中學堂及
高等學堂參考用書

劉盛欽

大代數學講義

上海商務印書館發行

序

俯仰宇宙。自然界、人爲界、形而上者。形而下者、系而爲學、釐而爲科、繁然錯列。莫殫莫究、卽就一科而言之、有委有原、有約有博。作者創始。述者增高、駸駸乎日進而未有極限。學者之習科學也。方其始患不得入其門。既入其門。則欲罷不能、恆以一探究竟博觀變化爲愉快。遊山者思登五嶽之高、觀水者思極九瀛之闊。人情大抵然乎。憶曩時初習代數。所循誦者爲製造局之譯本。深喜代數立術、能探究數之公性情。足與中土天元術相頡頏。以視舊有各術之枝枝節節而爲之者。難易蓋迥判矣、然嘗因其術而觸類引伸。覺意象之表。尙有種種繁賾之理、足供研究者在。惜所誦之本、尙語焉而不詳。偶見某雜誌、載級數求和之解法、批郤導窾。得未曾有、聞友人述。謂是固譯自東文大代數者耳。於是知海外著述。不乏淵博精深先得我心者。深自恨未諳東文。無由窺此鴻祕也。近年以來、代數學敎科書出版日多。初學入門。可無困難之感、默計此時明習代數之人。當倍蓰於十年以前。苟非迻譯程度較高之書、引入於深造之域。殆不足饜其拾級而登之願望。館中同人、不辭勞瘁、取日本上野淸之大代數講義而譯之、期年而譯始成、又期年而印始成、某以與於校勘之役。藉得稍稍瀏覽、一償夙願、既深自幸、且以此忖度並世學子之心。知其對於是書之出版。亦必有以先覩爲快者焉、吁。來者不可知、由今日言之、則是書者。固代數學中之五嶽九瀛也矣、

己酉年夏五　紹興壽孝天識於商務印書館編譯所

例言

一是書爲日本上野清氏所編纂。取英國斯密斯氏霍爾氏乃托氏三家之大代數學。譯述解證。演爲講義。其立義之嶄新。體例之完備。久爲彼國教育家所歡迎。今重譯之以供吾國習代數者參考之用。

一斯密斯氏書。自開端始。霍爾氏乃托氏書。自比例始。本書以斯密斯氏本爲主。以霍爾氏乃托氏之說補其缺。皆依據一千八百九十三四年間最新之版而蒐採。上野氏此書。實可謂集三家之大成。

一是書共分八卷。都三十二編。自第一編至第十九編專論數之運算及性質。可稱爲初等之部。自第二十編至第三十二編。於數之運算及性質外。詳論數之變化及配合。可稱爲高等之部。學者明此界限。循序漸進。自無難通之處。苟能反覆熟習。代數學之奧蘊畢宣矣。

一是書例題之解答。專爲查對而設。學者習至例題。宜先以己意解演之。後視其與是書合否。合則考其孰繁孰簡。不合則考其誤在何處。庶易得益。若第按文循誦。而曰是易解是易解。則非編纂者之本意也。

一是書材料豐富。凡代數學之理法。包括殆盡。即向之稱爲難題者。依此書之理法解之。自覺游刃有餘。

一是書各種名詞。悉照現今所通行者而用之。仍附載英文原名。以資考證。譯文之中。間有爲譯者所添註而非上野清氏原書之所有者。則標譯註二字以爲區別。

一是書文字不尙高深。解說不厭煩瑣。務以達意爲主。惟卷帙浩繁。譯述讐校。前後易數人之手。始克竣事。未當之處。訛誤之處。均恐不免。還望海內大雅。匡其不逮。則幸甚矣。

目　　錄

第壹卷

第壹編

第貳編

第叁編

第肆編

第伍編

第陸編

第陸編補

第貳卷

第柒編

第捌編

第玖編

第玖編(補)

第　叁　卷

第　拾　編

第　拾　壹　編

第　拾　貳　編

第　拾　貳　編　(補)

第　拾　叁　編

第肆卷

第拾肆編

第拾伍編

第拾陸編

第拾柒編

第拾捌編

第拾玖編

第伍卷

第貳拾編

頁

第貳拾壹編

第貳拾貳編

第貳拾叁編

第陸卷

第貳拾肆編

第貳拾伍編

第貳拾陸編

第貳拾柒編(上)

第　柒　卷

第貳拾柒編(續)

第貳拾捌編

第貳拾玖編

第貳拾玖編(補)

第捌卷

第叁拾編

第叁拾壹編

第叁拾貳編

查理斯密司氏
霍爾氏，乃托氏

大代數學講義

第壹卷

第壹編

定義

1. 代數學(Algebra)爲論數之學科。與算術(Arithmetic)同。

譯注。算術舊稱數學。今從本書原名。稱算術。

算術中以5,6,等數字表數。其數字各有一定之値。代數學中以文字表數。其文字可代任何之數。(即未定之數)此代任何數之文字。謂之元字。但在一個題內所用同一之元字。所代爲同一之數

代數學中所用之元字。可以代任何之數。故凡所論數之理法可推之於任何數而皆同。

例如5加6所得之數爲11。此算術中所論之理法。不能類推之於他數。若代數中用元字代數。如a加a其所得之數常爲a之2倍此a不論爲任何數皆合。

2. 數(Numbers)謂整數及分數也。

又有數量者。如價値，長，面積，時間之類。各以其單位爲標準而以數示其爲單位之若干倍或若干分

例如計物之長爲4。此必爲其單位所度得之數。其單位爲一尺，或一步，或一里，或爲別定之長。則其物之長。即爲4尺，或4步，或4里，或爲所定之長之4倍，

夫數者。本祇用以計算數量。故無論以元字或數字。爲數量之記號。其元字與數字。皆僅能表其數量之數。而數與數量。雖有分別。尋常亦屢有以數量二字爲數之代字者。

譯注。算術中全以數字與單位相連而言如4尺或4步謂之名數。對名數而言。則凡不連舉單位之數。謂之不名數。名數所以表數量。而名數中所用之數字。仍以表數而已。

〔注意〕此後各章。其關係尤要者。常加（ ）爲記號。如下3章關係尤要。故作(3)。

(3.) 加號 ＋〔Plus〕置此號於一數之前。以示此一數加於前一數也。

例 $6+3$。以示3加於6也。又 $6+3+2$。以示3加於6之後。又以2加之也。

$a+b$。以示b加於a也。又 $a+b+c$。以示b加於a之後。又以c加之也

(4.) 減號 －〔Minus〕置此號於一數之前。以示從前一數減去此一數也。

例 $6-3$。所以示自6減去3也。又 $6-3-2$。所以示自6減3之後又以2減之也。

$a-b$。所以示自a減去b也。又 $a-b-c$。所以示自a減b之後又以c減之也。此與加號之次序同。

加減兩號並用。如 $a+b-c$。爲b加於a之後而以c減之。

又 $a-b+c$。爲自a減去b而又以c加之也。

〔法則〕加減之運算。必從左順次以及於右。

例 $9+3+2=12+2=14$。此從左及於右者也。

又 $9+3+2=9+5=14$。此從右及於左者也。

加法之演算。從右及於左。其結果尚無不合。然依此習慣。以行於減法。則有大誤。

例 $9-3-2=6-2=4$。此從左及於右者也。

若從右及左而運算之。則 $9-3-2=9-1=8$。即爲大誤。何則以 $9-3-2$ 之意。謂從9減3餘6。又從6減2餘4。此4即所得之結果。若從右運算。則與題意違背。學者宜慎之。

又$9+3-2=12-2=10$。此從左及於右者也。

$9+3-2=9+1=10$。此從右及於左者也，其結果尙無不合。

$9-3+2=6+2=8$。此從左及於右者也。

$9-3+2=9-5=4$。此從右及於左者也。其結果不合。

(5.) 乘號 $\times$〔**into**〕置此號於一數之前。以示此一數乘於前一數也。

例$a\times b$。所以示以b乘a也。$a\times b\times c$。所以示以b乘a。又以c乘之也。

文字與文字之間。或數字與文字之間。其乘號可省。例$a\times b$記爲ab。$a\times b\times c$記爲abc

若夫數字與數字之間。其乘號斷不可省。否則大誤。例記3×6爲36。此36卽爲三十六之數。斷不可以代3×6者也。

有時以點(.)代乘號。然恐其與小數點相混。故記此點時。比小數點略低。例6×3則記如6.3

〔餘論〕數字與數字之間。加號有時可省。

例$60+3$卽63。又$6+\frac{3}{10}$卽$6\frac{3}{10}$。

然如$8+3$則不得記爲83。

(6.) 除號 $\div$〔**Divided by**〕置此號於一數之前。以示用此一數以除前一數也。

例$a\div b$。卽a以b除也。$a\div b\div c$。所以示a以b除。又以c除之也。

乘除兩號並用。如$a\div b\times c$。爲a以b除。又以c乘之也。又$a\times b\div c$。爲a以b乘。又以c除之也。

〔法則〕乘除之運算。亦從左順次以及於右。與加減之運算同。若連用加減乘除之記號。如$a-b\times c+c\div d$。其運算之次序若何。則於16章之末別爲說明之。

7. 積〔**Product**〕凡二數或二個以上之數相乘。其結果爲諸數之連乘積(**Continued product**)。或單稱積。而其所乘之諸數。爲其積之因子(**Fartor**)。

將積之因子分而爲二。彼此互爲係數(**Coefficient**)。

例將 $3abx$ 之因子分爲 3 與 abx，則 3 爲 abx 之係數。而 abx 爲 3 之係數，

若分爲 $3ab$ 與 x。則 $3ab$ 爲 x 之係數。而 x 爲 $3ab$ 之係數，

積中一因子以數字表之者。謂之數字係數 (numerical coefficient)。

例 $3abx$，其 3 爲 abx 之數字係數，

(注意)係數用數字係數之處最多。

8. 方乘(Power) 諸因子相同。其所成之積。爲其因子之方乘。例 a 與 a 二因子所成之積 aa。爲 a 之二方乘。又 aaa。爲 a 之三方乘。aaaa，爲 a 之四方乘，以下類推，

有時祇有一個因子 a，卽以爲 a 之一方乘，

二方乘亦稱平方 (Square)，三方乘亦稱立方 (Cube)。例 aa 爲 a 之平方。aaa 爲 a 之立方。

9. 指數(Index) aa, aaa, aaaa 等之方乘簡略記法。卽以 a^2 代 aa。以 a^3 代 aaa。以 a^4 代 aaaa。故 a^n 可以代 aaaa……… 乘至 n 次之方乘也。(n 爲整數)

其於 a 之右肩上所記之小數字 2, 3, 4 及文字 n。所以示同因子之數。如 a^3b^2 卽爲 aaabb。

如上所記之小數字及文字以示同因子之數者，稱爲指數。

a 之一方乘當記爲 a^1。然可略之，僅記爲 a，

10. 方根(Root) 若一數之平方等於 a。則其一數，爲 a 之平方根，例 4 之平方卽 4^2 等於 16，則 4 爲 16 之平方根，

平方根 (Square Root) 之記號。記以 $\sqrt[2]{\ }$，或略記以 $\sqrt{\ }$。故 $\sqrt{a}$ 爲 a 之平方根，$\sqrt{16}$ 爲 16 之平方根 卽 $\sqrt{16}=4$，

若一數之立方等於 a，則其一數爲 a 之立方根，例 3 之立方卽 3^3 等於 27。故 3 爲 27 之立方根，

立方根 (Cube Root) 之記號，記以 $\sqrt[3]{\ }$。故 $\sqrt[3]{a}$ 爲 a 之立方根。又 $\sqrt[3]{27}$ 卽 3 爲 27 之立方根，

四乘根記以 $\sqrt[4]{\ }$，五乘根記以 $\sqrt[5]{\ }$。又 n 乘根記以 $\sqrt[n]{\ }$，故 $\sqrt[4]{a}$ 爲 a 之四乘根，$\sqrt[n]{a}$ 爲 a 之 n 乘根。但 n 限於整數，

$\sqrt{}$之記號。蓋從根字即 Radix 之首字碼 r 變化而成。此種記號稱爲根號(Radical Sign)。

11. 不盡根(Surd) 所得之方根。其小數無盡者。稱爲不盡根或無理數 (Irrational Surd)。例 $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt[4]{4}$ 若精密求之。其小數無有窮盡。故稱 $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt[4]{4}$ 等爲不盡根。

依算術上求平方根之法。$\sqrt{7}$ 之值僅能得其略近數 2.6457……若於代數學 7 之平方根。祇記爲 $\sqrt{7}$ 而已。

(12.) 代數式(Algebraical expression) 以種種之文字,數字,符號集合而成者。

例如 $7a+b^2-cd$ 或 $\sqrt{a}+9$ 等。皆爲代數式。

若如 $+\times 6-\div ab$ 爲任意集合毫無意義者。不得謂之代數式。

項(Terms) 以 + 或 − 相連之各部爲項。

例 $2a-3bx+5cy^2$ 此代數式之各部。爲 $2a$, $-3bx$, $+5cy^2$。即此代數式爲有三項者。

若以 × 或 ÷ 相連之各部。不得曰項。例 $5+6-7$ 爲有 $5, +6, -7$ 之三項。若 $5\times 6\div 7$。其全部分僅得爲一項。

例 $2a-3bx+5cy^2$ 爲 $2\times a-3\times b\times x+5\times c\times y\times y$。其在 + 及 − 之間者得謂之項。其在 × 與 + 或 − 之間者不得謂之項。

13. 同類項(Like terms) 有二項。除數字係數之外。其餘悉相同者。謂之同類項。

例 a 與 $3a$ 爲同類項。$5a^3b^2c$ 與 $3a^3b^2c$ 爲同類項。

至若 $5a^2b^3c$ 與 $3a^3b^2c$ 則爲異類而非同類項。何則。一數中 a 之因子有二。b 之因子有三。而又一數中 a 之因子有三。b 之因子有二。故相異也。又 $5a^2b$ 與 $5ax$ 亦爲異類項。

14. 壹項式(Monomial expression) 代數式祇有一項者。例如 $3ab$, $7\div 6\times 8$。皆爲壹項式。

多項式(Multinomial expression) 代數式有二項或二以上之項者。

例如 $a+b$, $a-b\times c$ 爲二項式(Binomial expression)。

$a-b+c$, ax^2+bx+c 爲三項式(Trinomial expression)。

15. 相等號 $=$〔Equals〕置此號於兩代數式之間。以示其兩代數式爲相等者。例 $a=b$。爲 a 等於 b 也。$a+b=c$。爲 $a+b$ 等於 c 也。

若置符號 $>$ 於兩代數式之間。所以示前式大於後式。例 $a>b$ 爲 a 大於 b 也。

若置符號 $<$ 於兩代數式之間。所以示前式小於後式。例 $a<b$ 爲 a 小於 b 也。

若置符號 $\neq$ 於兩代數式之間。所以示前式與後式不相等。例 $a\neq b$ 爲 a 不等於 b。即爲 a 大於 b 或小於 b 也。故 $a\neq b$ 或記爲 $a\gtrless b$。

若置符號 $\ngtr$ 於兩代數式之間。所以示前式不大於後式。例 $a\ngtr b$ 爲 a 不大於 b。即爲 a 小於 b 或等於 b 也。故 $a\ngtr b$ 或記爲 $a\leqq b$。

若置符號 $\nless$ 於兩代數式之間。所以示前式不小於後式。例 $a\nless b$ 爲 a 不小於 b。即爲 a 大於 b 或等於 b 也。故 $a\nless b$ 或記爲 $a\geqq b$。

16. 括弧〔Brackets〕將二項或二項以上之代數式。置於括弧之內。視此代數式之全項。當作一項。例 $(a+b)c$ 其意謂於 b 加於 a 之結果。而以 c 乘之。其 $a+b$ 附以括弧者。視 $(a+b)$ 爲一項。即視爲 b 加於 a 之結果也。

又 $(a-b)(c+d)$。其意謂以 a 減 b 爲一數。c 加 d 爲又一數。而以此二數相乘也。

又 $(a+b)^2(c+d)^2$ 其意謂以 a, b 和之平方爲一數。c, d 和之平方爲又一數。而以此二數相乘也。

所有括弧之形。如 ( ), { }, 〔 〕。

括線〔Vinculum〕以——代括弧者也。

例 $a-\overline{b-c}$ 即 $a-(b-c)$。又 $\sqrt{\overline{a+b}}$ 即 $\sqrt{(a+b)}$。根號無括弧及括線者。其根號僅屬於一數。如 $\sqrt{2}a$ 爲於 2 之平方根即 $\sqrt{2}$。以 a 乘之。與 $\sqrt{\overline{2a}}$ 或 $\sqrt{(2a)}$ 不同。若 $\sqrt{\overline{2a}}$ 或 $\sqrt{(2a)}$。則爲 2a 之平方根也。

又 $\sqrt{a}+x$ 爲於 a 之平方根即 $\sqrt{a}$ 加以 x 也。與 $\sqrt{\overline{a+x}}$ 或 $\sqrt{(a+x)}$ 不同。因 $\sqrt{\overline{a+x}}$ 或 $\sqrt{(a+x)}$。爲 $a+x$ 之平方根也。欲表示全式之平方根。必用括弧或括線將全式包括之。