全国硕士研究生入学统一考试

最新版

数学真题名师解析

（数学三）

◎编著 潘　鑫
季振东

国家行政学院出版社

全国硕士研究生入学统一考试

最新版

数学真题名师解析

（数学三）

◎编著 潘 鑫
季振东

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学真题名师解析. 数学三/潘鑫,季振东编. 一北京:
国家行政学院出版社,2012.5
ISBN 978-7-5150-0344-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①潘… ②季… Ⅲ.①高等数学一研究生一入学
考试一题解 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 099126 号

敬告读者

本书封面贴有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

书　　名	数学真题名师解析(数学三)
主　　编	潘鑫　季振东
责任编辑	姚敏华
出版发行	国家行政学院出版社
	(北京市海淀区长春桥路 6 号　100089)
电　　话	(010)68920640　68929037
编 辑 部	(010)68928761　68929009
网　　址	http://cbs.nsa.gov.cn
经　　销	新华书店
印　　刷	保定市中画美凯印刷有限公司
版　　次	2012 年 5 月第 1 版
印　　次	2012 年 5 月第 1 次印刷
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	15.25
字　　数	260 千字
书　　号	ISBN 978-7-5150-0344-3/O·013
定　　价	38.00 元

前　言

自 87 年全国硕士研究生数学入学实行统一考试以来，至今已命制了数千道试题。这些试题是命题专家智慧和劳动的结晶，它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题思想，是广大考生了解、分析、研究全国硕士研究生数学入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，是考生最好的模拟题，考生如能把这些历年考题全部消化巩固将为考研成功打下坚实的基础。

本书不仅汇集了 2000 年－2012 年数学三的历届研究生入学考试试题，同时真正做到了逐题分析、详解、评注。

【分析】分析考点、思路、重点、方法，使考生不仅能学到这类题的具体求解方法，而且能学到如何分析求解这类题的能力，使考生不仅“知其然”而且能“知其所以然”;

【详解】解题步骤清晰、解答详细规范、思路开阔、有些题还提供了多种解法，以便读者扩展分析思路、举一反三;

【评注】点评所涉及到的知识点、可能延伸的考查情形，容易出现的错误或在考试中应注意问题等等。

可以说“分析透彻、解答详细、点评到位、指出错误”是本书特点，这种编著形式更有助于考生把握解题规律、扩展分析思路、提炼答题技巧，提高应试水平。我们深信考生深入学习、演练后，对在考研中取得数学高分必有极大帮助。

尽管抱着对广大考生认真负责的精神，高质量严要求，但难免有不尽人意之处，恳请广大读者朋友批评指正，以使本书不断完善。

作者

目　录

2000年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题及解析

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分．把答案填在题中横线上)

(1)设$z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中$f,g$均可微，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$________．

【分析】本题考查抽象函数求偏导数的问题,直接利用复合函数求偏导公式进行．

【详解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$

评注：复合函数求偏导的原则是：有几个中间变量就有几项，每一项是由先对中间变量求导再乘以中间变量对自变量求导数所构成．

（2）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}=$________．

【分析】考查无穷区间上的反常积分．利用换元法进行计算即可．

【详解】 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}\overset{t=e^x}{=}\int_e^{+\infty}\frac{dt}{t^2+e^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dt}{t^2+e^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{1}{e}\arctan\frac{t}{e}\Big|_e^b)$

$$=\frac{1}{e}\lim_{b\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4e}$$

评注：反常积分同样有换元积分法、分部积分法，切换元积分法与分部积分法思路和普通积分一致．但是反常积分在进行加减运算时应小心，一般来说此时是不成立的．

（3）若四阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似；矩阵为$\boldsymbol{A}$的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则行列式

$\left|B^{-1}-E\right|=$______．

【分析】利用相似矩阵的性质及矩阵特征值的性质先求出$B^{-1}-E$的特征值，然后利用特征值的公式计算行列式：$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是矩阵$A$的$\boldsymbol{n}$个特征值．

【详解】因为矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，而相似矩阵具有相同的特征值，所以矩阵$\boldsymbol{B}$的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，又由$Bx=\lambda x,(\lambda\neq0)$可得：$(B^{-1}-E)x=(\frac{1}{\lambda}-1)x$，可见矩阵$B^{-1}-E$的特征值为$1,2,3,4$，从而有行列式$\left|B^{-1}-E\right|=4!=24$

评注：一般而言，抽象行列式的计算不能利用通常的行列式的性质化为三角形行列式等方法完成，而常用方法往往是通过矩阵的关系式或矩阵的特征值计算.

（4）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3},x\in[0,1]\\ \dfrac{2}{9},x\in[3,6]\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

若 k 使 $P\left\{X\geq k\right\}=\dfrac{2}{3}$，则 k 的取值范围是 ____________

【分析】 考查随机变量概率密度与概率分布的概念．若将条件 $P\left\{X\geq k\right\}=\dfrac{2}{3}$ 改换成 $P\left\{X<k\right\}=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$,则与分布函数就完全对应起来了,就可以得到答案.

【详解】 由题设 $P\left\{X\geq k\right\}=\dfrac{2}{3}$,知 $P\left\{X<k\right\}=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$,而

$P\left\{X<k\right\}=\int_{-\infty}^{k}f(x)dx$,再由 $f(x)$ 定义可知,$1\leq k\leq 3$

（5）设随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布；随机变量 $Y=\begin{cases}1,X>0\\0,X=0\\-1,X<0\end{cases}$，则方差 $D(Y)=$ ________ .

【分析】 Y 为离散型随机变量,其方差的计算可根据定义求出 $E(Y),E(Y^2)$,再套用公式 $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$ 即可.

【详解】 由于随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布,所以其密度分布函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3},-1\leq x\leq 2\\ 0,\ \text{其它}\end{cases}$$

因此 $P\left\{Y=1\right\}=P\left\{X>0\right\}=1-\int_{-\infty}^{0}f(x)dx=\dfrac{2}{3}$

$$P\{Y=-1\}=P\{X<0\}=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx=\frac{1}{3}$$

$$P\{Y=0\}=P\{X=0\}=0$$

于是$E(Y)=(-1)\times\frac{1}{3}+0\times 0+1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}, E(Y^2)=(-1)^2\times\frac{1}{3}+0^2\times 0+1^2\times\frac{2}{3}=1$

故$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{8}{9}$.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分．每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

（1）设对任意的x，总有$\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(A) 存在且等于零　　(B)存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

【分析】考查对极限夹逼准则的理解．抽象函数构造的选择题,常常用排除法-----通过举反例得到所选项

【详解】令$\varphi(x)=1-e^{-|x|}, g(x)=1+e^{-|x|}, f(x)=1$,则对任意的$x$，总有

$\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，而$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$,所以(A)、(C) 不正确；又令$\varphi(x)=e^x-e^{-|x|}, g(x)=e^x+e^{-|x|}, f(x)=e^x$,则对任意的$x$，总有

$\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，而$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在,所以（B）不正确；故应选（D）

（2）设函数$f(x)$在点$x=a$处可导，则函数$|f(x)|$在点$x=a$处不可导的充分条件是

(A) $f(a)=0$且$f'(a)=0$　　（B）$f(a)=0$且$f'(a)\ne 0$

(C) $f(a)>0$且$f'(a)>0$　　(D) $f(a)<0$且$f'(a)<0$

【分析】举反例进行说明

【详解】如: $f(x)=x^2$在点$x=0$处，$f(0)=0, f'(0)=0$，并不能推出$|f(x)|=x^2$在点$x=0$处不可导，排除（A）；

令$f(x)=x^2$在点$x=1$处，$f(1)>0$，$f'(1)>0$，但$|f(x)|=x^2$在点$x=1$处可导，排除（C）；

令 $f(x)=-x^2$ 在点 $x=1$ 处，$f(1)<0$，$f'(1)<0$，但 $|f(x)|=x^2$ 在点 $x=1$ 处可导，排除（D）；剩下(B)为正确选项.

事实上,当(B)成立,即 $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$ 时,令 $F(x)=|f(x)|$，则

$$F'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=|f'(a)|$$

$$F'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=-|f'(a)|$$

可见当 $f'(a)\neq 0$ 时 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的左、右导数不相等,因此导数不存在.

故 $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$ 是 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件.

评注：如按上述方法进行讨论，是非常浪费时间的．事实上我们可以先找一个在某点已知不可导的函数，观察其在该点满足的条件，并与四个答案对照，满足相同条件的选项就是正确的．最熟悉的不可导函数就是 $|f(x)|=|x|$（$f(x)=x$）在 $x=0$ 处不可导，而 $f(0)=0, f'(0)=1\neq 0$ 与选项（B）中条件一致．故正确的选项为（B）.

（3）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个解向量，且秩 $(\mathbf{A})=3$

$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，$c$ 表示任意常数，则线性方程组 $AX=b$ 的通解 X 为

（A）$(1,2,3,4)^T+c(1,1,1,1)^T$ （B）$(1,2,3,4)^T+c(0,1,2,3)^T$

（C）$(1,2,3,4)^T+c(2,3,4,5)^T$ （D）$(1,2,3,4)^T+c(3,4,5,6)^T$

【分析】本题实际上只要找到对应齐次方程组的一个非零解便可，而根据解的性质 $2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_1-\alpha_3)$ 或 $\alpha_1-\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)$ 为对应齐次方程的一个非零解

【详解】由题设, $r(A)=3$，可见对应齐次线性方程组的基础解系所包含的解向量的个数为 $4-3=1$,即其任一非零解均可作为基础解系．又根据解的性质知

$$2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_1-\alpha_3)=(2,3,4,5)^T\neq 0$$

为对应齐次线性方程组的解,即可作为基础解系.

从而线性方程组 $Ax=b$ 的通解为 $(1,2,3,4)^T+c(2,3,4,5)^T$.

故应选（C）.

> 评注：一般地，设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性方程组 $Ax=b$ 的解，则其线性组合
>
> $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$$
>
> 当 $k_1+k_2+\cdots+k_n=0$ 时为 $Ax=0$ 的解；当 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$ 时为 $Ax=b$ 的解.

（4）设 A 为 n 阶实矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵，则对于线性方程组（Ⅰ）：$Ax=0$ 和（Ⅱ）：$A^TAx=0$，必有

（A）（Ⅱ）的解都是（Ⅰ）的解，（Ⅰ）的解也是（Ⅱ）的解

（B）（Ⅱ）的解都是（Ⅰ）的解，但（Ⅰ）的解不是（Ⅱ）的解.

（C）（Ⅰ）的解不是（Ⅱ）的解，（Ⅱ）的解不是（Ⅰ）的解

（D）（Ⅰ）的解是（Ⅱ）的解，但（Ⅱ）的解不是（Ⅰ）的解

【分析】（Ⅰ）的解是（Ⅱ）的解是显然的，关键是（Ⅱ）的解是否为（Ⅰ）的解，从形式上看，有 $A^TAx=0$ 要推导出与 $Ax=0$ 有关的结果，可考虑左乘 x^T .

【详解】设 x 是 $Ax=0$ 的解，则显然为 $A^TAx=0$，即（Ⅰ）解是（Ⅱ）的；反过来，设 x 为 $A^TAx=0$ 的解，即 $A^TAx=0$，则有 $x^TA^TAx=0$，从而可以推出 $Ax=0$.

因为若设 $Ax=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，则 $x^TA^TAx=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0$，于是有

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$$

即 $Ax=0$，说明（Ⅱ）的解也是（Ⅰ）的解. 故应选(A).

（5）在电炉上安装 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的，在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电. 以 E 表示事件“电炉断电”，而 $T_{(1)}\le T_{(2)}\le T_{(3)}\le T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于

(A) $\{T_{(1)} \ge t_0\}$　(B) $\{T_{(2)} \ge t_0\}$　(C) $\{T_{(3)} \ge t_0\}$　(D) $\{T_{(4)} \ge t_0\}$

【分析】本题考查随机事件的表示问题．注意“电炉断电”相当于至少有两个温控器显示的温度不低于临界温度t_0，也就是说，两个或两个以上的温控器显示的温度不低于临界温度t_0都在“电炉断电”这个事件所描述的范围内．

【详解】“电炉断电”这一事件E 发生,意味着四个温控器至少有两个显示的温度值大于或等于t_0，即若将 4 个温控器上的值$T_{(1)} \le T_{(2)} \le T_{(3)} \le T_{(4)}$从小到大排列的话,排在第 3 的温度值一定大于或等t_0，即有$\{T_{(3)} \ge t_0\}$,故应选(C).

三、（本题满分 6 分）

求微分方程 $y'' - 2y' - e^{2x} = 0$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的解

【分析】考查二阶常系数线性非齐次方程求解．利用相应求解方法完成．

【详解】特征方程为$\lambda^2 - 2\lambda = 0$,特征根为$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$,从而对应齐次方程通解为

$$Y = C_1 + C_2 e^{2x}$$

由于$\alpha = \lambda_2 = 2$是单特征根,所以设所求特解为$y^* = xAe^{2x}$,代入原方程得:

$$4A(1+x)e^{2x} - 2(A+2Ax)e^{2x} = e^{2x}\text{,即得}2A = 1.$$

从而$y^* = \frac{1}{2}xe^{2x}$是原方程的一个特解．

故原方程通解为$y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x}$．

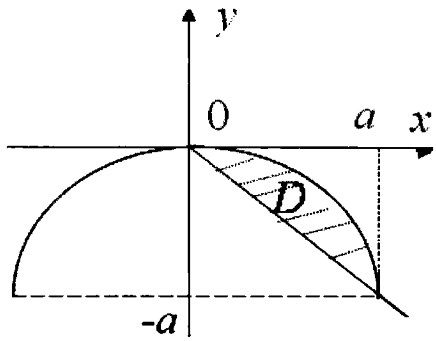
将$y(0)=1, y'(0)=1$代入通解可求得:$C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = \frac{1}{4}$．

从而所求特解为: $y = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x}$

四、（本题满分 6 分）

计算二重积分$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy$,其中$D$是由曲线$y = -a + \sqrt{a^2 - x^2}\,(a>0)$和直线$y = -x$围成的区域.

【分析】 考虑到积分区域是圆的一部分,而被积函数形如 $f(x^2+y^2)$,故选极坐标计算 .



【详解】做积分区域 D 草图,如右图所示. 则 $D:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le 0\\ 0\le r\le -2a\sin\theta\end{cases}$,从而

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}dr \overset{r=2a\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-\theta}\frac{4a^2\sin^2 t}{2a\cos t}\cdot 2a\cos t dt$$

$$=4a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-\theta}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)d\theta=a^2(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2})$$

五 、(本题满分 6 分)

假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别是 $p_1=18-2Q_1$， $p_2=12-Q_2$，其中 p_1,p_2 分别表示该产品在两个市场的价格（单位：万元/吨），Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量（即需求量，单位：吨），并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$，其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量，即 $Q=Q_1+Q_2$

（1） 如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场该产品的销售量和价格，使该企业获得最大利润；

（2） 如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格，使该企业的总利润最大化；并比较两种策略的总利润大小.

【分析】在两种不同情况下,均是先求出总利润函数的表达式,并统一表示为销售量或价格的函数,由于需求函数已将价格表示为销售量的函数,所以利润函数用销售量来表示更方便一些. 注意第二问,相当于求 $p_1=p_2$ 即 $2Q_1-Q_2=6$ 下的条件极值.

【详解】（1）根据题设总利润函数为

$$L=R-C=p_1Q_1+p_2Q_2-(2Q_1+2Q_2+5)=-2Q_1^2-Q_2^2+16Q_1+10Q_2-5$$

令$\begin{cases}L'_{Q_1}=-4Q_1+16=0\\L'_{Q_2}=-2Q_2+10=0\end{cases}$,解得$Q_1=4,Q_2=5$,与之对应$p_1=10,p_2=7$

因为是实际问题,必存在最大值,且有唯一驻点,所以如果该企业实行价格差别策略，两个市场该产品的销售量和价格分别为4(吨)、10（万元/吨）和5（吨）、7（万元/吨），使该企业获得最大利润$L=52$（万元）；

（2）如果该企业实行价格无差别策略，则$p_1=p_2$，于是有约束条件$2Q_1-Q_2=6$.

构造拉格朗日函数$F=-2Q_1^2-Q_2^2+16Q_1+10Q_2-5+\lambda(2Q_1-Q_2-6)$

令$\begin{cases}F'_{Q_1}=-4Q_1+16+2\lambda=0\\F'_{Q_2}=-2Q_2+10-\lambda=0\\F'_\lambda=2Q_1-Q_2-6=0\end{cases}$，解得$Q_1=5,\quad Q_2=4,\quad p_2=p_1=8$

因为是实际问题,必存在最大值,且有唯一驻点,所以如果该企业实行价格无差别策略两个市场该产品的销售量和价格分别为5(吨)、8（万元/吨）和4（吨）、8（万元/吨），使该企业获得最大利润$L=49$（万元）.

总上可得，企业实施价格差别策略所得总利润要大于统一价格的总利润.

六、（本题满分7分）

求函数$y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$的单调区间和极值，并求该函数图形的渐近线

【分析】本题考查单调区间、极值和渐近线的求法.

【详解】函数$y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$定义域为$(-\infty,+\infty)$，又

$$y'=e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}+\frac{(x-1)}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=\frac{x(x+1)}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$$

所以定义域内导数为零和导数不存在点为$x_1=-1,x_2=0$. 列表讨论如下

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	极大值 $-2e^{\frac{\pi}{4}}$	↘	极小值 $-e^{\frac{\pi}{2}}$	↗

由表可见：函数在区间$(-\infty,-1)$和区间$(0,+\infty)$内单调递增，在区间$(-1,0)$内单调递减；$f(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$为极大值，$f(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$为极小值.

显然该函数图形无铅直渐近线；由于$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=-\infty$，所以函数图形无水平渐近线；

又 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x}=e^{\pi},$$

$$\lim_{x\to+\infty}[(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-xe^{\pi}]=\lim_{x\to+\infty}[x(e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-e^{\pi})]-e^{\pi}$$

$$=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}[x(e^{-\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1)]-e^{\pi}=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}[x(-\frac{\pi}{2}+\arctan x)]-e^{\pi}$$

$$=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{2}+\arctan x}{\frac{1}{x}}-e^{\pi}=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-e^{\pi}=-2e^{\pi};$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}[(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-x]=\lim_{x\to-\infty}[x(e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1)]-1$$

$$=\lim_{x\to-\infty}[x(\frac{\pi}{2}+\arctan x)]-1$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\pi}{2}+\arctan x}{\frac{1}{x}}-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-1=-2$$

从而函数图形的斜渐近线为$y=e^{\pi}(x-2)$和$y=(x-2)$

综上该函数图形的渐近线只有两条分别为$y=e^{\pi}(x-2)$和$y=(x-2)$.

七、（本题满分 6 分）

设$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos xdx, n=0,1,2,\cdots$，求$\sum_{n=0}^{\infty}I_n$

【分析】从被积函数形式可以看出，利用凑微分求出I_n；而数项级数求和一般利用幂级数来完成.

【详解】

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n xd\sin x=\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$$

从而$\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$

构造幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

令$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，则$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，从而

$$S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)dx=-\ln(1-x)\text{，而}S(0)=0\text{，故}S(x)=-\ln(1-x)$$

所以$\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}=S(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\ln(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\ln(2+\sqrt{2})$

八、(本题满分6分)

设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^{\pi}f(x)dx=0$，$\int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=0$试证:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

【分析】至少存在两个不同的点ξ_1,ξ_2使某等式成立，一般应考虑在$[0,c]$与$[c,\pi]$上分别使用拉格朗日中值定理. 为了使用拉格朗日中值定理得到结论（出现导数），可考虑对函数$F(x)=\int_0^x f(t)dt$使用定理；关键是$(0,\pi)$内c点的确定，可通过已知条件由分部积分法和积分中值定理得到.

【详解】令$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，由于$\int_0^{\pi}f(x)dx=0$，则$F(0)=F(\pi)=0$.

又因为 $\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$，所以

$$0 = \int_0^{\pi} F'(x)\cos x dx = \int_0^{\pi} \cos x dF(x) = \int_0^{\pi} F(x)\sin x dx \overset{\text{中值定理}}{=} F(c)\sin c, (0 < c < 0)$$

从而 $F(c) = 0, (0 < c < \pi)$

对 $F(x)$ 分别在 $[0,c]$ 与 $[c,\pi]$ 上使用罗尔定理可得：存在 $\xi_1 \in (0,c)$，$\xi_2 \in (c,\pi)$ 使得 $F'(\xi_1) = 0$，$F'(\xi_2) = 0$，即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

评注：(1) 积分中值定理可改为："若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$"（利用拉格朗日中值定理可推出）；

(2) 要证的结论与某函数在一点的函数值 $f(\xi)$ 有关，但与其导数值无关，可考虑用连续函数的介值定理；

(3)要证的结论与某函数在一点的导数值 $f'(\xi)$（或更高阶导数值）有关，则应考虑用微分中值定理（罗尔定理、拉格朗日中值定理、泰勒定理）.

九、（本题满分 8 分）

设向量组 $\alpha_1 = (a,2,10)^T$，$\alpha_2 = (-2,1,5)^T$，$\alpha_3 = (-1,1,4)^T$，$\beta = (1,b,c)^T$，试问：当 a,b,c 满足什么条件时，

（1）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示唯一？

（2）β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？

（3）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但表示不唯一？并求出一般表达式.

【分析】 β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，相当于线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 是否有解的问题，有唯一解、无解、无穷多解对应 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示唯一、β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出、β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但表示不唯一. 因此线性表出问题转化为方程组解的讨论.

【详解】法一：设有一组数 x_1,x_2,x_3 使得，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$\begin{cases} ax_1-2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+x_2+x_3=b \\ 10x_1+5x_2+4x_3=c \end{cases}$$

该方程组的系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}=-a-4$

(1) $a\neq -4$ 时，行列式 $|A|\neq 0$，方程组有唯一解，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示唯一；

(2) 当 $a=-4$ 时，对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 1+c-3b \end{bmatrix}$$

所以当 $a=-4$ 且 $3b-c\neq 1$ 时，方程组无解，β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出

(3) 当 $a=-4$ 时且 $3b-c=1$ 时，方程组有无穷多解，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但表示不唯一.

因为 $\overline{A}\to\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1-b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以方程组通解为 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ -1-b \\ 1+2b \end{bmatrix}$.

故 $\beta=k\alpha_1-(2k+1+b)\alpha_2+(1+2b)\alpha_3$，其中 k 为任意常数.