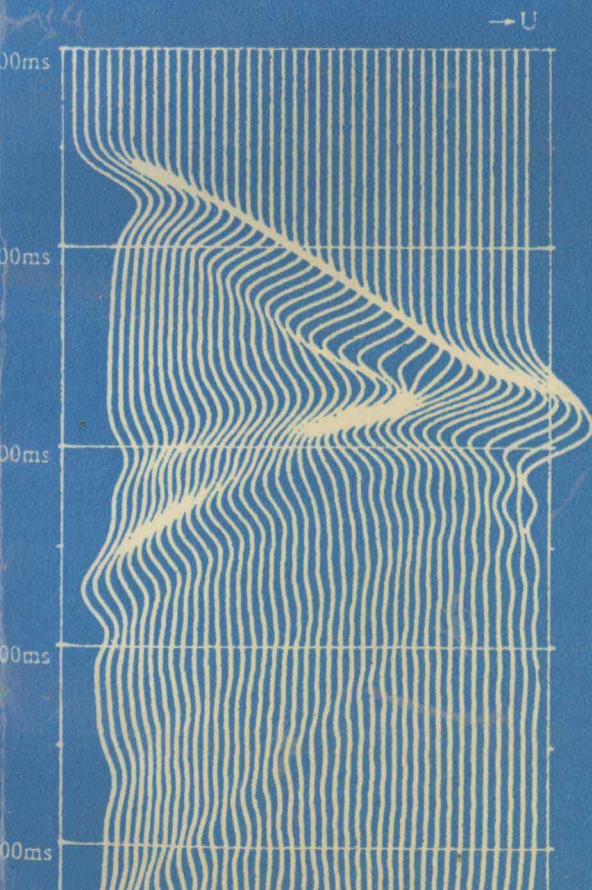


EM Wave Pseudo-impulse Imaging Method  
& Wave Theory

# 电磁波伪脉冲成象 与波动理论

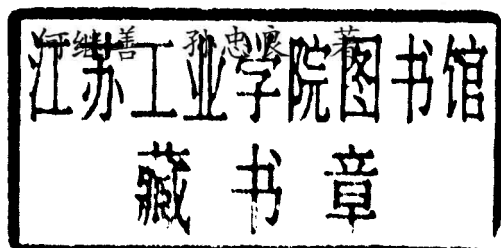
沈 飏  
何继善 著  
孙忠良



东南大学出版社

# 电磁波伪脉冲成象 与波动理论

沈 飏



东南大学出版社

# **(苏)新登字第 012 号**

## **内 容 简 介**

本书是介绍电磁波伪脉冲理论、电磁波场偏移成象及其拟地震波波动方程理论的一部专著。本书系统地叙述了电磁波伪脉冲理论及其正、反演方法，讨论了反演方法在实践中的应用。并以此理论为基础，重点研究了电磁波场偏移成象方法。同时，论述了电磁波拟地震波波动方程理论，在理论和正演两方面论证了电磁扩散场是波动场的叠加这一具有重要意义和价值的成果，从本质上揭示了电磁场的本质。这些理论和方法开拓了电磁波场处理和解释的新途径。书中还附录了有关实用程序。

本书是地球物理工程师、地震和电法数据处理人员、解释员及其数学、物理等有关专业师生一本有益的参考书。

责任编辑 巫之鹤

## **电磁波伪脉冲成象与波动理论**

沈 飏 何继善 孙忠良 著

东南大学出版社出版

地址：南京四牌楼 2 号 邮码：210018

江苏省新华书店经销 江浦第二印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 5.125 字数 133.2 千字

1993 年 4 月第 1 版 1993 年 4 月第 1 次印刷

印数：1-1000 册

ISBN 7-81023-762-4 / TN · 62

定价：7.00 元

(凡因印装质量问题，可直接向承印厂调换)

# 序 言

在地球科学中，地球物理学始终居于重要的先导地位。地球物理学，其中包括地球物理勘探，是利用物理学（力、声、光、电、磁、热和放射性学）的原理和方法来认识地球的结构、动力和演化，并进而为资源勘探、环境保护和灾害防治服务。尽管地球物理应该而且可能有极其广阔的活动天地，但是，迄今为止，它还没有全面地进入国民经济建设所需求的各种领域。这固然有客观条件的局限，而作为地球物理学家则有责任在其理论、仪器、方法上有所开拓和创新，解决各种实际的复杂问题，最大限度地满足国民经济建设的需求。

地球物理学的发展是不平衡的。由于地球资源的勘探与开发在很大程度上影响了人类社会的发展进程，以致地球物理勘探脱颖而出，独立成为地球物理学中具有工程应用性质的重要分支学科。以油气资源勘探为例，经过半个世纪的经验积累，已经认识到充分认识沉积盆地的形成演化历史的重要性，而只有应用重、磁、电、震等多种地球物理勘探方法与地质结合起来，才能够取得对其构造史、沉积史以及热历史的基本认识；在此基础上，查明沉积盆地中有利于油气聚集的圈闭，为钻探提供井位，则对于油气发现具有重要意义。在这个层次上，前一个时期几乎清一色地依赖于数学反射地震勘探，特别是近十几年来迅速发展起来的偏移成像技术，提供圈闭的位置及其几何形态；至于储集体的岩性和其中孔隙度、渗透率的详细描述，关系到油气田的开采，则有待于油储地球物理学的发展。由此可见，各种地球物理方法在不同的勘探阶段具有不同的作用。然而，不容忽视的是，随着新概念和新思路的出现，理论、方法、仪器设备以及具体技术都会

登上一个台阶，而地球物理方法解决地质问题的能力，也必将有明显的提高，从而应该对它们的作用进行重新评价。

反射地震勘探仪器在经历了光点记录、模拟磁带记录、数字磁带记录，特别是瞬时浮点数字磁带记录之后，使其动态范围和信噪比大幅度提高，再结合应用电子计算机对所采集资料的处理，其中包括偏移成像技术的应用，使它在油气勘探领域里获得巨大成就。所有这些，不仅影响到电法勘探仪器设备的更新换代，也促进了大地电磁测深理论研究的思考与借鉴。

其实，只要能够找出电磁波方程与地震（声）波波动方程之间的联系，就应可以将地震成像技术引进到大地电磁测深中来，虽然它们之间是有差异存在的。因此，近年来，国内外电磁波成像研究成了发展前沿的一个热门话题。

在这样的時候，《电磁波伪脉冲成像与波动理论》出版问世，是具有重要意义的。它系统而完整地提出电磁波成像理论，并努力使之实用化，从而为电法勘探开拓出新的应用前景，也必然会促进电法勘探的深化研究和发展。

《电磁波伪脉冲成像与波动理论》一书，用六章篇幅来建立其理论体系。

在评述了国内外电法勘探进展的基础上，根据 Levy 伪脉冲概念，阐明声波与电磁波在水平层状介质中传播特征的相似性，推导出垂直入射平面电磁波与层间反射与透射的传播函数，再提出反射电磁波伪脉冲响应的正演模拟方法，为电磁波成像技术奠定基础。

书中论述了伪脉冲响应的反演方法，注意到地球物理反演问题解答的不唯一性，指出改进的广义逆反演方法可以解决在求解条件不充分时出现的不适定性，进而将广义逆方法与 SIRT 方法联合跟踪迭代进行反演，求出参数矩阵，得出脉冲响应初值，以保证伪脉冲响应的可靠性、缩小解答的多解性，并评价其唯一性程序。

由于频率域电磁波方程与地震波方程类似，且非周期信号与周期信号存在着数学上的变换关系，所以，著者利用映射和变换技术，将扩散电磁场转换成满足声波方程的波场，建立起电磁波拟地震波波动方程，说明扩展场是波动场的叠加，进而证明电磁波与地震波在波动本质上的统一性。

这样，著者从伪脉冲理论、联合跟踪迭代及演和拟地震波波动方程三方面建立起电磁波成象技术系统并编制出计算机程序，将其应用于大地电磁测深的实际资料处理。此外，著者讨论了高频电磁波的波动理论，并着重说明了探地雷达的原理。

因此，《电磁波伪脉冲成象与波动理论》是一本值得向读者推荐的书，而且应该可以期望在此书问世之后，电法勘探能够得到迅速的发展，为国民经济建设作出贡献。

中国科学院学部委员，教授  
地球物理厅厅长



1993.5.3

# 前 言

近年来，在利用电磁波场的数据处理和解析中，已开始利用反射地震法中的反射理论和偏移技术来研究地下地电构造。这可以说是地球物理勘探特别是电法勘探技术的一大发展。由于电磁波偏移成像技术以及拟地震波波动理论才刚刚发展，因此，不论在理论上或是在实践上都未形成完整的系统。本书的目的就是要形成这方面较完整的理论体系，以作为在此方向上进一步研究的基础。

本书试图摒弃电磁感应场中束缚人们深刻理解电磁波场物理本质的某些观点，从运动学和波动理论两个角度分析和论述电磁波场在地下均匀和非均匀介质中的传播特征及物理本质。本书第二、三章系统地叙述了电磁波场伪脉冲理论及其正、反演方法，详细分析了电磁波伪脉冲理论在地球物理勘探中的理论意义和实用价值，从理论和实践两方面论证电磁波伪脉冲理论的正确性及其实用性。第四章是从电磁波伪脉冲理论出发，讨论了频率域和时间域电磁波伪脉冲偏移成像方法，同时研究了电磁波场的地震偏移算法。第五章从电磁场理论出发，通过适当的变换，推导了电磁波拟地震波波动方程，在理论上论证了扩散场是波动场的叠加，揭示了电磁波方程的本质，从而在本质上证明了电磁波与地震波的统一性和等效性。前几章讨论了低频电磁波在地下介质中传播特性，第六章讨论了高频电磁波（探地雷达）在地下介质中的运动学和动力学特性，为探地雷达的资料处理和解释奠定了基础。

在本书内容完成期间，得到了长春地质学院朴化荣教授的许多帮助和指导。在本书出版过程中，受到了东南大学毫米波国家

重点实验室老师们的支持。在此，作者对他们表示衷心的感谢。

最后，必须指出的是，研究电磁波偏移技术是一项具有重要意义也是十分艰难的工作。因此，无论是在理论上，还是在具体实践中，都还有许多问题尚待进一步研究和完善，加之作者水平有限，本书的错误和不完善之处在所难免，恳请读者批评指正。

沈 飏 何继善 孙忠良  
1993. 3. 28

# 目 录

|                                            |      |
|--------------------------------------------|------|
| 第一章 绪论 .....                               | (1)  |
| § 1.1 电磁波成象引言 .....                        | (1)  |
| § 1.2 理论方法概述 .....                         | (4)  |
| 第二章 电磁波伪脉冲理论与正演计算 .....                    | (6)  |
| § 2.1 电磁波在一维层状介质中的反射与透射 .....              | (6)  |
| § 2.2 直流电阻率法中场的反射与透射 .....                 | (11) |
| § 2.3 层状介质中的伪脉冲响应 .....                    | (14) |
| 2.3.1 平面电磁波在均匀层状中的伪脉冲响应 .....              | (14) |
| 2.3.2 直流电阻率法中的伪脉冲响应 .....                  | (19) |
| § 2.4 电磁波伪脉冲的正演理论 .....                    | (21) |
| 2.4.1 均匀层状介质中电磁波伪脉冲响应<br>的传播函数 .....       | (22) |
| 2.4.2 均匀层状介质伪脉冲响应正演公式 .....                | (25) |
| 2.4.3 非均匀层状介质中电磁波伪脉冲的传播函数<br>及反射集合矩阵 ..... | (28) |
| § 2.5 伪脉冲响应正演公式的数值计算 .....                 | (31) |
| 附录 A 点电源在层状介质中的电势分布 .....                  | (41) |
| 附录 B 电磁波场在非均匀层状介质中<br>分离场的传播 .....         | (44) |
| 附录 C 层状介质中伪脉冲响应正演模拟程序 .....                | (47) |
| 第三章 伪脉冲响应的反演方法及其应用 .....                   | (60) |
| § 3.1 电磁波场反演方法综述 .....                     | (60) |
| § 3.2 改进广义逆与 SIRT 联合反演方法 .....             | (63) |
| 3.2.1 伪脉冲响应的求解公式 .....                     | (63) |
| 3.2.2 改进广义逆反演 .....                        | (64) |
| 3.2.3 SIRT 方法 .....                        | (66) |

|                                         |              |
|-----------------------------------------|--------------|
| 3.2.4 改进广义逆与 SIRT 联合反演方法 .....          | (69)         |
| § 3.3 数值计算 .....                        | (70)         |
| 3.3.1 理论模型的反演实例 .....                   | (71)         |
| 3.3.2 实际资料反演 .....                      | (86)         |
| 附录 D 改进广义逆反演方法的基础程序 .....               | (93)         |
| 附录 E SIRT 算法的基础程序 .....                 | (110)        |
| <b>第四章 电磁波伪脉冲偏移成象 .....</b>             | <b>(113)</b> |
| § 4.1 频率域伪脉冲偏移成象 .....                  | (113)        |
| 4.1.1 层状介质的电磁波成象条件 .....                | (113)        |
| 4.1.2 一维层状介质偏移成象方法 .....                | (115)        |
| 4.1.3 二维介质偏移成象方法 .....                  | (117)        |
| § 4.2 时间域电磁波偏移成象 .....                  | (120)        |
| § 4.3 电磁波场的等效地震偏移方法 .....               | (122)        |
| 4.3.1 一维波场延拓 .....                      | (122)        |
| 4.3.2 二维波场延拓 .....                      | (123)        |
| 4.3.3 边界条件(二维) .....                    | (125)        |
| 4.3.4 二维电阻率成象 .....                     | (126)        |
| 附录 F 电磁波与地震波在频率域内<br>数学方程的等效性 .....     | (128)        |
| <b>第五章 电磁波拟地震波波动方程理论及正演模拟 .....</b>     | <b>(130)</b> |
| § 5.1 电磁波与地震波的比较 .....                  | (130)        |
| § 5.2 电磁波拟地震波波动方程理论 .....               | (132)        |
| § 5.3 二维导电介质中广义映射电磁波波动方程<br>的正演模拟 ..... | (136)        |
| <b>第六章 高频电磁波的波动理论 .....</b>             | <b>(142)</b> |
| § 6.1 高频电磁波应用概述 .....                   | (142)        |
| § 6.2 探地雷达波的波动理论 .....                  | (144)        |
| <b>参考文献 .....</b>                       | <b>(150)</b> |

# 第一章 绪 论

在利用电阻率法进行地球物理勘查时，一般都采用的是垂直勘探和水平勘探两种方法。其中前者假定地下构造为水平层状构造，测量测点下垂直方向电阻率的变化；后者主要测量构造和矿床等原因造成水平方向电阻率的变化。但不论哪种方法，对其测得的数据进行解释大多都采用勾画数据等值线图或断面图。近年来，国外已开始利用反射地震法中的反射理论和成象技术进行电法数据处理，特别对 MT（大地电磁测深法）数据的处理和成象研究，这不仅为电法勘探的处理技术提供了新的途径，而且开拓了电法勘探新的应用前景。

## § 1.1 电磁波成象引言

利用测得的电阻率数据分析地下电阻率分布时，过去常采用常规的反演方法，如最小二乘法，图解释法，量板选择法等。这些方法本质上是采用拟合的方法来实现的。有的反演方法（如 Gauss, Marquart 等）在实际应用中常常要用参数拟合的方法来完成反演工作，而且这些方法的分辨率较低<sup>[26]</sup>，不能评价反演的质量。所以，这不可避免地带来众多复杂的解释问题（如解的非唯一性及精确度）。近年来，国外已开始使用反射地震法中的理论和成象技术进行电法（特别是 MT）数据的处理和解析。Seunghce Lee (1987)<sup>[19]</sup>采用相区成象，着眼于电磁场与地震波（声波）波动方程的类似性，利用差分法的二维偏移进行电磁资料的成象。该方法中是将观测数据下延，以构制产生这些数据的

地下二维电阻率介质模型。该方法中的主要假设和现代地震资料处理中的假设基本类似,即:数据波场中所含的电磁反射的细节可与背景电导率(波场在背景电导率分布中进行下延)分布相分离,且无多次反射。该文中,将电磁波波动方程与声波波动方程类比,运用适当的近似算法,取等效方程中相同的主要项,并将初值问题化为边界问题,则电磁资料的成象可用由地震资料偏移技术导出的任何方法去完成。Lee 具体采用的是 Claerbout 单程有限差分波动方程偏移技术。实例表明:电阻率成象的想法是切实可行的,而且可直接模仿地震偏移技术。可是, Lee 提出的相区成象方法主要存在以下的不足之处: (1) 需要假设电导率局部连续,即介质周围电阻率变化足够小。在实际地下介质中,这一假设是合理的,但不总是如此; (2) 需要应用非常规的数据集形式,需要有很多频率点的观测值,这就限制了应用范围。S. Levy 等(1988)<sup>[20]</sup>提出了对 MT 法数据使用求水平层状介质的伪脉冲的响应方法,构建地下地电断面相应的反射时间剖面。该方法完全类似于常规的反射地震法中的反射理论。该文还特意说明了此成象方法对二维地电构造的适用性。这方法无疑为研究开发电磁波成象技术提供了新的方法,特别是伪脉冲概念的引入,把反射地震法中各种理论变成了电磁波成象技术中具有适用意义的可能性,开拓了电磁波解析的新途径,对电磁波数据处理和解释具有重要的意义。可是, Levy 等人提出的方法不论是在理论上还是实际上还有许多值得研究的问题。例如,如何考虑 MT 法中,反射函数计算方法的影响,如何消除其影响,提高解析的分辨率,以及如何评价解析分辨率等。另外,该文所提出的线性规划反演方法能否很好地消除电法勘探中的解的非唯一性问题,还值得进一步研究。James(1989)<sup>[22]</sup>提出了时域电磁法的成象技术,它通过对瞬变电磁数据的处理进行准层状导电结构的成象。James 认为:在每一个延迟时间,阶跃响应作为几何参数(发射机与接收机间的位置)的函数变化可以被变换成为一个等价基准

深度  $h$ 。James 通过实例发现慢度( $dt/dh$ )除以磁导率几乎正比于地表面至基准深度  $h$  所测的累积导纳。因此,他首先把每一延迟时间的数据变换成表观深度即估计那个时间电流扩散的平均深度,然后由表观深度函数推出一个合理的电导率函数,最后得到电导率与深度相关关系的剖面。必须指出的是,James 提出的此方法由于只是在实际中得到的某种规律,更确切地说此方法只能是一种经验,缺乏足够的理论依据,而且需经过大量的处理与选择才能选择较合理的电导率函数,这正是此方法最致命的缺点。

前苏联地球物理学者 В.В. Тикмасев 提出了空间叠加的电磁场测深成象方法。该方法采用类似地震勘探的共深度点叠加系统,形成所谓的干涉系统。在系统工作过程中,不仅利用多次覆盖实现任意点处的叠加,而且可采用不同极距实现多次覆盖。通过不同叠加系统的选择可以达到目标地层的最佳分层或局部不均匀性的最佳压制。该方法中更可取的是将空间叠加与时间叠加有机地结合,使处理的理论结果成为类似地震偏移成象的时间剖面。作为该处理算法的基础是将被测信号转换为电导率曲线,然后转换为视电阻率的微分曲线或视电导率微分曲线。在其中利用基于双曲函数  $\text{th}\rho$  或  $\text{th}\sigma$  的泛函变换途径的动态范围的压缩平衡手段。然后选择  $\text{th}\rho$  曲线或  $\text{th}\sigma$  曲线的条件零,例如选择其平均值。这样,使测量结果接近于地震信号的成象剖面。但必须注意的是,由于在此处理方法中采用了微分转换,所以,每一次微分变换将会使误差增加。当测量结果中带有一定误差时,此方法的应用值得商榷。当然,在电磁测深过程中为了达到高精度测量,行之有效的方法就是配合空间的叠加方法。佐佐木 裕(1989)<sup>[29]</sup>和村上 裕(1989)<sup>[28]</sup>从理论上进一步探讨了伪脉冲理论的正确性,并基于反射地震学中的反射理论和偏移成象理论,讨论了电磁波中多次反射的影响及相区偏移方法的应用。可以说,他们的工作只是 Lcc, Levy 等工作的重复和补充,并没有提出新的思路,更没有在实际资料的处理方法上提出新的方法。

电磁波拟地震法的处理和解释在国内还是刚开始，且都基于理论模型计算<sup>[30]</sup>。它一方面缺乏新理论指导，另一方面在具体实际资料处理和解释中缺乏生命力。所以，深入研究电磁波成象理论和实际应用很有必要。

综上所述，近年来在电法勘探的数据处理和解析中，采用了与以往完全不同的方法来研究地下构造的成象，并取得了一定的成果。但是，不论是理论上还是实践上都未形成完整的系统，特别是要达到实用化，还必须进一步加强开发研究。本书的目的就是要初步形成这方面的较完整体系，以作为在此方向上进一步研究的基础。

## § 1.2 理论方法概述

在这一节中，我们将突出介绍有关基本理论在本书的应用。

我们知道，电磁场所满足的方程是经典的麦克斯威尔方程。如何在经典理论基础上，获得较新的电磁波成象理论，这成为地球物理学界关注的焦点。本书所要介绍的两种理论——伪脉冲理论和拟地震波波动方程理论，正是较新颖的实用理论，同时也是本书着重研究的电磁波成象的基础理论。

伪脉冲的理论基础实际上与早期的镜像法密切相关。Kunetz(1976)<sup>[16]</sup>基于镜像法提出了 MT 的正问题和反问题。但在此理论中，镜像始终是计算上的概念。伪脉冲理论的引入将镜像用于地下波的反射，并采用反射地震学中的某些概念，确定了电磁波在层中反射与透射规律。本书就是基于电磁波与地震波（声波）在水平层状介质中传播特征在数学形式上的相似性<sup>[21,24]</sup>，推导了垂直入射的平面电磁波在层间反射与透射传播函数，提出一种新的反射电磁波正演模拟方法。该方法的提出与实现，不仅证实了电磁波脉冲响应的存在，完善和发展了电磁波伪脉冲理论，而且使反射地震学的一些处理方法应用于电磁法数据处理成为

可能，开拓了电磁波处理 and 解释的新途径，并为新的反演方法——恢复和构建伪脉冲响应时间剖面奠定了应用基础。同时，可以利用伪脉冲理论进行频率域和时间域偏移成象的理论研究，从而奠定了电磁波偏移成象的理论基础。

过去电磁波偏移常在频域中进行<sup>[19]</sup>，这主要借助于频域电磁波方程与频域地震波波动方程的类似性。著者基于非周期信号与周期信号数学上的变换关系，从电磁场理论角度，通过一定的变换，推导了电磁波拟地震波波动方程，亦即广义映射时域电磁波波动方程和广义映射准时域电磁波波动方程，在理论上说明了扩散场是波动场的迭加，从而揭示了电磁波方程的实质。最后还采用有限元法正演模拟了广义映射时域电磁波波动方程的电磁波特征，在本质上证明了电磁波与地震波的统一性和等效性。

以上基本理论构成了平面电磁波成象方法较为完整的系统。电磁波伪脉冲响应方法的基本理论和正反演计算方法，电磁波方程与地震波波动方程统一性的论证，为在电法勘探的解释中应用地震勘探方法或进行联合反演提供了可靠的理论基础，并通过理论模型、野外数据的实际计算证明了所提出的新反演方法的可行性。因此，上述基础理论是本书各种应用的基础和核心。

## 第二章 电磁波伪脉冲理论与正演计算

在这一章，我们首先推导垂直入射平面电磁波在层状介质中的反射系数与透射系数以及波场的递推公式，并讨论了它们与伪脉冲的关系，与反射地震学中脉冲响应作了对比。然后，以伪脉冲理论为依据，推出了平面电磁波在均匀和非均匀层状介质中传播的波场层矩阵。由此，提出了一种反射法电磁波场的正演模拟方法。利用垂直入射的电磁平面波在均匀水平层间的反射和透射来合成电磁平面波的反射时间剖面。通过正演实例计算不仅证实了伪脉冲理论的正确性，而且说明了反射理论在电法勘探中的价值。

### § 2.1 电磁波在一维层状介质中的反射与透射

垂直入射平面电磁波与声波在层状介质中传播时数学方程的相似性已由许多人所证实<sup>[16,24,26]</sup>。但是，他们单从数学形式上作了详尽的推导，并没有把地震波中的一些处理和解释方法有机地与电磁波场的应用结合起来，更没有深入地探讨电磁波成象的可能性。因此，这一部分我们立足于平面电磁波与地震波问题的相似性，从基本原理出发，推导垂直入射平面电磁波在水平层状介质中的反射系数公式，并求出电磁波波场的递推公式。由此，为后面求得伪脉冲响应序列，获得电磁响应时间剖面奠定理论基

础。

考虑一维层状介质。设第  $j$  层的电导率为  $\sigma_j$ ，选择笛卡儿坐标系， $Z$  轴垂直向下。对电磁波的极化方向，我们选择： $X$  方向表示水平电场方向， $Y$  方向指示水平磁场方向。

假设谐波场为  $e^{i\omega t}$ ，忽略位移电流，则麦克斯威尔方程可写成如下形式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_x}{dz} &= -i\omega\mu_0 H_y \\ \frac{dH_y}{dz} &= -\sigma E_x \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

我们能把方程式 (2.1.1) 变成  $E$  或  $H$  的二阶微分方程。即

$$\frac{d^2 E_j}{dz^2} - i\omega\mu_0 \sigma_j E_j = 0 \quad (2.1.2)$$

由微分方程 (2.1.2)，我们可得到第  $j$  层均匀介质中电场的分布为：

$$E_j(z, \omega) = U_j e^{-K_j(z_{j-1} - z)} + D_j e^{+K_j(z_{j-1} - z)} \quad (2.1.3)$$

式中  $K_j = \sqrt{i\omega\mu_0 \sigma_j} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0 \sigma_j}{2}} + i\sqrt{\frac{\omega\mu_0 \sigma_j}{2}}$

$U_j$  和  $D_j$  分别为在第  $j$  层顶部上行波与下行波的幅值。从式 (2.1.3) 中很清楚地看到， $E$  的解是上行平面波和下行平面波之和。如图 2.1.1 所示我们以矩阵形式将方程 (2.1.1) 写成：

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\mu_0 \omega \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$$

由  $\frac{dE_x}{dz} = -i\omega\mu_0 H_y$ ，得：

$$H_j(z, \omega) = -Y_j U_j e^{-K_j(z_{j-1} - z)} + Y_j D_j e^{+K_j(z_{j-1} - z)}$$