会科学一道共同撑起人类丰富的知识宝库。数学以其对科学、技术以及社会经济所起的无可替代的促进作用,显示了它蕴藏着推动社会发展的巨大潜能。数学对于教育的重要性是不言而喻的。数学素质是人的整体素质的很重要的组成部分。上世纪末,1984年、1989年、1990年,美国国家研究委员会在相继提出的三份关于振兴数学教育的报告中指出:“对所有学生进行优质的数学教育是兴旺发达的经济所必需的。”1998年,在我国教育部组织的“数学教育在大学教育中的作用”研讨班上,与会领导和数学教育专家一致认为:“数学是培养和造就各类高层次专门人才的共同基础”、“数学素质是大学数学教育的灵魂”。对非数学专业的学生,大学数学基础课是培养大学生数学素质的主要阵地,它的作用至少有以下3个方面:它是学生掌握数学工具的主要课程;它是学生培养理性思维的重要载体;它是学生接受美感熏陶的一条途径。

数学是研究现实世界中的数量关系与空间形式的一门学科。马克思曾说过:“一门科学只有成功地运用数学时,才算达到了完善的地步。”随着科学技术的进步,特别是计算机技术的迅速发展,数学不仅通过其他学科间接地而且也逐步直接地应用于科学与技术的各个领域包括生物医学之中。“高科技本质上就是数学技术”的观点正逐步成为人们的共识。

当前,许多数学教育工作者认识到,我国高等医科院校的数学教学存在诸多问题,其中尤为突出的是随着现代医学的发展,医学对数学提出了更高的要求,而我国现行医学类的数学课程体系、教学内容与教学方法还远不能适应这些要求。从受教育者的层面看,一方面,临床医务工作者,基础医学、药学研究者在实践中深感数学知识不足,应用数学工具解决实际问题的能力有待进一步提高;另一方面,医学专业的学生又普遍认为数学较为抽象,学习起来难度大,数学对于未来工作用处不大等等。面对这些问题,我们认为只有通过教学改革逐步解决这些问题。我们要以提升教学效果、培养学生逻辑思维能力、量化计算能力、规律的总结与归纳能力为出发点和落脚点,来研究和构建相应的数学课程体系,优化教学内容配置与学时分配,改进教学方法。

医学类高等数学课程是高中起点的医学高等教育中的一门公共基础课,也承担少量专业基础课程的任务。该课程重在使学生系统地获得基础理论,同时使学生的基本运算能力、解决实际问题的能力、抽象思维能力、逻辑推理能力得以提高;此外,也使学生了解数学方法与数学建模技术在生物医学中的应用,为后续课程的学习和将来从事的医药临床或科研工作奠定数学基础。

鉴于以上认识,我们组织编写了本教材,力图做到将一些与“生命、生产、生病、生活”相关的内容融入到教材中;将一些简单的数学建模技术、数学计算技术融入到教材中。教材的基本内容涵盖微积分(函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学与重积分)、微分方程(一阶微分方程、二阶线性微分方程的求解与应用)、矩阵基

本理论(矩阵的基本运算与线性方程组求解)和概率的基本理论与应用等。其明显的特点如下:

(1) 将代数、几何、概率论的基本内容编入教材,融入教学,扩展医学类学生的数学知识面;

(2) 以阐述概念为重点,以基本理论及其应用为主线,不强调相关定理证明技巧;

(3) 将数学软件的使用融合进教材,将微积分的教学与软件的利用结合起来;

(4) 不强调大量的(极限、导数、微分、积分、行列式、矩阵、微分方程)计算,使学生会用数学软件解决相关计算问题;

(5) 以“数海拾贝”给出可扩展内容、能激发学生兴趣的资料或参考资源等,以“数学家故事”、“科学家名言”使学生了解数学家的思想和数学发展的进程,使教材增添人文的元素;

(6) 习题以分析和概念理解为主,不突出过繁的计算与推导,不强调数学解题技巧;

(7) 以附录或标注*的形式适当介绍现代数学知识、现代计算技术,体现内容的时代性。

本教材适用于医科高等院校各专业,包括基础医学、临床医学、口腔医学、预防医学、护理学、中医学、药学、卫生管理等。由于本教材的改革力度较大,为了便于使用,在此我们根据五年制和七年制的培养计划提出教学建议,具体章节学时分配也一并列出,使用时可以根据具体情况进行调整。其他学制的专业在具体教学时可以参考调整。具体参考建议如下:

(1) 医学类学生学习数学的目的是应用数学,应用数学的知识、数学的计算技术、数学思想方法,同时通过学习数学进一步培养逻辑思维能力,培养定量化思维的能力。因此,教学中继承发扬数学教学中的分析、推理、归纳等缜密逻辑思维的传统,同时要强调应用数学,将数学建模的思想融入教学之中。

(2) 考虑到计算机的普及和计算技术的高度智能化,建议将传统的通过手工计算(例如,求极限、求导数、求积分、矩阵运算、解微分方程等)培养学生计算能力的方式转化为通过数学软件来实现。

(3) 考虑到函数极限、一元函数微分学、概率与统计等内容逐步进入中学数学教学中,我们在教材处理中,有意简化相关部分的比重,因此在教学中建议将学过的内容简化,将重点放在数学思想的阐述和深化上。

(4) 建议按如下学时分配进行教学:

章节名称	学时建议		
	七年制	五年制	其中:数学软件部分学时
第1章 曲线与曲面	6	6	2
第2章 一元函数的极限及其连续性	6	6	

续表

章节名称	学时建议		
	七年制	五年制	其中:数学软件部分学时
第3章 一元函数导数、微分及其应用	12	9	2
第4章 一元函数的积分及其应用	12	9	1
第5章 微分方程	9	6	1
第6章 多元函数的微分学	12	0	1
第7章 重积分	9	0	
第8章 矩阵理论初步与应用	9	6	1
第9章 概率的基本理论与应用	9	9	
第10章 MATLAB在高等数学中的应用	6	3	
合计	90	54	

本书融入了我校多年从事医用高等数学教学的广大教师的经验与体会,同时也参考了多种工科版本的高等数学、线性代数教材以及面向医学类专业的同类教材。恕不将上述素材、资料一一列出,在此一并对被参考的资料的作者表示感谢。

本书的编写得到了首都医科大学生物医学工程学院领导的大力支持,是在刘志成教授的筹划下、数学与生物信息学教研室的教师积极参与和大力支持下完成的。李林负责全书的策划,制定编写体例,并具体编写第1、8章和把关第1、5、8、10章,刘红具体编写并把关第2、3、4、6、7章,其中第2章编者为刘红、郑卫英、张建,第4章编者为刘红、李冬果、郑文新;闫岩编写并把关第9章;张金旺、华琳编写第5章;高磊、华琳编写第10章;李林对全书进行了统稿。

本教材虽经试用和修改,但由于编者水平所限,时间紧,书中肯定存在不足和错误,希望得到专家、同行和读者的批评指正,以使本书不断完善。

编者于首都医科大学
2010年7月

前 言	1
第 1 章 曲线与曲面	1
1.1 空间形式概述	1
1.1.1 几何空间	1
1.1.2 高维空间	4
1.2 平面方程与空间直线方程	6
1.2.1 平面及其方程	6
1.2.2 空间直线及其方程	8
1.3 曲面及其方程	11
1.3.1 一般形式	12
1.3.2 参数形式	12
1.3.3 旋转曲面	13
1.3.4 柱面	14
1.4 曲线的表示形式	15
1.4.1 平面曲线	16
1.4.2 空间曲线	21
习题一	23
附录 向量及其运算	27
第 2 章 一元函数的极限及其连续性	29
2.1 函数	29
2.1.1 函数的概念	29
2.1.2 复合函数	31
2.1.3 基本初等函数和初等函数	32
2.2 函数的极限	32
2.2.1 数列的极限	32
2.2.2 函数的极限	34
2.2.3 极限的四则运算	35
2.2.4 两个重要的极限及其应用	36
2.2.5 无穷小量及其性质	38
2.3 函数的连续性	40
2.3.1 连续函数的概念	40
2.3.2 函数的间断点	41
2.3.3 连续函数的运算	42

2.3.4 闭区间上连续函数的性质	42
习题二	43
附录 极限的 ϵ - N , ϵ - δ 语言	44
第3章 一元函数导数、微分及其应用	50
3.1 导数的概念	50
3.1.1 引例	50
3.1.2 导数的定义	51
3.1.3 导数的意义	53
3.1.4 函数的可导性与连续性的关系	54
3.2 导数的运算	55
3.2.1 导数的四则运算法则	55
3.2.2 反函数的求导法则	55
3.2.3 复合函数的求导法则	57
3.2.4 隐函数的求导	57
3.2.5 参数方程所确定函数的求导	58
3.2.6 高阶导数	59
3.3 微分的概念与应用	60
3.3.1 微分的概念	60
3.3.2 微分的基本公式和运算法则	61
3.3.3 微分的应用	62
3.4 微分中值定理	64
3.5 导数的应用	66
3.5.1 罗必达法则	66
3.5.2 函数的单调性的判定	69
3.5.3 函数的极值	69
3.5.4 曲线的凹凸性	72
3.5.5 函数图形描绘	74
习题三	76
第4章 一元函数的积分及其应用	79
4.1 不定积分	79
4.1.1 原函数与不定积分的概念	79
4.1.2 不定积分的性质和基本积分公式	81
4.1.3 换元积分法和分部积分法	82
4.2 定积分概念	87
4.2.1 定积分引例	87
4.2.2 定积分的定义和存在定理	89
4.2.3 定积分的几何意义与定积分的性质	90
4.3 微积分基本公式	92

4.3.1 微积分基本公式	92
4.3.2 定积分的换元法和分部积分法	93
4.4 定积分的应用	96
4.4.1 定积分的微元法	96
4.4.2 定积分在几何中的应用	97
4.4.3 定积分在物理上的应用	99
4.4.4 定积分在医学上的应用	100
习题四	101
附录 数值积分	104
第 5 章 微分方程	106
5.1 一些物理规律的数学描述—微分方程	106
5.2 求解微分方程的积分法	110
5.2.1 一阶微分方程	110
5.2.2 二阶微分方程	118
5.3 微分方程在生物医学中的应用实例	125
5.3.1 指数增长的应用模型	125
5.3.2 线性微分方程的应用模型	127
5.3.3 抑制增长方程的应用模型	127
5.3.4 药物动力学中的应用模型	128
习题五	130
附录 生物医学中的数学建模方法概述	133
第 6 章 多元函数的微分学	137
6.1 多元函数的极限与连续性	137
6.1.1 多元函数的概念	137
6.1.2 二元函数的极限	138
6.1.3 二元函数的连续性	139
6.2 偏导数	140
6.2.1 偏导数	140
6.2.2 二阶偏导数	142
6.3 全微分	143
6.3.1 全微分概念	143
6.3.2 全微分的简单应用	144
6.4 复合函数的微分法	146
6.5 二元函数微分学在几何上的应用	147
6.5.1 空间曲线的切线	147
6.5.2 曲面的切平面	148
6.6 二元函数的极值	149
习题六	153

第 7 章 重积分	156
7.1 二重积分	156
7.1.1 二重积分的概念	156
7.1.2 二重积分的性质	158
7.2 二重积分的计算	160
7.2.1 在直角坐标系中计算二重积分	160
7.2.2 用极坐标系计算二重积分	162
7.3 二重积分的应用	164
7.3.1 平面薄片的质量	164
7.3.2 曲顶柱体的体积	164
7.3.3 平面薄片的转动惯量	165
7.4 三重积分	165
7.4.1 三重积分的定义	166
7.4.2 三重积分的计算	166
习题七	171
第 8 章 矩阵理论初步与应用	174
8.1 矩阵及其运算	174
8.1.1 引例	174
8.1.2 矩阵的基本概念	175
8.1.3 矩阵的运算	176
8.2 线性方程组	180
8.2.1 线性方程的解	180
8.2.2 求解线性方程组	181
8.3 行列式	184
8.3.1 二阶与三阶行列式	184
8.3.2 高阶行列式	186
8.3.3 Cramer 法则	189
8.3.4 伴随矩阵	190
8.4 矩阵初等变换的应用	191
8.4.1 求逆矩阵	191
8.4.2 再论线性方程组的解及其几何意义	193
8.5 线性空间*	195
8.6 矩阵与线性方程组在生物医学中的应用举例	198
8.6.1 常染色体遗传模型	198
8.6.2 人口的控制与预测模型	199
8.6.3 基因间“距离”的表示	201
习题八	203
附录 代数学简介	206

第 9 章 概率的基本理论与应用	211
9.1 随机事件的概率及其运算	211
9.1.1 随机试验与随机事件	211
9.1.2 随机事件的概率	212
9.1.3 概率的加法公式	213
9.1.4 条件概率	214
9.1.5 概率的乘法公式	214
9.2 全概率公式和贝叶斯公式	216
9.2.1 全概率公式	216
9.2.2 贝叶斯公式	217
9.3 随机变量及其概率分布	218
9.3.1 随机变量	218
9.3.2 离散型随机变量的分布	218
9.3.3 连续型随机变量的分布	221
9.4 随机变量的数字特征	225
9.4.1 数学期望	225
9.4.2 方差和标准差	226
9.5 大数定律与中心极限定理	226
9.5.1 大数定理	226
9.5.2 中心极限定理	227
9.6 数理统计简介	228
9.6.1 几个基本概念	228
9.6.2 参数估计	229
9.6.3 假设检验	229
习题九	231
第 10 章 MATLAB 在高等数学中的应用	232
10.1 MATLAB 软件工作窗口和基本操作	232
10.1.1 MATLAB 软件工作窗口	233
10.1.2 MATLAB 常用命令和操作	235
10.2 MATLAB 语言基础	238
10.2.1 MATLAB 的变量和运算符	238
10.2.2 MATLAB 数组和矩阵	242
10.2.3 MATLAB 程序基础	252
10.3 MATLAB 微积分计算	258
10.3.1 符号变量和表达式	258
10.3.2 初等数学中的符号运算	260
10.3.3 函数微积分学计算	264
10.4 MATLAB 绘图	270

10.4.1 二维绘图	270
10.4.2 三维绘图	276
10.4.3 简化函数绘图	278
10.5 最小二乘法和 MATLAB 中的曲线拟合	279
10.5.1 直线拟合	280
10.5.2 多项式拟合	282
10.5.3 其他曲线拟合	283
习题十	287
参考答案	289

第 1 章 曲线与曲面

现实世界中的万事万物,无一不在一定的空间中运动变化,在运动变化过程中都存在一定的数量关系. 数学就是研究现实中数量关系与空间形式的科学. 数学各个分支学科并不是要么属于“数”的研究,要么属于“形”的研究. 当然也并不是数学的每门学科中都是数与形的平均结构,而往往是或者偏重于“数”,或者偏重于“形”. 不过应当强调的是,即使重“数”的分支,比如分析学,也有它的形作为思维背景. 所谓“形”一指是形体、形象或图形,另一指的是空间. 前者是后者(空间)中的具体对象,后者是前者的背景和参考,总的都称作空间形式.

肿瘤危害性极大,机体内肿瘤的数目、大小和形状是人们关心的问题. 肿瘤的形状多种多样,有息肉状、乳头状、结节状、分叶状等. 显然,这里涉及到大小与形状. 如何再现体内肿瘤形状以及如何全面了解认清其空间构形对肿瘤的诊断与治疗(例如,适形治疗),无不具有重要意义.

1619 年,笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650)为空间安上了坐标架,具体地说是引入了坐标系(coordinate system)和数轴(axes),从而使数与形结合起来,诞生了解析几何学(包括平面解析几何和空间解析几何). 而后随着坐标系概念和方法体系的逐渐完善,数学的两大分支——函数论和分析学逐渐发展起来.

由此看来对空间形式的认识是整个数学的需要,而空间形式的发展也从一个大的方面体现了整个数学的特征,而且是个根本性特征.

这一节我们简要介绍:几何空间、四维空间、 n 维欧几里得空间(简称为 n 维欧氏空间)和线性空间的基本概念.

1.1 空间形式概述

1.1.1 几何空间

1. 一维空间

在一维空间(one-dimensional space)中可以度量一个尺寸,点可以沿一个方向移动.

直线(straight line)是一维空间的代表,因为只需要一个数就可以描述线上各点的位置.

在几何上实数集可表示为有向直线,即我们常说的数轴. 单个数以数轴上的点表示,也就是说线上的点和实数之间形成了一种一一对应关系. 时间的几何模型是一维的直线,没有开端也没有终结,而且只向一个方向发生变化.

实际上,一个点从一个位置 P 移动到另一个位置 P_1 , 它将描绘出一条直线. 这条直线就可以被看作是一维空间(见图 1-1).

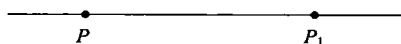


图 1-1 由点到直线(点动成线)

一维空间的距离定义为: $|MN| = |x_1 - x_2|$, 其中 M, N 是直线上两点, 其坐标分别为 x_1, x_2 .

2. 二维空间

二维空间(two-dimensional space)的代表是平面(plane). 在平面上可以度量两个尺寸, 可以向两个独立的方向发生移动和转动.

二维空间可以由一维空间如下扩展得到: 取一几何直线并将它从一个位置移动到另一个位置(可以是平行移动, 比如从 PP_1 移动到 SS_1 , 也可以是绕直线上一点 P 旋转移动, 比如从 PP_1 移动到 PS). 这个移动会确定一个平面(见图 1-2).

在平面上, 我们可以建立坐标系. 常用的平面坐标系是笛卡儿直角坐标系(cartesian orthogonal coordinate system)和极坐标系(polar coordinate system).

笛卡儿直角坐标系(简称为直角坐标系)是由两条相互垂直的直线——坐标轴(coordinate axes)来确定的(见图 1-3). 在平面直角坐标系中, 第一个坐标常称为横坐标(abscissa), 是在横轴(horizontal axis)上沿向右方向的度量. 第二个坐标常称为纵坐标(ordinate), 是在纵轴(vertical axis)上沿向上方向的度量.

极坐标系(polar coordinate system)是按照如下方法建立的: 在平面内取一个定点作为原点 O , 也叫极点(pole), 引一条射线 Ox , 叫做极轴(polar axes). 再选定一个长度单位和角度的正方向(通常取逆时针方向). 对于平面内一点 P , 用 ρ 表示线段 OP 的长度, φ 表示从 Ox 到 OP 的角度. ρ 叫做点 P 的极半径(polar radius)(或简称为极径), 角 φ 叫做点 P 的极角(polar angle). 于是, 一个点 P 也与一个有序实数对 (ρ, φ) 对应. 有序实数对 (ρ, φ) 叫做点 P 的极坐标(polar coordinates)(见图 1-4).

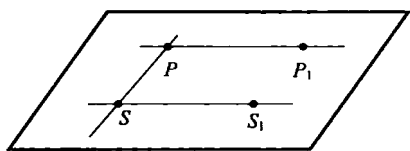


图 1-2 由直线到平面(线动成面)

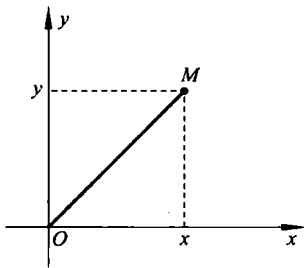


图 1-3 平面直角坐标系

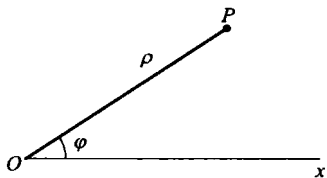


图 1-4 极坐标系

除了上面提到的直角坐标系和极坐标系, 我们还可建立斜坐标系. 事实上, 在笛卡儿最初的坐标系概念中仅说坐标轴间具有“固定角”, 并未强调两坐标轴必须是垂直的. 也就是说, 只要两直线不是重合的也不是平行的, 那这两条直线就可以形成一个坐标系或说形成一个二维空间.

二维空间的距离定义为:

$$|MN| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

其中, M, N 是平面内两点, 其坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

在二维空间中, 描述曲线(包括直线)的方程均含有两个未知量. 例如, 在直角坐标平面内直线的一般方程为:

$$Ax + By + C = 0;$$

圆的一般方程为：

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

我们知道，如果一个方程是某曲线的方程，则曲线上每一点的坐标都满足该方程；反过来，坐标满足方程的点也必定在曲线上。

3. 三维空间

一个平面沿一直线方向(不在该平面内)移动或作旋转移动，将描绘出一个具有长、宽、高三个尺度的立体的几何图形。这个立体图形确定一个三维空间(three-dimensional space)(见图 1-5)。我们生活的现实空间是三维的，因为有三个互相垂直的独立方向存在：前后、左右、上下。

三维空间中的笛卡儿直角坐标系的建立和平面的情况是类似的，具体如下：过空间一定点 O ，作三条相互垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位，这三条轴分别叫做 x 轴、 y 轴和 z 轴。通常把 x 轴和 y 轴配置在水平平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向。如图 1-6 所示，图中箭头的指向表示 x 轴、 y 轴和 z 轴的正向。这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系(spatial coordinate system)。点 O 叫做坐标原点(coordinate origin)。通过两个坐标轴的平面为坐标平面(coordinate plane)。三个坐标平面把空间分为八个区域，我们称其为卦限(octants)。

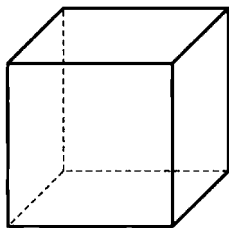


图 1-5 立方体

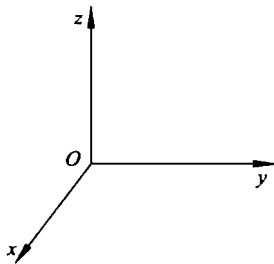


图 1-6 空间直角坐标系

事实上，在认识生物体的构造、解剖特征时，就需要建立坐标系(见图 1-7)。矢状轴(x 轴)、冠状轴(y 轴)和垂直轴(z 轴)组成了直角坐标系、冠状面(yOz 平面)、矢状面(xOz 平面)、水平面(xOy 平面)将人体分成八个部分。

设 M 为空间中一已知点。我们过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴，它们与 x 轴、 y 轴和 z 轴的交点依次是 P 、 Q 、 R ，这三点在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x 、 y 、 z 。于是空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x, y, z 。反过来，已知一有序数组 x, y, z ，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P ，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q ，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R ，然后通过 P 、 Q 、 R 分别作 x 轴、 y 轴和 z 轴的垂直平面。这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 x, y, z 所确定的唯一的点。这样就建立了空间的点 M 和有序数组 x, y, z 之间的一一对应关系。这组数 (x, y, z) 就叫做三维空间中一点的笛卡儿直角坐标(Cartesian rectangular coordinates)(见图 1-8)。