新编 高中

总复习教与学

SHUXUE

数学

（修订本）

主编 田明泉

延边教育出版社

复习要点导学
例题示范讲评
课堂跟踪训练
课外巩固练习

0.618

$e^{i\pi}+1=0$

新编高中总复习教与学丛书

数 学

（修订本）

丛书总编：严治理 张 伟
编 委：严治理 张 伟 刘玉修 冯秀文
陈自钦 田明泉 杨玉林 徐凤云
张吉柱

本册主编：田明泉
副主编：施 煜 刘 雯 藏 浩 李知屹
赵品华
编 委：张敦贵 万普成 初明珍 张容华
王忠义 王 彬 薛茂昌 郁 蕾
胡红涛 刘 强 秦 岩 施 煜

延边教育出版社

新编高中总复习教与学丛书
数　　学
（修订本）
延边教育出版社出版、发行
山东滨州师专印刷厂印刷
*
787×1092 毫米　16 开　138 印张　3500 千字
2000 年 4 月第 2 版
2000 年 4 月第 1 次印刷
印数 1—20000 册
ISBN7－5437－3702－7/G·3368
全套定价：117.6 元（本册定价：16.80 元）
HTTP://WWW.sdbzjyyzl.COM.

目　　录

第一部分　目标检测

第二部分 强化训练

第三部分 考前指导

第一部分　目标检测

第一章　幂函数　指数函数和对数函数

§1　集合与集合的运算

复习要点导学

1. 集合的概念及表示

(1)集合的描述性定义:一组研究的对象

(2)集合中的元素具有互异性;无序性;确定性

(3)空集是不含____元素的集合;空集是任何集合的子集;是任何非空集合的真子集.

(4)集合的表示法:列举法;公式法;____法.

(5)元素与集合,集合与集合间关系及表示:

元素与集合间是____关系,用____或____表示.集合与集合间是子集关系用____表示或____表示;真子集关系用____表示.相等关系用____表示

注意:元素与集合间关系的相对性.

2. 集合的运算:

(1)$A\cap B=\{x|x\in A$ __∩__ $x\in B\}$,

$A\cup B=\{x|x\in A$ __∪__ $x\in B\}$

(2)全集为I,$\overline{A}=$ __$I\cap A$__

(3)运算性质:

$A\cap A=$ __A__;$A\cap\varnothing=$ __∅__;$A\cap I=$ __A__

$A\cup A=$ __A__;$A\cup\varnothing=$ __A__;$A\cup I=$ __I__

$A\cap B$ __⊆__ A;$A\cup B$ __⊇__ B;$A\cup\overline{A}=$ __I__;$A\cap\overline{A}=$ __∅__

(4)$\overline{A\cap B}=$ __$\overline{A}\cup\overline{B}$__;$\overline{A\cup B}=$ __$\overline{A}\cap\overline{B}$__

(5)$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=(A\cup\overline{A})\cap B=I\cap B=$ __B__

$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A\cap(B\cup\overline{B})=A\cap I=$

例题示范讲评

【例1】(95年全国高考题)已知 I 为全集,集合M、$N\subset I$,若$M\cap N=N$,则　　(C)

A. $\overline{M}\supseteq\overline{N}$　　B. $M\subseteq\overline{N}$

C. $\overline{M}\subseteq\overline{N}$　　D. $M\supseteq\overline{N}$

【例2】判断正误:

(1)$R=\{$实数集$\}$,$R=\{$实数$\}$,$R=\{$全体实数$\}$ ✓

(2)方程$(x-1)^2(x-2)=0$的解集为$\{1,1,2\}$ ✗

(3)方程　$(x-3)^2+\sqrt{y-1}+|z-2|=0$的解集为$\{3,1,2\}$ ✗

(4)"某校全体好学生"构成集合,"最小的有理数"不构成集合 ✓

(5)空集表示为$\{\varnothing\}$,空集是任何集合的真子集 ✗

【例3】填空:

(1)$b\in N,a\in Z$,则$\frac{a}{b}\in$ __有理数__.

(2)若$A=\{-2,2,3,4\}$,$B=\{x|x=t^2,t\in A\}$　用列举法表示B为 __$\{4,9,16\}$__

(3)用适当的符号($\in,\notin,\subset,\supseteq,=$)填空:

0 ____ $\varnothing$;$\{-\frac{3}{2}\}$ ____ Q;$\{-2\}$ ____ $\{$偶数$\}$;$\{x|x^2+1=0,x\in R\}$ ____ $\{\varnothing\}$;$\varnothing$ __⊂__ $\{0,2,\varnothing\}$.

$\{x|x\subseteq A\}$ ____ $\{A\}$;$\{2k+1,k\in Z\}$ ____ $\{2k-1,k\in Z\}$.

(4)已知集合M中有m个元素,集合N中有n个元素,则满足$M\subset P\subseteq N$的集合P的个数为 __$2^{n-m}-1$__ 个.

【例4】选择题

(1)集合$M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in Z\}$,$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$

则　集合M与N的关系为　　(C)

A. $M=N$　　B. $M\supset N$

C. $M\subset N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

(2)设全集$I=\{(x,y)|x,y\in R\}$,$M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$,$N=\{(x,y)|\ y\neq x+1\}$,那么$\overline{M\cup N}$等于 (B)

$y-3=x-2$　$x\neq2$　$y\neq3$

$y=x+1$

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)|y=x+1\}$

【例5】已知　$M=\{a,ab,\lg(ab)\}$,$N=\{0,|a|,b\}$且$M=N$,求a,b的值

课堂跟踪训练

1. 设全集为自然数集 N，$E=\{2n|n\in N\}$，$F=\{4n|n\in N\}$，那么集合 N 可表示为 (C)

A. $E\cap F$ B. $\overline{E}\cup F$

C. $E\cup\overline{F}$ D. $\overline{E}\cup\overline{F}$

2. 设全集为 R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x|f(x)\neq0\}$，$N=\{x|g(x)\neq0\}$，那么集合 $\{x|f(x)g(x)=0\}$ 等于 ( )

A. $\overline{M}\cap\overline{N}$ B. $\overline{M}\cap N$

C. $M\cup\overline{N}$ D. $\overline{M}\cup\overline{N}$

3. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+1|,2\}$，$\overline{A}=\{5\}$，则 a 的值是 2, −4 .

4. 已知 $A=\{x|x^2-2x-3\leqslant0\}$，$B=\{x|x^2+bx+c\leqslant0\}$，$\overline{A}\cup B=R$，$\overline{A}\cap B=\{x|3<x\leqslant4\}$，求 b、c 的值.

课外巩固练习

1. 若集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，$A\cup B=\{1,3,x\}$，满足条件的实数 x 的个数为 ( )

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

2. 已知 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x|x-a<0\}$ 且 $A\cap B=\varnothing$，那么 a 的取值范围是 ( )

A. $\{a|-\infty<a\leqslant-2\}$

B. $\{a|-\infty<a\leqslant-2$ 或 $a\geqslant4\}$

C. $\{a|-\infty<a<-2\}$

D. $\{a|-\infty<a\leqslant-2$ 或 $a>4\}$

3. 已知非空集合 $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 且若 $a\in M$，则 $6-a\in M$，那么集合 M 的个数为 (D)

A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

4. 设集合 $M=\{x|x>2\}$，$P=\{x|x<3\}$，那么"$x\in M$ 或 $x\in P$"是"$x\in M\cap P$"的 ( )

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分又非必要条件

5. 用另一种形式表示集合：

$\{a|\frac{6}{5-a}\in N,a\in Z\}=$ $\{-1,2,3,4\}$

$\{(x,y)|x+y=6\ \ x,y\in N\}=$ $\{(1,5),(2,4),(3,3)\}$

6. 如果集合 A 含有 10 个元素，集合 B 含有 8 个元素，集合 $A\cup B$ 含有 15 个元素，则集合 $A\cap B$ 含有 3 个元素；B 中含有 5 个不属于 $A\cap B$ 的元素.

7. 已知集合 $A=\{a,a+d,a+2d\}$，$B=\{a,aq,aq^2\}$ (a 为已知量)，若 $A=B$，求 d,q

8. 已知 $A=\{y|y=x^2+2x+4,x\in R\}$，$B=\{z|z=ax^2-2x+4a,x\in R\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

9. 已知集合 $P=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$，$Q=\{x|k+1\leqslant x\leqslant2k-1\}$

求满足 $P\cap Q=\varnothing$ 的实数 k 的取值范围.

10. 已知集合 $M=\{x|x<-3$ 或 $x>5\}$，$N=\{x|(x-3a)(x+2a)<0\}$，若使 $M\cap N=\varnothing$，求 a 的取值范围.

§2 映射与函数及反函数

复习要点导学

1. 映射：

(1)映射是从集合 A 到集合 B 的一对一或多对一的对应．

(2)集合 A 中任何一个个元素，在映射法则 f 下，集合 B 中都有唯一的元素与之对应．

(3)集合 B 中的元素被对应到的都有原象，象的集合 M 与集合 B 的关系为 $M\subseteq B$．

(4)映射由 3 部分组成．

2. 函数：

(1)函数是______间的特殊映射

(2)函数由____部分组成的一个整体，________起决定作用．

(3)对函数定义域内____实数，通过法则 f，值域中都有____的函数值与之对应．

3. 反函数

(1)函数________有反函数，______的映射确定的函数，有反函数．

(2)求反函数的步骤为：反解；改写；确定定义域．

(3)函数与其反函数的定义域，值域间关系为_____．

(4)函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线____对称．

(5)若点 $P(x_0,y_0)$ 在函数 $y=f(x)$ 的反函数的图象上，则点 $P'(y_0,x_0)$ 一定适合________．

例题示范讲评

【例 1】(92 年全国高考题)函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数 ( )

A. 是奇函数，它在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

B. 是偶函数，它在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

C. 是奇函数，它在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

D. 是偶函数，它在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

【例 2】判断下列对应是否是由 A 到 B 的映射，并说明理由．

(1) $A=N,B=N,f:x\to|x-3|$ × $x\neq3$

(2) $A=N,B=\{-1,1,2,-2\},f:x\to(-1)^x$ √

(3) $A=Z,B=Q,f:x\to\frac{2}{x}$ × $x\neq0$

(4) $A=N,B=R,f:x\to x$ 的平方根 × 对应2个数

【例 3】已知 (x,y) 在映射 f 作用下的象是 $(x+y,xy)$

(1)求 $(-2,3)$ 在 f 作用下的象，

(2)若在 f 作用下的象是 $(2,-3)$，求它的原象

【例 4】在① $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$，② $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$，③ $y=|x|$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$，④ $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$，⑤ $y=x^0$ 与 $y=1$ 这五组函数中，表示同一函数的组数是 (C)

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【例 5】在同一坐标系中，下列哪一组的两个函数的图象是相同的 (C)

A. $y=f(x)$ 与 $x=f(y)$

B. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$

C. $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ √

D. $x=f(y)$ 与 $x=f^{-1}(y)$

课堂跟踪训练

1. 设 (x,y) 在映射 f 下的象是 $(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2})$，则在 f 下 $(-5,2)$ 的原象是 ( )

A. $(-10,4)$ B. $(-3,-7)$

C. $(-6,-4)$ D. $(-\frac{3}{2},-\frac{7}{2})$

2. 下列函数互为反函数的是 ( )

A. $y=x^2$ 与 $y=\pm\sqrt{x}$

B. $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$

C. $y=x^2$ 与 $x=y^2$

D. $y=x^2(x\in\overline{R^+})$ 与 $y=-\sqrt{x}$

3. 已知集合 $A=Z,B=\{x|x=2n+1,n\in Z\},C=R$，且从 A 到 B 的映射是 $x\to 2x-1$，从 B 到 C 的映射是 $y\to\frac{1}{3y+1}$，则从 A 到 C 的映射是________________.

4. 函数 $f(x)=2x^2-4x+1$ 在 $[-4,0]$ 上的反函数是____________________

5. 已知 $f(x)=\frac{2^x}{1+2^x}(x\in R)$，求 $f^{-1}(\frac{1}{3})$

课外巩固练习

1. 确定函数 $y=2(x^2+1)$ 的映射是：①R 到 R 的映射；②R^+ 到 R^+ 的映射；③R 到 $[1,\infty)$ 的映射；④R 到 $[2,\infty)$ 的映射，其中正确的有 (AC)

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

2. 当 $x\in(0,1)$ 时，对相同的 x 值，函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 与其反函数 $f^{-1}(x)$ 的相应函数值之间总能成立的是 ( )

A. $f(x)>f^{-1}(x)$　　B. $f(x)=f^{-1}(x)$

C. $f(x)<f^{-1}(x)$　　D. 不确定

3. 设 $A=R,B=R^+$，则下述对应法则中能构成由集合 A 到集合 B 映射的是 ( )

A. $f:x\to|x|$　　B. $f:x\to x^2-1$

C. $f:x\to\sqrt{x}+1$　D. $f:x\to x^2+1$

4. 若函数 $f(x)$ 的图象经过 $(0,-1)$ 点，则函数 $f(x+4)$ 的反函数的图象必经过 ( )

A. $(-1,-4)$　B. $(4,-1)$

C. $(-4,-1)$　D. $(1,-4)$

5. 函数 $y=x^2-3x+1(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的反函数是____________________.

6. 从集合 $A=\{a,b\}$ 到 $B=\{c,d,e\}$ 可建立______个不同的映射；从集合 B 到 A 可建立______个不同的映射.

7. 若 $f:y=3x+1$ 是从集合 $A=\{1,2,3,k\}$ 到集合 $B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$ 的一个映射，求自然数 a、k 的值及集合 A、B.

8. 已知 $f(x)=\frac{2x+1}{x+a}$，其中 $a\neq\frac{1}{2}$

(1)求这个函数的反函数；

(2)若这个函数的图象与它的反函数的图象重合，求 a 的值，

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\leqslant -1)\\ x^2 & (-1<x<2)\\ 2x & (x\geqslant 2)\end{cases}$

若 $f(x)=3$，求 x 的值

10. 给定实数 $a,a\neq 0$ 且 $a\neq 1$，设函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ $(x\in R,x\neq\frac{1}{a})$

求证：(1)这个函数的图象自身关于直线 $y=x$ 对称；

(2)经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线不平行于 x 轴

$y=\frac{1-x}{2x+5}$. 求值域　分子,分母 x 次数同都可用此方法.

$y=\frac{-\frac{1}{2}(2x+5)+1+\frac{5}{2}}{2x+5}=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{7}{2}}{2x+5}$

得 $y\neq-\frac{1}{2}$

§3　函数的性质一:定义域、值域、解析式

复习要点导学

1. 定义域:函数的自变量自身的取值范围.

2. 通常情况下函数有意义需:分母不为零,偶次根下非负,真数大于零,底大于零且不为 1,反正余弦函数的自变量在 −1 与 1 之间等.

3. 函数的值域,依赖于法则的同时也依赖于________.

4. 解析式相同的函数______是相同的函数.

5. $y=f(x)$ 与 $y=f(t)$ 及 $a=f(b)$ 是______的函数.

例题示范讲评

【例 1】(96 年上海高考题)函数 $y=\frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$ 的定义域是________.

【例 2】(1)已知 $f(x)=\frac{\sqrt{2x+5}}{\lg_{(x+1)}(3-x)}$,求其定义域

(2)已知 $f(2x)$ 的定义域是 $(0,2)$,值域是 $[0,4]$,求 $f(x+2)$、$f(x^2)$ 的定义域、值域.

【例 3】(1)已知 $f(x)=2x+3$,$g(x)=\frac{1}{x^2-2}$

①求 $f(x^2)$　②求 $g(\frac{1}{x})$

③求 $f[g(x)]$　④求 $g[f(x)+2]$

(2)已知 $f(x)$ 是一次函数　且 $f[f(x)]=16x+25$,求 $f(x)$ 的解析式

(3)已知 $f(1+\frac{1}{x})=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$,求 $f(x)$ 的解析式

【例 4】求下列函数的值域:

(1)$y=\frac{3x+2}{5-4x}$　　(2)$y=\frac{3x^2+2}{5-4x^2}$

(3)$y=2x-\sqrt{1-x}$　　(4)$y=2x-\sqrt{1-x^2}$

(5)$y=\frac{2x}{x^2+x+1}$

课堂跟踪训练

1. 已知 $-b<a<0$ 且函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$,则函数 $F(x)=f(x)+f(-x)$ 的定义域是　(　　)

A. $[a,b]$　　B. $[-b,-a]$

C. $[-b,b]$　　D. $[a,-a]$

2. 函数 $y=\frac{2}{2\cos x-1}$ 的值域是　(　　)

A. $[-\frac{2}{3},2]$

B. $(-\infty,-\frac{2}{3}]\cup[2,\infty)$

C. $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,2]$

D. $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

3. 函数 $y=2x+\sqrt{2x-1}$ 的值域为__________.

4. 若函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $(-2,3)$,则函数 $f(\frac{1}{x}+2)$ 的定义域为________________.

5. 已知 $f(x)$ 是二次函数,满足 $f(2x)+f(3x+1)=13x^2+6x-1$,则 $f(x)$ 的表达式__________.

6. 若实数 x、y 满足 $3x^2+2y^2=6x$,分别求 x 与 x^2+y^2 的取值范围.

课外巩固练习

1. 函数 $y=\frac{1}{x-|x|}$ 的定义域是 ( )

A. $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

B. $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$

D. $(-\infty,0)$

2. 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$ 则 $f(x)$ 为( )

A. x^2-1　　B. x^2+1

C. x^2+2　　D. x^2+x

3. 函数 $y=2-\sqrt{-x^2+4x}$　$x\in[0,4]$ 的值域是 ( )

A. $[-2,2]$　　B. $[1,2]$

C. $[0,2]$　　D. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

4. 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$ 且 $f(x+m)+f(x-m)$ 的定义域为 ϕ,则正数 m 的取值范围是( )

A. $0<m<1$　　B. $0<m\leqslant\frac{1}{2}$

C. $0<m<\frac{1}{2}$　D. $m>\frac{1}{2}$

5. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2x^2+1$,则 $f(x-1)=$__________.

6. 已知函数 $f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2+x+1}{x^2}$,则 $f(x)$ 在区间 $[-1,\frac{3}{4}]$ 上的最大值为______,最小值为_______.

7. 求下列函数的定义域

(1) $y=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}+(-2x+3)^0$

(2) $y=\sqrt{\sin x}-\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$

(3) $y=\log_{\frac{1}{2}}\{\log_2[\log_a(x^2-1)]\}(a>0,a\neq1)$

8. 求下列函数的值域

(1) $y=2x+\sqrt{13-4x}(x\leqslant\frac{13}{4})$

(2) $y=\frac{3x^2+3x+1}{x^2+x-1}$

(3) $y=\frac{4x-1}{3x+1}$

(4) $y=\sqrt{x}+\sqrt{5-x}$

(5) $y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+15$

9. (1) 若 $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$,求 $f(x)$

(2) 对于 $f(x)$,当 $x\neq0$ 时恒有 $f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x$,解方程　$f(x)=f(-x)$

10. (1) 设 $A=[1,b]$,$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+1(x\in A)$,$f(x)$ 的值域也为 A,求 b 的值.

(2) 若实数 x、y 满足 $x^2+y^2=2x$,求 x^2-y^2 的取值范围.

§4 函数的性质二:单调性、奇偶性、周期性

复习要点导学

1. 单调递增(减)函数:对给定区间$[a,b]$上的______x_1、x_2,如果$x_1<x_2$,都有$f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$),则函数$f(x)$为区间______上的递增(减)函数.

2. 奇(偶)函数:对函数$y=f(x)$______内的______x都有$f(-x)=-f(x)$($f(-x)=f(x)$),则函数$f(x)$为奇(偶)函数.奇(偶)函数的定义域关于____对称.

3. 奇函数在对称区间上的单调性______,奇函数的图象关于____对称.

偶函数在对称区间上的单调性______,偶函数的图象关于______对称.

4. 周期函数:对函数$y=f(x)$,如果存在一个不为零的______T,使得x自身取定义域内的每个值时,$f(x+T)=f(x)$都成立,那么函数$y=f(x)$叫周期函数.

例题示范讲评

【例1】(96年全国高考题)设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,$f(x+2)=-f(x)$,当$0\leqslant x\leqslant 1$时,$f(x)=x$,则$f(7.5)$等于 ( )

A. 0.5　　B. -0.5

C. 1.5　　D. -1.5

【例2】(1)求证:$f(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}(a>0,a\neq 1)$为奇函数.

(2)讨论函数$f(x)=x+\dfrac{a}{x}$的单调性$(a>0)$

【例3】定义在$[-2,2]$上的偶函数$g(x)$,当$x\geqslant 0$时,$g(x)$单调递减,若$g(1-m)<g(m)$成立,求m的范围.

【例4】已知函数$f(x)$,对任意x、$y\in R$,都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$

且$x>0$时,$f(x)<0$,$f(1)=2$

(1)求证$f(x)$为奇函数

(2)求$f(x)$在$[-3,3]$上的最大值和最小值.

【例5】(1989年高考题)设$f(x)$是定义在区间$(-\infty,\infty)$上以2为周期的函数,对$k\in Z$,用I_k表示区间$(2k-1,2k+1]$

已知当$x\in I_0$时,$f(x)=x^2$

(1)求$f(x)$在I_k上的解析表达式;

(2)对自然数k,求集合$M_k=\{a|$使方程$f(x)=ax$在I_k有两个不相等的实根$\}$

课堂跟踪训练

1. 如果奇函数$f(x)$在区间$[3,7]$上为增函数,且最小值为5,那么$f(x)$在$[-7,-3]$上是 ( )

A. 增函数且最小值为-5

B. 增函数且最大值为-5

C. 减函数且最小值为-5

D. 减函数且最大值为-5

2. 已知函数$f(x)=(x^2+2x-3)^2$,那么 ( )

A. $f(x)$在区间$[-1,1]$上是增函数

B. $f(x)$在区间$(-\infty,-1]$上是增函数

C. $f(x)$在区间$[-1,1]$上是减函数

D. $f(x)$在区间$(-\infty,-1]$上是减函数

3. 设$f(x)$为$(-\infty,\infty)$上的偶函数,$f(x+2)=-f(x)$,当$0\leqslant x\leqslant 1$时,$f(x)=x$,则$f(-8.5)$等于 ( )

A. 0.5　　B. -0.5

C. 1.5　　D. -1.5

4. 已知函数 $f(x)=x^2+\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ 且 $f(2)=4.627$,那么 $f(-2)$ 等于 ( )

A. -4.627 B. 4.627

C. -3.373 D. 3.373

5. 已知 $f(x)$ 为偶函数,且当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时,$f(x)=x+1$,则当 $0<x\leqslant 1$ 时,$f(x)=$______.

6. 函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的函数,a 和 b 是不等的两实数,$f(x)$ 满足 $f(a-x)=f(a+x)$ 且 $f(b-x)=f(b+x)$,则 $f(x)$ 是以______为周期的周期函数.

7. 设 $f(x)=c+bx-x^2$ 且对任意 $x\in R$ 有 $f(2-x)=f(2+x)$ 解不等式:

$$f[\log_{\frac{1}{2}}(x^2+x+\frac{1}{2})]<f[\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-x+\frac{5}{8})]$$

8. 方程 $2ax^2-x-1=0(a>0,a\neq 1)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有且只有一个实根,求函数 $y=a^{-3x^2+x}$ 的单调区间

课外巩固练习

1. 已知函数 $f(x)$、$g(x)$ 定义在同一区间上,$f(x)$ 是增函数,$g(x)$ 为减函数,且 $g(x)\neq 0$,则在这个区间上 ( )

A. $f(x)+g(x)$ 一定是减函数

B. $f(x)-g(x)$ 一定是增函数

C. $f(x)\cdot g(x)$ 一定是增函数

D. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 一定是增函数

2. 如果不等式 $\log_x\dfrac{3}{4}<a$ 的解集为 $\{x|x>1$ 或 $0<x<\dfrac{3}{4}\}$,那么常数 a 等于 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. $y=f(x)$ 是定义在 R 上最小正周期为 T 的周期函数,且 $x\in(0,T)$ 时,$y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$,那么当 $x\in(T,2T)$ 时,$y=f(x)$ 的反函数是 ( )

A. $y=f^{-1}(x)$ B. $y=f^{-1}(x+T)$

C. $y=f^{-1}(x-T)$ D. $y=f^{-1}(x)+T$

4. 关于 x 的方程 $\sqrt{1-x^2}=x-k$ 有两个不等的实根,则实数 k 的取值范围是 ( )

A. $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ B. $(-\sqrt{2},-1]$

C. $[1,\sqrt{2})$ D. $[-1,1]$

5. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}|x+1|$ 的单调增区间是______

6. 设 $f(x)$ 是以 4 为周期的偶函数,且 $f(-2)<f(-1)$, 则 $f(9)$ 与 $f(10)$ 的大小关系为______.

7. 已知函数 $f(x)=\log_a(a-a^x)(a>1)$

(1)求 $f(x)$ 的定义域和值域;

(2)讨论函数的单调性;

(3)解方程 $f^{-1}(x^2-2)=f(x)$

8. (1)若 $f(x)$ 为奇函数,且对任意实数 x,满足 $f(x+4)=f(x)$,$f(-1)=3$,求 $f(13)$;

(2)试证 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -x^2+2x+1 & (x<0)\end{cases}$ 是奇函数,并作出函数图象.

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}(a、b、c\in Z)$ 是奇函数,$f(1)=2$,$f(2)<3$. 且 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增

(1)求 a、b、c 的值;

(2)当 $x<0$ 时,$f(x)$ 的单调性如何?证明你的结论

10. (1)已知 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ 对一切 x、y 都成立,且 $f(0)\neq 0$,求证 $f(x)$ 是偶函数;

(2)$f(x)$ 是定义在 R^+ 上的增函数,且 $f(\dfrac{x}{y})=f(x)-f(y)$

①求 $f(1)$ 的值;

②若 $f(6)=1$,解不等式 $f(x+3)-f(\dfrac{1}{x})<2$

§5　二次函数、二次方程、二次不等式

复习要点导学

1. 二次函数：$y=ax^2+bx+c(a\neq0,x\in R)$

二次方程：$ax^2+bx+c=0(a\neq0,x\in R)$

二次不等式：$ax^2+bx+c>0(ax^2+bx+c\leqslant0)(a\neq0,x\in R)$.

2. 区间上二次函数的最值：

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0,x\in R)$当，$x=-\dfrac{b}{2a}$时

$$\begin{cases}a\underline{\qquad}0 & \text{有最}\underline{\qquad}\text{值}\underline{\qquad\qquad}\\ a\underline{\qquad}0 & \underline{\qquad}\end{cases}$$

函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0,x\in[m,n])$

$a>0$ 时

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}<m, f(x)\text{单调递增，最小值为 } f(m)\text{，最大值为 } f(n)\\ m\leqslant-\dfrac{b}{2a}\leqslant n\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}-m<n+\dfrac{b}{2a}\begin{cases}\text{最小值为}\underline{\qquad}\\ \text{最大值为}\underline{\qquad}\end{cases}\\ -\dfrac{b}{2a}-m>n+\dfrac{b}{2a}\begin{cases}\text{最小值为}\underline{\qquad}\\ \text{最大值为}\underline{\qquad}\end{cases}\end{cases}\\ -\dfrac{b}{2a}>n\quad f(x)\text{单调递减，最小值为 } f(n)\text{，最大值为 } f(m)\end{cases}$$

3. 区间上二次方程的根：

(1)关于 x 的二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0,a、b、c、x\in R)$

当$\triangle=b^2-4ac>0$ 时，方程有______的实根；$\triangle=0$ 时，方程有______的实根；$\triangle<0$ 时，方程______(有一对______).

(2)方程 $ax^2+bx+c=0(a>0,x\in[m,n])$设 $f(x)=ax^2+bx+c$

$$①\text{当}\begin{cases}\triangle=b^2-4ac>0\\ f(m)\geqslant0\\ f(n)\geqslant0\\ m\leqslant-\dfrac{b}{2a}\leqslant n\end{cases}$$

时，方程有两个不等的实根．

$$②\text{当}\begin{cases}\triangle=0\\ m\leqslant-\dfrac{b}{2a}\leqslant n\end{cases}\text{时，方程有相等的两个实根．}$$

③当 $f(m)\cdot f(n)\leqslant0$ 且 $f(m)$、$f(n)$不同时为零时，方程有唯一的实根．

(3)当$\triangle$________0 或$\begin{cases}f(m)<0\\ f(n)<0\end{cases}$时，方程没有实根

4. 区间上二次不等式的恒成立：

二次不等式 $ax^2+bx+c>0(\leqslant0)(x\in R,a\neq0)$，当__________时，恒成立．

二次不等式 $ax^2+bx+c>0(\leqslant0)(a\neq0,x\in[m,n])$当 $a>0$ 时，__________或__________或__________时，恒成立．

$a<0$ 略

5. 函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴交点的______就是方程 $f(x)=0$ 的根

方程　$f(x)=0$ 的____就是不等式 $f(x)>0(\leqslant0)$解集的端点

注意：此内容不应死记，而应结合相应的图象在理解的基础上记忆．

例题示范讲评

【例 1】(97 年全国高考题)设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1、x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$，

(1)当 $x\in(0,x_1)$时，证明 $x<f(x)<x_1$；

(2)设函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=x_0$ 对称，证明 $x_0<\dfrac{x_1}{2}$

【例 2】(1)已知 $f(x)=x^2+3x-5\quad x\in[t,t+1]$，若 $f(x)$的最小值为 $h(t)$，写出 $h(t)$的表达式．

(2)已知 $f(x)=-x^2+ax+6,x\in[2,3]$，求 $f(x)$的最大与最小值．

【例 3】关于 x 的方程 $9^{-|x-2|}-4\times3^{-|x-2|}-a=0$ 有实根的充要条件是　(　　)

A. $a\geqslant-4$　　B. $-4\leqslant a<0$

C. $-3\leqslant a<0$　　D. $a\leqslant0$

【例 4】关于 x 的方程 $\log_4^2x-m\log_4x^2+5=0$ 在$(16,+\infty)$上有两个不同的实根，求实数 m 的范围．

【例5】函数 $f(x)=x^2+ax+3$，当 $x\in[-2,2]$ 时 $f(x)\geqslant a$ 恒成立，求 a 的取值范围．

【例6】要使不等式 $1+2^x+4^x\cdot a>0$ 在 $(-\infty,1]$ 上恒成立，求 a 的取值范围．

课堂跟踪训练

1. 已知 $2x^2-3x\leqslant0$ 则函数 $f(x)=x^2+x+1$ （　）

A. 有最小值 $\frac{3}{4}$，但无最大值

B. 有最小值 $\frac{3}{4}$，有最大值 1

C. 有最小值 1，有最大值 $\frac{19}{4}$

D. 无最小值，也无最大值

2. 若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上是减函数，那么实数 a 的取值范围是 （　）

A. $a\leqslant-3$　B. $a\geqslant-3$

C. $a\leqslant5$　D. $a\geqslant3$

3. 函数 $y=4-\log_{0.5}(3+2x-x^2)$ 有最____值为________．

4. x_1、x_2 是方程 $x^2+ax+a-\frac{1}{2}=0$ 的实根，当 $a=$________时，表达式 $(x_1-3x_2)(x_2-3x_1)$ 取得最大值．

5. (1)已知函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 在 $[0,m]$ 上有最大值 3，最小值 2，求正数 m 的取值范围．

(2)已知函数 $y=x^2+mx-1$ 在区间 $[0,3]$ 上有最小值 -2，求实数 m 的值．

课外巩固练习

1. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2)$ 的递减区间为 （　）

A. $(-\infty,1)$　B. $(2,\infty)$

C. $(-\infty,\frac{2}{3})$　D. $(\frac{2}{3},\infty)$

2. “$-4<k<0$”是函数 $y=kx^2-kx-1$ 恒为负的 （　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 即不充分又不必要条件

3. 若 x、y 是方程 $x^2-2ax+a+6=0$ 的两实根，则 $(x-1)^2+(y-1)^2$ 的最小值是 （　）

A. $-\frac{49}{4}$　B. 18　C. 8　D. 不存在

4. 方程 $3x^2+6x-\frac{1}{x}=0$ 的实根的个数为 （　）

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

5. 函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}-x^2-\frac{1}{x^2}(x<0)$ 的值域为________

6. 已知方程 $mx^2-4mx+1=0$ 的两个正根 α、β 满足 $|\lg\alpha-\lg\beta|\leqslant1$，那么 m 取值范围为________

7. 函数 $f(x)=(4-3a)x^2-2x+a$，$x\in[0,1]$，求 $f(x)$ 的最小值．

8. $f(x)=\log_a(x-ka)-\log_{a^2}(x^2-a^2)$

(1)求 $f(x)$ 的定义域

(2)方程 $f(x)=0$ 有解，求 k 的取值范围．

9. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，给定 α、$\beta(\alpha<\beta)$，且满足 $a^2[(\alpha+\beta)^2]+2a[b(\alpha+\beta)-c\alpha\beta]+b^2+c^2=0$

(1)证明 $f(\alpha)=f(\beta)=0$

(2)是否存在实数 t，使当 $x\in(\alpha+t,\beta-t)$ 时 $f(x)>0$，若不存在说明理由；若存在，指出 t 的取值范围．

10. 设 m 是实数，$M=\{m|m>1\}$，$f(x)=\log_3(x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1})$

(1)证明：当 $m\in M$ 时，$f(x)$ 对所有实数都有意义，反之，若 $f(x)$ 对所有实数都有意义，则 $m\in M$

(2)当 $m\in M$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值

(3)求证：对每个 $m\in M$，函数 $f(x)$ 的最小值都不小于 1．

§6 根式与幂、指数式与对数式

复习要点导学

1. 根式：

式子________ $(n\in N)$ 叫做根式，任意实数的奇次方根有____个，记作______，任意正实数的偶次方根有____个，记作________.

$(\sqrt[n]{a})^n=$____,

n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=$____,

n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=$____$=$________

3. 幂的运算法则：

$a^m\cdot a^n=$______, $\dfrac{a^m}{a^n}=$______, $(a^m)^n=$________

$(ab)^m=$________, $(a、b>0,m、n\in Q)$

4. 指数式、对数式：

用底 a 与指数 b 表示幂 N，$N=a^b(a>0,a\neq1)$

则 用幂指数及幂表示底 $a=$________.

用底数及幂表示指数 $b=$________.

5. 对数的运算法则及换底公式

$\log_a(M\cdot N)=$________ $(M>0,N>0,a>0,a\neq1)$

$\log_a\dfrac{M}{N}=$________

$\log_aN^m=$______,

$\log_a\sqrt[m]{N}=$________.

$\log_aN=\dfrac{\log_bN}{\log_ba}$

$\log_ab=$________; $\log_{a^n}b^m=$________;

$a^{\log_aN}=$____; $\log_aa=$____; $\log_a\dfrac{1}{a}=$______.

例题示范讲评

【例 1】(95 年上海高考题)已知 $\log_3x=-\dfrac{1}{\log_23}$，那么 $x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=$________

【例 2】求(1)$y=a^{-\frac{4}{3}}$ (2)$y=a^{\frac{5}{4}}$

(3)$y=a^{-\frac{3}{5}}$ (4)$y=a^{-\frac{1}{2}}$有意义的 a 的范围及 y 的取值范围.

【例 3】(1)下列各式中正确的是 ( )

A. $-4^0=1$ B. $(5^{-\frac{1}{2}})^2=5$

C. $(-3^{m-n})^2=9^{m-n}$ D. $(-2)^{-1}=\dfrac{1}{2}$

(2)下列计算一定正确的是 ( )

A. $a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{4}{3}}=a$ B. $a^{\frac{3}{4}}\div a^{\frac{3}{4}}=a$

C. $a^{-4}\cdot a^4=0$ D. $(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}}=a$

【例 4】求值(1)$\dfrac{\log_m2n-\log_m2b}{\log_ma-\log_mb}$

(2)设 $\lg x-\lg y=a$，求 $\lg5x^3-\lg5y^3$ 的值

(3)设 $\log_a(x+y)=\sqrt{3}$，$\log_ax=1$，求 $\log_ay$

【例 5】求值：(1)$3^{|\log_3\frac{1}{9}|}$ (2)$\pi^{3\log_\pi5}$

(3)化简：$\sqrt{3^{2\log_9(\lg x)^2}-4\lg\sqrt{x}-\log_a\sqrt{\frac{1}{a}}}$

课堂跟踪训练

1. 将 $(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{3}}$ 表示成根式的形式是 ( )

A. $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}$ B. $(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^{\frac{1}{3}}$

C. $\sqrt[3]{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$ D. $(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^3$

2. 化简 $(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}})(-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(\frac{1}{3}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$ 的结果是 ( )

A. $6a$ B. $-a$ C. $-9a$ D. $9a$

3. 已知 $\log_ax=2,\log_bx=1,\log_cx=4$，则

$\log_{abc}x=$__________.

4. 已知 $m=\log_2 5$，则 $2^m-m\lg 2-4=$__________.

5. 已知正实数 x,y,z 满足 $3^x=4^y=6^z$

(1)求证：$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2y}$；

(2)比较 $3x,4y,6z$ 的大小

课外巩固练习

1. 已知 x,y,z 都是大于1的正数，$m>0$ 且 $\log_x m=24$，$\log_y m=40$，$\log_{xyz}m=12$，则 $\log_z m$ 的值为 ( )

A. $\frac{1}{60}$　B. 60　C. $\frac{200}{3}$　D. $\frac{3}{20}$

2. 已知 $\log_8 3=p$，$\log_3 5=q$，则 $\lg 5$（用 p,q 表示）等于 ( )

$\log_8 3=\frac{\lg 3}{\lg 8}=\frac{\lg 3}{3\lg 2}=\frac{\lg 3}{3(\lg 10-\lg 5)}$

A. $\frac{3p+q}{5}$　B. $\frac{1+3pq}{p+q}$

C. $\frac{3pq}{1+3pq}$　D. p^2+q^2

3. 若 $a=1.5^{-\frac{1}{2}}$，$b=0.5^{-\frac{1}{2}}$，$c=1$，则 a,b,c 的大小顺序为 ( )

A. $a<c<b$　B. $a<b<c$

C. $c<b<a$　D. $b<c<a$

4. 若 $x\neq 1$，则与 $\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_4 x}+\frac{1}{\log_5 x}$ 相等的式子为 ( )

A. $\frac{1}{\log_{60}x}$　B. $\frac{1}{\log_3 x\log_4 x\log_5 x}$

C. $\frac{1}{\log_x 60}$　D. $\frac{12}{\log_3 x+\log_4 x+\log_5 x}$

5. 已知 $\log_8 27=m$，则 $\log_6 16=$__________.

6. $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}}=$________，$a^{\frac{\log_m a-\log_m b}{\log_m a}}=$________.

7. 已知关于 x 的方程 $x^2-(\log_2 b+\log_a 2)x+\log_a b=0$ 的两根为 -1 和 2，求实数 a,b 的值.

8. 解下列方程(1) $3\times 16^x+36^x=2\times 81^x$

(2) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\times 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$

(3) $10^{\lg^2 x}+x^{\lg x}=20$

(4) $\log_{0.5x}2-\log_{0.5x^3}x^2=\log_{0.5x^3}4$

9. 设 $a^2+b^2=c^2$，求证

$\log_{(c+b)}a+\log_{(c-b)}a=2\log_{(c+b)}a\cdot\log_{(c-b)}a$

10. 若关于 x 的方程 $\lg(ax)\lg(ax^2)=4$ 所有解都大于1，求实数 a 的取值范围.