李康弟 黄建雄 主编

MATHS

高等数学考研与竞赛教程

Gaodeng Shuxue Kaoyan yu Jingsai Jiaocheng

科学出版社

高等数学考研与竞赛教程

李康弟　黄建雄　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容由函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分、曲面积分、无穷级数和常微分方程组成. 编者针对高等数学课程中重点与难点给出大量的例题, 阐述基本解题思路, 并对一些重要概念与解题技巧给出评注, 指引读者用正确的方法和思路解题, 力求能使读者加深对基本概念的理解和更多的数学综合方法与解题技巧的掌握.

本书例题和习题中收录了部分研究生入学考试和国内外高等数学竞赛试题. 本书不仅能提高大学生和数学爱好者的高等数学解题能力, 还能提高他们的数学素质. 本书可作为高等院校教师高等数学配套教学参考书或高等数学提高班讲义, 还可作为报考硕士研究生和参加数学竞赛人员的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学考研与竞赛教程 / 李康弟, 黄建雄主编. —北京: 科学出版社, 2012.3

ISBN 978-7-03-033362-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… ②黄… Ⅲ. ①高等数学 – 高等学校 – 教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 006815 号

责任编辑: 谭宏宇 / 责任校对: 宋玲玲
责任印制: 刘 学 / 封面设计: 殷 靓

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

上海欧阳印刷厂有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*

2012 年 3 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2012 年 3 月第一次印刷 印张: 18 3/4
字数: 433 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

高等数学是高等院校的一门重要基础课，同时也是许多专业的硕士研究生入学考试的基础课科目．为了培养人才、服务教学，增加大学生学习数学的兴趣，从2009年起，开始举办了全国高等数学竞赛．因此，提高大学生数学运算能力、空间想象能力和抽象思维能力是高等数学课程教学中迫切需要解决的问题．

本书针对高等数学课程教学中学生难以理解的问题及难以掌握的方法，结合教学中的经验和体会，给出了大量例题，并对重要概念与解题技巧予以评注．这些例题具有较强的综合性，能适合报考研究生和参加数学竞赛的需要．每章的练习题与例题内容相匹配，目的是使读者加深对问题的理解及对解题技巧的掌握，避免一些常见错误，建议读者对练习题采取先做后看的原则，这样有利于分析自己的知识薄弱点，提高自己的数学能力．

本书在编排上不同于教材，每章第一部分给出了高等数学课程的基本要求，符合现行的研究生入学（数学一）考试的要求．在内容上将部分高等数学教材中不同章节的、但在解题方法上类似的问题作了统一的处理，并设计了一些专题对重要的问题进行了较为深入、细致的讨论，力求提高读者分析问题的能力，使读者更好地掌握解题技巧．本书适合作为高等数学课程的教学参考书，也可作为高等数学提高班的讲义．

例题和习题中收录了研究生入学考试、国内外高等数学竞赛的部分试题，希望这些内容能对有志于报考研究生和参加数学竞赛的读者有所帮助，也希望能提高他们的数学素质和高等数学解题能力．

本书每章由基本要求、例题解析、练习题、答案与提示四部分组成．

全书初稿由上海电力学院高等数学教研室教师李康弟、黄建雄、唐永建、蒋书法、蔡文康、钱道翠、张申媛等编写．全书由李康弟、黄建雄统稿．

本书的编写得到上海市第四期本科教育高地建设项目与上海市科学技术委员会应用能力建设项目的资助，在此致以谢意．

由于时间仓促，书中难免有疏漏和不足之处，期盼读者批评指正．

编　者

2011年9月

目　　录

第1章　函数与极限

1.1　基 本 要 求

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形.

(5) 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

(6) 掌握极限的性质及四则运算法则.

(7) 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(8) 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

(9) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

(10) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

1.2　例 题 解 析

1.2.1　函数

例 1.1　证明：任何整系数多项式 $p(x)$ 都不可能满足等式：$p(7)=5$，$p(15)=9$.

分析：利用因式分解，依据整除性质.

证明　假设存在多项式 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ (其中 a_i 为整数，$0\leqslant i\leqslant n$)满足 $p(7)=5$，$p(15)=9$，则

$$p(7)=a_0 7^n+a_1 7^{n-1}+\cdots+a_{n-1}7+a_n=5, \tag{1.1}$$

$$p(15)=a_0 15^n+a_1 15^{n-1}+\cdots+a_{n-1}15+a_n=9, \tag{1.2}$$

将式(1.2)减去式(1.1)，可得

$$a_0(15^n-7^n)+a_1(15^{n-1}-7^{n-1})+\cdots+a_{n-1}(15-7)=4.$$

通过因式分解，可知左边能被 8 整除，而右边却不可能被 8 整除，矛盾. 因此不存在任何整系数多项式满足题设条件.

例 1.2 设 $f(x)=|x+1|$，$g(x)=(x-1)^2$，试写出函数 $\max\{f(x),g(x)\}$ 的表达式.

解 由 $\max\{a,b\}=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{|a-b|}{2}$，知

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{|x+1|+(x-1)^2}{2}+\frac{\left||x+1|-(x-1)^2\right|}{2}.$$

当 $|x+1|\geqslant(x-1)^2$，且 $x+1\geqslant0$ 时，得 $0\leqslant x\leqslant3$；当 $|x+1|\geqslant(x-1)^2$，且 $x+1<0$ 时，无解. 因此，

当 $0\leqslant x\leqslant3$ 时，$\max\{f(x),g(x)\}=x+1$.

当 $x\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ 时，$\max\{f(x),g(x)\}=(x-1)^2$.

例 1.3 已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$，求 $f(x+1)$.

分析：通过变量代换建立方程组解出 $f(x)$.

解 令 $u=\dfrac{1}{x}$，得 $2f\left(\dfrac{1}{u}\right)+f(u)=u$，则 $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=x$，从而

$$\begin{cases}2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x},\\ f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x.\end{cases}$$

解方程得 $f(x)=\dfrac{2}{3x}-\dfrac{x}{3}$，因此 $f(x+1)=\dfrac{2}{3x+3}-\dfrac{x+1}{3}$.

例 1.4 设函数 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，当 $y=1$ 时，$z=x$，求 $f(x)$.

分析：通过变量代换求出 $f(x)$.

解 以 $y=1$ 代入函数 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，得 $x=1+f(\sqrt{x}-1)$，因此 $f(\sqrt{x}-1)=x-1$. 令 $t=\sqrt{x}-1$，则 $x=t(t+2)+1$，故 $f(t)=t(t+2)$，即 $f(x)=x(x+2)$.

例 1.5 若 $f(x)=a+bx$，$f_n(x)=f(f(f\cdots f(f(x))))$（$n$ 次复合），求 $f_n(x)$.

分析：通过前几个函数的复合推导，得出一般规律，然后用数学归纳法证明.

解 因为 $f_2(x)=f(f(x))=f(a+bf(x))=a+b(a+bx)=a(1+b)+b^2x$，则

$$f_3(x)=f(f(f(x)))=a+bf_2(x)=a+b[a(b+1)+b^2x]=a(1+b+b^2)+b^3x.$$

设 $f_n(x)=a(1+b+\cdots+b^{n-1})+b^nx$，则

$$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))=a+b[a(1+\cdots+b^{n-1})+b^nx]=a(1+b+\cdots+b^n)+b^{n+1}x.$$

故由数学归纳法，得 $f_n(x)=a(1+b+\cdots+b^{n-1})+b^nx$.

例 1.6 设 $(3x-1)^6=a_0x^6+a_1x^5+\cdots+a_5x+a_6$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_5$ 的值.

分析：根据二项式定理展开，来研究系数之间的关系.

解　记 $f(x)=(3x-1)^6=a_0x^6+a_1x^5+\cdots+a_5x+a_6$，则

$$f(0)=a_6=(3x-1)^6\big|_{x=0}=1,\quad f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6=(3x-1)^6\big|_{x=1}=64.$$

将 $(3x-1)^6$ 用二项式定理展开可知最高项为 3^6x^6，因此，$a_0=3^6=729$，从而

$$a_1+a_2+\cdots+a_5=64-a_0-a_6=64-1-729=-666\,.$$

例 1.7　证明：对任意实数 a,b，有 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

分析：构造函数，利用单调性证明，此结果可由实数推广到复数或向量.

证明　设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，则当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 单调递增. 由于 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，故

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

例 1.8　已知 $x+\mathrm{e}^x=y+\mathrm{e}^y$，问 $\sin x=\sin y$ 是否成立？

分析：利用函数严格单调性.

解　令 $f(x)=x+\mathrm{e}^x$，则 $f'(x)=1+\mathrm{e}^x>0$，即 $f(x)$ 严格单调递增. 故由已知条件，知 $x=y$，因此 $\sin x=\sin y$.

例 1.9　设 $f(x)=\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\dfrac{\sin 7x}{7}$，证明: $f'\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=\dfrac{1}{2}$.

证明　因为 $f'(x)=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x$，得

$$\begin{aligned}f'\left(\frac{\pi}{9}\right)&=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}\\&=\frac{1}{2}+2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}\\&=\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 1.10　求函数 $f(x)=|x|+|x-1|+|x-3|$ 的最小值.

分析：将函数写成分段函数，利用单调性求最小值.

解　当 $x<0$ 时，$f(x)=4-3x$，$f(x)>4$；

当 $x>3$ 时，$f(x)=3x-4$，$f(x)>5$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)=4-x>3$；

当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=2+x\geqslant 3$.

因此，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取到最小值 3.

例 1.11 已知 t 为常数，且 $\max\limits_{x\in[0,2\pi]}|\cos x+x-t|=\pi$，求 t 的值.

解 令 $f(x)=\cos x+x-t$，则 $f'(x)=1-\sin x\geqslant 0$，故 $f(x)$ 单调递增. 因此，

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|=\max\{|f(0)|,|f(2\pi)|\}=\max\{|1-t|,|2\pi+1-t|\},$$

所以，当 $t>\pi+1$ 时，$\max\limits_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|=t-1$；当 $t\leqslant\pi+1$ 时，$\max\limits_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|=2\pi+1-t$. 又因为

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|\cos x+x-t|=\pi,$$

所以 $t=\pi+1$，如图 1.1 所示.

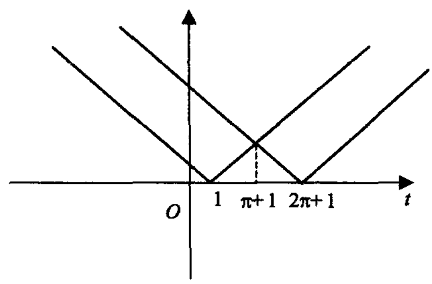

图 1.1

例 1.12 求函数 $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+yz}{x^2+y^2+z^2}$ 在区域 $D=\left\{(x,y,z)\,|\,1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4\right\}$ 上的最大值和最小值.

分析：根据函数的具体特点，简化函数的考虑区域.

解 根据函数 $f(x,y,z)$ 的特征，若它在区域 D 取到最大值和最小值，必定可以在 $D'=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1\right\}$ 取到最大值和最小值.

例如，若最大值点 (x_0,y_0,z_0) 在 $x^2+y^2+z^2=4$ 上取到，则 $f(x,y,z)$ 也在 $\left(\dfrac{x_0}{2},\dfrac{y_0}{2},\dfrac{z_0}{2}\right)$ 取到最大值；若在 $D''=\{(x,y,z)\,|\,1<x^2+y^2+z^2<4\}$ 上取到，则 $f(x,y,z)$ 也在点 $\left(\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\dfrac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\right)$ 上取到，而新产生的点必在区域

$$D'=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1\right\}$$

上.

因此，只要考虑 $g(x,y,z)=x^2+yz$ 在 $D'=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1\right\}$ 上的最大值和最小值即可.

因为 $x^2+yz\leqslant x^2+\dfrac{y^2+z^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\leqslant 1$，而 $g(1,0,0)=1$，即最大值为 1. 又因为

$$x^2+yz\geqslant x^2-\frac{y^2+z^2}{2}=\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}\geqslant -\frac{1}{2},$$

而 $g\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，即最小值为 $-\dfrac{1}{2}$.

例 1.13　证明下列函数在指定区域内有界：

(1) $y=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$，$x\in(1,+\infty)$；

(2) $y=\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

分析：利用初等方法，根据函数的特点，估计函数的上下界.

证明　(1) 因为

$$y=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{2}+1},\quad x>1,$$

所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$0<y<\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$，即有界.

(2) 因为 $y=\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\dfrac{3^x+3^{-x}-2\cdot 3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=1-\dfrac{2\cdot 3^{-x}}{3^x+3^{-x}}<1$；又

$$y=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{-3^x-3^{-x}+2\cdot 3^x}{3^x+3^{-x}}=-1+\frac{2\cdot 3^x}{3^x+3^{-x}}>-1,$$

所以当 $x\in(-\infty,+\infty)$，$-1<y<1$，即有界.

例 1.14　证明下列函数在指定区域内无界:

(1) $y=2^{-x}\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{\pi}{x}$，在 $x=0$ 的任一邻域.

分析：判断无界性利用子列或某函数序列趋向于无穷大来判定.

解　(1) 取 $x_n=-2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-x_n}\sin x_n=\lim\limits_{n\to\infty}2^{2n\pi-\frac{\pi}{2}}=+\infty$，所以函数无上界，即知函数无界. 实际上，再取 $x_n=-2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-x_n}\sin x_n=-\lim\limits_{n\to\infty}2^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}=-\infty$，所以函数无下界.

(2) 对任意 $\delta>0$ 和 $M>0$，取 $x=0$ 的邻域 $(-\delta,\delta)$，并取充分大正数 n，满足 $\dfrac{1}{n}<\delta$ 和

$n > M$，则有 $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| = n > M$，故 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内无界.

例 1.15 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界？

(A) $(-1, 0)$； (B) $(0, 1)$； (C) $(1, 2)$； (D) $(2, 3)$.

分析：如 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

解 当 $x\neq 0,1,2$ 时，$f(x)$ 连续，而

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\frac{\sin 3}{18},\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\sin 2}{4},\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\sin 2}{4},\quad \lim_{x\to 1} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 2} f(x)=\infty,$$

所以，函数 $f(x)$ 在$(-1 , 0)$内有界，故选(A).

例 1.16 若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(a-x)=f(a+x)$，$f(b-x)=f(b+x)$，这里 a,b 为常数且 $a<b$，证明 $f(x)$是以$T=2(b-a)$ 为周期的周期函数.

分析：根据函数的定义，利用周期定义直接证明.

证明 因为

$$\begin{aligned} f(x+2(b-a)) &= f(b+(x+b-2a)) = f(b-(x+b-2a)) \\ &= f(2a-x) = f(a+(a-x)) \\ &= f(a-(a-x)) = f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x)$是以$T=2(b-a)$ 为周期的周期函数.

例 1.17 举例说明周期函数不一定有最小正周期.

解 定义函数 $f(x)$ 如下：当 x 为有理数时 $f(x)=1$；当 x 为无理数时 $f(x)=0$. 利用周期函数的定义，易知任何有理数都是 $f(x)$ 的周期，而有理数无最小正有理数，因此周期函数不一定有最小正周期.

例 1.18 判定 $f(x)=x^2\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}+\operatorname{sgn}(\sin ax)$ 的奇偶性，其中 $a\in(-\infty,+\infty)$.

分析：判别奇偶性一般利用定义或利用奇偶函数经四则运算后的奇偶性来判别.

解 因为 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 所以 $\operatorname{sgn}(-x)=-\operatorname{sgn}(x)$，即符号函数为奇函数. 又

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2\cdot\frac{a^{-x}-a^x}{a^{-x}+a^x}+\operatorname{sgn}(\sin(-ax)) \\ &= -x^2\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}-\operatorname{sgn}(\sin ax) \\ &= -\left[x^2\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}+\operatorname{sgn}(\sin ax)\right] = -f(x), \end{aligned}$$

所以，$f(x)=x^2\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}+\operatorname{sgn}(\sin ax)$ 为奇函数.

例 1.19　已知 $f(u)=\begin{cases}u^3, & u\geqslant 1,\\ u^2, & u<1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ 2x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

分析：求分段函数的复合函数要紧扣中间变量(题中 $u=g(x)$)的取值来进行. 通常采用如下步骤求解：先将 $f(u)$ 的表达式及区间段中的 u 改成 $g(x)$，再解关于 $g(x)$ 的不等式确定 x 的取值范围，这样便可得 $f(g(x))$ 的表达式.

解　因为当 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant \dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)\geqslant 1$，所以

当 $x\leqslant -1$ 时，$f(g(x))=g^3(x)=x^6$；当 $x\geqslant \dfrac{1}{2}$ 时，$f(g(x))=g^3(x)=(2x)^3=8x^3$；

又因为当 $-1<x<0$ 或 $0\leqslant x<\dfrac{1}{2}$，$g(x)<1$，所以

当 $-1<x<0$ 时，$f(g(x))=g^2(x)=x^4$；当 $0\leqslant x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f(g(x))=g^2(x)=4x^2$.

综上所述，

$$f(g(x))=\begin{cases}8x^3, & x\geqslant \dfrac{1}{2},\\ 4x^2, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ x^4, & -1<x<0,\\ x^6, & x\leqslant -1.\end{cases}$$

例 1.20　已知 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -2<x<0,\\ 2^x, & 0\leqslant x<1,\\ x^2+1, & 1\leqslant x<2,\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

分析：求分段函数的反函数要注意 $f(x)$ 的值域变化范围也即 $f^{-1}(x)$ 的定义域范围.

解　由 $y=2x+1(-2<x<0)$，得 $x=\dfrac{y-1}{2}(-3<y<1)$；

由 $y=2^x$ $(0\leqslant x<1)$，得 $x=\log_2 y$ $(1\leqslant y<2)$；

由 $y=x^2+1$ $(1\leqslant x<2)$，得 $x=\sqrt{y-1}$ $(2\leqslant y<5)$.

综上所述，

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}, & -3<x<1,\\ \log_2 x, & 1\leqslant x<2,\\ \sqrt{x-1}, & 2\leqslant x<5.\end{cases}$$

例 1.21 确定函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$ 的定义域.

分析：利用级数收敛条件，确定变量的变化范围.

解 对给定的 $x>0$，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$ 是交错级数，且 $\frac{1}{n^x}$ 单调递减趋于 0，由 Leibniz 判别法知级数收敛. 另一方面，对给定的 $x\leqslant 0$，$(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$ 不趋向于 0，违反了级数收敛的必要条件，因此级数发散，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

例 1.22 设函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x^n)}{\sqrt{n}}$，求 $f(x)$ 的定义域.

分析：求函数 $f(x)$ 的定义域，即求使极限存在的 x 取值范围.

解 因为当 $x>1$ 时，$\ln(\mathrm{e}^x+x^n)>\ln x^n=n\ln x$，故极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x^n)}{\sqrt{n}}$ 不存在，即 $f(x)$ 无定义；

当 $-1<x\leqslant 1$ 时，$\ln(\mathrm{e}^x+x^n)$ 是有界函数，故 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x^n)}{\sqrt{n}}=0$，即 $f(x)$ 有定义；

当 $x\leqslant -1$，且 n 取奇数充分大时，$\mathrm{e}^x+x^n<0$，对数函数 $\ln(\mathrm{e}^x+x^n)$ 无定义，则函数 $f(x)$ 无定义.

因此，$f(x)$ 的定义域为 $-1<x\leqslant 1$.

例 1.23 对下面给定函数 $f(x)$，分别说明是否存在一个区间 $[a,b](a>0)$，使集合 $\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}=\{x\,|\,x\in[a,b]\}$，并说明理由.

(1) $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$；

(2) $f(x)=\frac{1}{x}$；

(3) $f(x)=1-\frac{1}{x}$.

解 (1) 因为 $f(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增，因此要求存在区间 $[a,b](a>0)$，只需方程 $f(x)=x$ 有两个不同的正根. 解方程 $\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}=x$，可得 $x_1=1$，$x_2=2$，因此所求区间为 $[a,b]=[1,2]$.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $x>0$ 时单调递减，因此要求存在区间 $[a,b](a>0)$，只需取 $b=\frac{1}{a}$，因此若 $0<a<1$，则区间为 $\left[a,\frac{1}{a}\right]$；若 $a>1$，则取区间 $\left[a,\frac{1}{a}\right]$.

(3) 因为 $f(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增，因此要求存在区间 $[a,b](a>0)$，只需方程 $f(x)=x$ 有两个不同的正根. 但当 $f(x)=1-\frac{1}{x}$ 时，方程 $1-\frac{1}{x}=x$，即方程 $x^2-x+1=0$ 不

存在实根, 因此不存在满足条件的区间.

例 1.24　求使得下列不等式对所有的自然数 n 都成立的最小数 β 和最大数 α ,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}.$$

分析：对不等式取对数进行化简, 将参数 α , β 与自然数 n 分离.

解　对不等式的右端, 等价于求最小的 β, 使得 $\beta \geqslant \dfrac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}-n$; 对不等式的左端, 等价于求最大 α 使得 $\alpha \leqslant \dfrac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}-n$.

令 $f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}-x$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{x(1+x)\cdot\ln^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}-1$. 现在证明对所有 $y>0$, 有

$$\ln(1+y)<\frac{y}{\sqrt{1+y}}.$$

令 $F(y)=\ln(1+y)-\dfrac{y}{\sqrt{1+y}}$, 则

$$F'(y)=\frac{1}{1+y}-\frac{2+y}{2\sqrt{(1+y)^3}}=\frac{2\sqrt{(1+y)}-(1+y)-1}{2\sqrt{(1+y)^3}}=-\frac{\left(\sqrt{1+y}-1\right)^2}{2\sqrt{(1+y)^3}}<0,$$

故对所有 $y>0$, $F(y)<F(0)=0$, 即 $\ln(1+y)<\dfrac{y}{\sqrt{1+y}}$ 成立.

由此可知当 $x\geqslant 1$ 时, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$, 则 $f'(x)>0$. 因此求最大的 α, 使得

$$\alpha \leqslant \frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}-n$$

成立, 必有 $\alpha=f(1)=\dfrac{1}{\ln 2}-1$. 最小的 β, 使得 $\beta \geqslant \dfrac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}-n$ 成立, 必有

$$\beta=\lim_{n\to\infty}\left[1\Big/\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\right]=\frac{1}{2}.$$

例 1.25　是否存在 $\mathbf{R}$ 中的可微函数 $f(x)$, 使得

$$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5\ ?$$

若存在，请给出一个例子；若不存在，请给出证明.

解 不存在. 假设存在 $\mathbf{R}$ 中的可微函数 $f(x)$，使得

$$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5.$$

考虑方程 $f(f(x))=x$，即 $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5=(1-x)(1+x^2+x^4)=0$，得唯一实根 $x=1$. 现在证明 $f(1)=1$. 令 $f(1)=t$，则 $f(t)=f(f(1))=1$，$f(f(t))=f(1)=t$，故 $t=1$.

设 $g(x)=f(f(x))$，则 $g'(x)=f'(f(x))f'(x)$，有

$$g'(1)=f'(f(1))f'(1)=(f'(1))^2\geqslant 0. \tag{1.3}$$

又 $g(x)=1+x^2+x^4-x^3-x^5$，$g'(x)=2x+4x^3-3x^2-5x^4$，故 $g'(1)=-2<0$ 与式(1.3)矛盾. 因此不存在可微函数 $f(x)$，使得 $f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5$.

例 1.26 证明 $\sin 1$ 是无理数.

证明 设 $\sin 1$ 是有理数，则 $\sin 1=\dfrac{p}{q}$，p,q 是互质的正整数. 设自然数 n 满足 $2n-1>q$，将 $\sin 1$ 进行 Taylor 展开，有

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cos\xi,$$

其中 $0<\xi<1$，则由

$$(2n-1)!\frac{p}{q}=(2n-1)!\left[1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\right]+\frac{(-1)^n}{2n(2n+1)}\cos\xi$$

知 $\dfrac{(-1)^n}{2n(2n+1)}\cos\xi$ 是整数(两个整数之差仍是整数). 然而，$|\cos\xi|\leqslant 1$，且 $\cos\xi\neq 0$，$2n>1$，故 $\dfrac{(-1)^n\cos\xi}{2n(2n+1)}$ 不可能是整数，因此矛盾. 所以 $\sin 1$ 是无理数.

1.2.2 极限

极限论是微积分的基础. 极限问题是微积分中较困难的问题之一. 对于此类问题，首先要明确在什么条件下极限存在；其次是极限的计算. 求极限的运算方法很多，主要可归纳为：用定义求极限，利用无穷小性质，用极限运算法则计算,利用等价无穷小代换，利用初等变形及代换，两个重要极限，极限存在准则(单调有界数列必收敛准则及夹逼性准则，Cauchy 收敛准则),定积分定义，级数收敛必要条件及级数求和，洛必达(L'Hospital)法则，导数定义等方法.

本节综合了极限的各种计算方法，给出的办法具有综合性. 突出等价无穷小量和