高等学校教学用书

初等代数研究

李玉琪　主编

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

$$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant M_2$$

CHUDENGDAISHUYANJIU

中国矿业大学出版社

高等学校教学用书

初等代数研究

主编 李玉琪

编委 （以姓氏笔划为序）

卢青林 李玉琪

李乐增 陈秋莲

庞征球 高 原

中国矿业大学出版社

（苏）新登字第010号

内容提要

本书是按照高等师范数学教育专业培养目标的要求，由苏、皖、冀部分高师院校协作编写而成的．全书共七章：数的概念，解析式，初等函数，方程和方程组，不等式，排列与组合，数列．两个附录：整数的整除性，近似计算初步．

本书用近代数学的观点研究初等代数内容，既注意使高等数学学有所用，又注意使初等代数用有所学．从而提高该门课程的理论水平，对中学代数教学具有指导作用，本书可供高师院校数学教育专业作为教材或教学参考书，也可供中学数学研究人员、中学数学教师阅读和参考．

责任编辑　何其华

高等学校教学用书
初等代数研究
主编　李玉琪

中国矿业大学出版社出版发行
江苏省新沂印刷厂印刷
开本 850×1168 毫米　1/32　印张 12.625　字数 315 千字
1993 年 2 月第 1 版　　1993 年 2 第 1 次印刷
印数　1—4000 册

ISBN 7-81021-827-1

O·51　　　　定价：6.90 元

前　言

本书是为高师院校数学系、科在高年级开设“初等代数研究”课程而编写的试用教材. 根据该课程的目的、要求，本书以近代数学的观点和方法以及高等数学的知识，对初等代数进行分析研究，并对中学代数的一些重要内容予以加深与拓广，旨在提高学生的初等代数的理论水平，进一步培养数学的解题能力，为今后从事数学工作打下坚实的基础.

本书由苏、皖、冀部分高师院校合作编写. 由李玉琪任主编，参加编写的（以姓氏笔划为序）有：卢青林、李玉琪、李乐增、陈秋莲、庞征球、高原等. 在编写过程中，得到所在院系部门领导和教师的大力支持，并参考了各高校的同类教材、讲义和资料. 在此一并致以谢意.

限于编者水平，对于书中出现的不妥和错误，恳求读者予以指正.

编　者

1992 年 5 月

绪 言

“代数学”一词来自拉丁文 *algebra*，它源于同形式的阿拉伯文，是由阿拉伯文 *aljabr* 演变而来的.

公元 820 年左右，花拉子模人阿尔——花拉子模（Al——Khowarizmi，公元 780 年——850 年）著了一本《代数学》. 1140 年左右，罗伯特（Robert of Chester）把它译成拉丁文，书名是“*Ilm.al－jabr wa'l muquaba lah*”其中 *al－jabr* 是“还原”或“移项”的意思，*wa'l muquabalah* 意为“对消”，即将两端相同的项消去或合并同类项，全名是“还原与对消的科学”，也可以译成“方程的科学”. 后来，第二个字逐渐被人们遗忘，而 *al－jabr* 这个字变成了 *algebra*. 1859 年，我国清代数学家李善兰首次把它译成“代数学”.

该书着重讨论了一元二次方程 $x^2+px=q$ 的一般解法，系统地论述了解方程的具体过程及其几何解释，承认了方程的无理根. 该书后来传入欧洲，影响甚大，遗憾的是作者在论述上出现了倒退，只用文字语言，而放弃了任何代数符号. 另一位数学家奥马·海亚姆（Omar Khayyam）也著有《代数学》（Algebra，约在 1079 年）一书，书中较详尽地讨论了三次方程问题，区分了若干类可解的三次方程，并借助圆锥曲线来求解，12.13 从而在古代印度和阿拉伯的数学进展中把代数提高到与几何并驾其驱的地位.

值得指出的是，在代数学的历史上，我国早在公元前 1 世纪左右的《九章算术》一书中，已有联立一次方程组和二次方程组的普遍解法的记载，比欧洲早一千多年. 公元 6 世纪，唐朝数学家王孝通在《缉古算经》中给出了关于三次方程的数值解法. 可见我国古

代对于代数学的研究,在世界上是遥遥领先的.

用符号来代替文字的叙述,是代数上的进步,也是代数的特征之一.一套合适的符号不仅仅是起速记、省时的作用,且能准确、深刻地表达某种概念、方法和逻辑关系,使代数有可能成为一门科学.一个较复杂的公式,如果不使用符号而是用日常语言来叙述,将显得十分冗长乃至含混不清.代数符号的产生可以追溯到距今约 3800 年前的古埃及和古巴比伦的数学.使用符号是数学史上的一件大事,一种符号的产生及其被普遍采用,往往是极其困难的,它是经过不断改良、选择和淘汰而逐步完善的.

代数按其进程大致可分为初等代数时期和高等代数时期.初等代数时期或古典代数时期只是习惯的叫法,没有严格的界限.古典代数基本上就是方程论,它的内容是以讨论方程的解法为中心的.

代数方程论于 16 世纪初在意大利得到进一步发展.塔尔塔利亚(Tartaglia,N),卡当(Cardano,G)和费拉里(Ferrari,L)等数学家先后找到一般三次方程和四次方程的代数解法.卡当还和另一位数学家邦贝利(Bombelli,R)相继发现并完善了虚数理论,确定了虚数运算法则,从而最终解决了二、三、四次代数方程的公式求解问题.此处还应指出,早在公元 1247 年,我国宋朝著名数学家秦九韶所著的《数书九章》中的"正负开方术",已经提出数字高次方程的求正根法,他的"大衍求一术"和一次同余理论,被外国数学家称为"中国剩余定理"而倍加称赞,西方直至 18、19 世纪才被发现.另外,公元 11 世纪的贾宪三角形,沈括的隙积术,以及 13 世纪杨辉的垛积术等,均早于西方数百年之久.我国在数学方面的辉煌成就,正如英国科学史家李约瑟(Needham 1900—)所说,中国"在公元 3 世纪到 13 世纪之间,保持一个西方所望尘莫及的科学知识水平."14 世纪以后,由于腐朽没落的封建制度以及我国传统数学本身存在的弱点等多方面的原因,没有得到进一步的发展,基本上处

于停滞状态，更不用说发展成为近代数学了.

高等代数起源于高次方程求解理论的探讨. 德国大数学家高斯(Gauss, C. F)于 1799 年给出“代数基本定理”的第一个实质性的证明，从而确定了任意 n 次代数方程：

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0)$$

有且仅有 n 个根.

法国数学家拉格朗日(Lagrange, J. L)、鲁菲尼(Ruffini, P)和挪威数学家阿贝尔(Abel, N. H)先后在一般五次方程不可能用根式求解方面做了重要工作. 法国的伽罗瓦(Galois, E)于 1831 年引入代换群，彻底解决了代数方程根式可解的条件问题，他的理论开辟了代数学的一个崭新领域——群论，并由此开创了近世代数学. 群论的出现使代数学摆脱了方程论的局限，逐步转向代数结构本身的研究，向着代数数论、超复数系、线性代数、环论、域论等新的方向发展，并不断地渗透到数学的各个领域.

抽象代数是伴随抽象群的出现而兴起的. 继 1870 年法国数学家约当(Jordan, C)对群论及伽罗瓦理论做了重要推进后，1873 年，挪威数学家李(Sophus Lie)建立了连续群论，开辟了代数学的另一分支——李群与李代数. 近年来，代数的对象不断扩大，出现了一系列新的代数领域，研究方法也发生了巨大的变革，代数已经从古典代数以方程论为中心转变为以研究各种代数结构的性质为中心的一大学科.

作为中学数学教学科目的代数，就其性质和内容来说，与作为科学的近代代数有着显著的差别，它所含内容十分丰富，不仅含有固定意义的基本知识：数的概念、式的运算、方程(含不等式)、函数等属于传统代数的四大块内容，而且还包含数学归纳法、数列、排列与组合、二项式定理、超越函数及概率论初步、统计初步等方面的内容. 所以，中学代数实际上是一门综合性的学科.

作为研究课程的初等代数，与作为中学数学教学科目的代数，

在内容和要求上也有所不同. 本书前言里已经指出，这门课程是以近代数学的观点和方法以及高等数学的知识去研究初等代数，并对一些重要的中学代数内容进行加深与拓广，解决在中学里限于学生知识水平，只提出而未能证明或未能完全证明的问题，以提高作为一名中学数学教师的初等数学理论水平和数学修养. 这就是本门课程在高师院校数学系、科设置的目的.

本书仍以传统的初等代数内容分章进行讨论，对于中学代数中已经解决的问题不再重复阐述. 对于在高等数学里已研究过的有关理论，一般将直接引用，不再论证. 我们认为“初等代数研究”这门课程，既区别于作为科学的近代代数，又不同于作为中学数学教学科目的代数. 突出初等数学与高等数学之间的联系，起到居高临下的作用，应是这门课程的主要特点之一. 这是教师在开设这门课程时应该切实把握的.

目　　录

第一章 数的概念

数的概念是现代数学的基本概念之一.数的理论是建立数学理论的基础,数的理论是否严密,直接关系到数学科学的发展.

本章首先是用严格的公理化方法建立自然数集,然后采用构造的方法建立其它数系,以使所研究的数的理论有一个科学的体系和更加严格的数学基础.

应该指出,近代的代数已发展成为全新的对结构的研究,作为中学数学的教师,熟悉用代数结构的观点和严格公理化的方法来处理数系的扩张,无疑,对分析处理中学教材是有好处的,这不仅是科学的需要,而且也是培养目标的需要.

§1.1 自然数的序数理论

自然数是建造数系大厦的基石,是扩张其它数系逻辑的出发点.因此,自然数作为最基本的数学对象,只能用自然数自身的性质去规定它.所谓自然数公理,简言之,就是自然数在逻辑上最高度的、最简练的概括.它由自然数的一组最少个数的、独立性质所组成,使其它性质均蕴含于它们之中,而由它们演绎得到.

19 世纪中叶,康托(G. Cantor)的基数理论是以原始概念"集合"为基础,利用一一映射在集合之间建立等价关系,把一切等价集合的共同特征叫做基数(或势),而把每一个有限集合的基数定义为自然数.基数理论反映了自然数在数量上的意义,但没有很好地揭露自然数在顺序上的意义,也没有给出自然数加乘运算的具

体方法. 为了克服这些缺陷，1889 年，皮亚诺(G. Peano)采用了公理化方法，提出自然数的公理，建立了自然数的序数理论.

1.1.1 自然数的概念

自然数的序数理论是从自然数列抽象出来的，它有一个最前面的数，记为“1”，把“后继”作为不加定义的基本关系，记为“ ′ ”，再用四条公理来刻划它.

定义 1.1.1 若 $N\neq\varnothing$，且满足下面四条公理，则 N 称为自然数集，N 中元素称为自然数.

(1)$\exists\ 1\in N$，且对$\forall\ a\in N, a'\neq 1$；

(2)对于$\forall\ a\in N, \exists|a'\in N$；

(3)对于$\forall\ a,b\in N$，若 a' 与 b' 不相同，则 a 与 b 亦不相同；

(4)(归纳公理) 若 $M\subseteq N$，且

①$1\in M$；

②对于$\forall\ a\in M$，有 $a'\in M$，

则 $M=N$.

显而易见，由 Peano 公理系统可以把自然数完全确定下来，如果用阿拉伯数码及十进位制的记数法有自然数列：

$1,2,3,4,5,6,\cdots\cdots.$

定理 1.1.1(**第一数学归纳法**) 设 $P(n)$是一个关于自然数 n 的命题，若

(1)$P(1)$成立；

(2)假设 $P(k)$成立，可推出 $P(k+1)$成立，则对于$\forall\ n\in N$，$P(n)$成立.

证明 设 M 是使 $P(n)$成立的一切自然数的集合. 由 $P(1)$成立，知 $1\in M$，由 $P(k)$成立能推出 $P(k+1)$成立，知 $k\in M$ 能推出 $k'\in M$. 由归纳公理得 $M=N$，即对于$\forall\ n\in N, P(n)$成立. □

由证明过程可见，归纳公理是第一数学归纳法的理论根据；而第一数学归纳法又是归纳公理的命题形式，公理中规定的那两条

性质，就是通常用数学归纳法证明的两个步骤.

1.1.2 自然数的运算

定义 1.1.2(加法的归纳定义) 自然数的加法是一种对应关系"+". 由于它，$\forall\ a,b\in N$，有唯一确定的 $a+b\in N$ 与之对应，并且

(1)$a+1=a'$；

(2)$a+b'=(a+b)'$.

这里 a、b 都叫做被加数，$a+b$ 叫做它们的和.

定理 1.1.2 自然数的和 $a+b$ 是唯一存在的.

证明 固定 a，设 M 是使和 $a+b$ 唯一存在的所有 b 组成的集合.

(1)当 $b=1$ 时，$a+1=a'$，由 a' 唯一存在，知 $a+1$ 唯一存在，所以，$1\in M$；

(2)假设 $b\in M$，即 $a+b$ 唯一存在，则由 $a+b'=(a+b)'$，知 $(a+b)'$ 唯一存在，从而 $a+b'$ 唯一存在，所以，$b'\in M$，根据归纳公理，$M=N$. 因此，对于$\forall\ a,b\in N$，和 $a+b$ 唯一存在. □

定理 1.1.3(加法结合律) 对于$\forall\ a,b,c\in N$，都有

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

证明 取定 a,b，设 M 是使上面等式成立的所有 c 组成的集合.

(1)当 $c=1$ 时，由于$(a+b)+1=(a+b)'=a+b'=a+(b+1)$，所以，$1\in M$；

(2)假设 $c\in M$，即$(a+b)+c=a+(b+c)$则由

$$\begin{aligned}(a+b)+c'&=[(a+b)+c]'=[a+(b+c)]'\\&=a+(b+c)'=a+(b+c')\end{aligned}$$

所以，$c'\in M$，根据归纳公理，$M=N$，命题得证. □

定理 1.1.4(加法交换律) 对于$\forall\ a,b\in N$，都有

$$a+b=b+a.$$

证明(1)　首先证明对于$\forall a\in N$,有$a+1=1+a$.

设M是使上式成立的所有a的集合,

①当$a=1$时,$1+1=1+1$,所以$1\in M$;

② 假设$a\in M$即$a+1=1+a$,则

$$a'+1=(a+1)+1=(1+a)+1=1+(a+1)=1+a'$$

所以$a'\in M$,根据归纳公理得证.

(2)　取定a,设M'是使等式成立的所有b的集合,

①当$b=1$时,由(1)知$1\in M'$;

②假设$b\in M'$,即$a+b=b+a$,则

$$\begin{aligned}a+b'&=a+(b+1)=(b+a)+1=1+(b+a)\\&=(1+b)+a=(b+1)+a=b'+a\end{aligned}$$

所以,$b'\in M$,根据归纳公理$M'=N$,定理得证. □

定义 1.1.3(乘法的归纳定义)　自然数的乘法是这样一种对应关系"．".由于它,$\forall a,b\in N$,有唯一确定的$a\cdot b\in N$与之对应,并且

(1)$a\cdot 1=a$;

(2)$a\cdot b'=a\cdot b+a$.

这里a叫做被乘数,b叫做乘数,$a\cdot b$叫做它们的积,简记为ab.

乘法的归纳定义给出了自然数乘法与加法的关系:

$$ab=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{b\text{个}}$$

事实上,设M是使上面等式成立的所有b组成的集合,由于$a\cdot 1=a$,所以,$1\in M$;假设$b\in M$,由于

$$ab'=ab+a=\underbrace{a+a+\cdots a}_{b\text{个}}+a=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{b'\text{个}}$$

所以,$b'\in M$,根据归纳公理,$M=N$,得证. □

从而,由于b个a的和的唯一存在性,推得积$a\cdot b$的唯一存在性.

定理 1.1.5(右分配律) 对于$\forall a,b,c\in N$,有

$$(a+b)c=ac+bc.$$

证明 取定a、b,设M是使上面等式成立的所有c组成的集合,

(1)当$c=1$时,$(a+b)\cdot 1=a+b=a\cdot 1+b\cdot 1$,所以,$1\in M$;

(2)假设$c\in M$,即$(a+b)c=ac+bc$,则由

$$\begin{aligned}(a+b)c'&=(a+b)c+(a+b)=(ac+bc)+(a+b)\\&=(ac+a)+(bc+b)=ac'+bc'.\end{aligned}$$

所以,$c'\in M$,根据归纳公理$M=N$,定理得证. □

读者不难证明下面定理:

定理 1.1.6(乘法交换律) 对于$\forall a,b\in N$,有

$$ab=ba.$$

推论(左分配律) 对于$\forall a,b\in N$,有

$$c(a+b)=ca+cb.$$

左分配律和右分配律统称为分配律.

定理 1.1.7(乘法结合律) 对于$\forall a,b,c\in N$,有

$$(ab)c=a(bc)$$

一般说来[①],设G是一个非空集合,如果存在一个法则"$\circ$",使G中任意两个元素都有G中唯一确定的元素与它们对应,就称在G中定义了一个代数运算,G对"$\circ$"构成代数系统,记为$(G,\circ)$.

在$(G,\circ)$中,如果$\circ$满足结合律,且存在单位元和逆元,则称$(G,\circ)$是一个群;如果还满足交换律,则称$(G,\circ)$是交换群或*Abel*群.在$(G,\circ)$中,如果满足结合律,但没有单位元或逆元,则称$(G,\circ)$是半群.

综合以上定理,自然数集N是具有两种独立的代数运算——

---

① 可参阅北京大学编《高等代数》第十章 §1.人民教育出版社.

加法与乘法的代数系统，并且$(N,+)$与$(N,\cdot)$都是可交换的半群.

1.1.3 自然数的顺序

顺序或称次序，在一个集合中给定一个顺序，就是在这个集合中规定一个规则，通过它以确定集合中的任两个不同元素间适合或不适合某种关系“$>$”. 由于自然数有运算，使我们想到用自然数的运算来描述这种要求.

下面我们在自然数集中引进顺序，先定义不等关系如下：

定义 1.1.4 对于$\forall a,b\in N$，若$\exists k\in N$，使$a=b+k$，则称a大于b，记作$a>b$或称b小于a，记作$b<a$.

定理 1.1.8（全序性） 对于$\forall a,b\in N$，下面三种关系有且仅有一种成立：

$$a>b,\quad a=b,\quad a<b.$$

证明 先证三个关系中至多有一个成立. 事实上，假设它们中至少有两个成立，若$a>b$与$a=b$同时成立，则有$k\in N$，使$a=a+k$，于是$a<a$，这是不可能的. 同理可证$a<b$与$a>b$，$a=b$与$a>b$均不能同时成立.

再证$a>b$，$a=b$，$a<b$中至少有一个成立. 取定a，设M是使三个关系至少有一个成立的所有b的集合.

(1)当$b=1$时，若$a=1$，则$a=b$成立；若$a\neq1$，则$\exists k\in N$使$a=k'=1+k=b+k$，这时$a>b$成立，因此$1\in M$.

(2)假设$b\in M$，即在$a<b$，$a=b$，$a>b$中至少有一个成立；

①当$a<b$时，$\exists l\in N$，使$b=a+l$，故$b'=(a+l)'=a+l'$，即$a<b'$成立.

②当$a=b$时$b'=a'=a+1$，这时$a<b'$成立；

③当$a>b$时，$\exists k\in N$，使$a=b+k$，若$k=1$，则$a=b+1=b'$；若$k\neq1$，则$\exists m\in N$使$k=m'$，故

$a=b+m'=b+m+1=b'+m$，这时$a>b'$成立.