

随机振动理论及其应用

俞载道
曹国敖

同济大学出版社

ISBN 7-5608-0115-3/TB·3

定 价： 2.80 元

随机振动理论及其应用

俞载道 曹国敖 编著

同济大学出版社

内 容 简 介

本书深入、系统地阐述了随机振动理论及其应用，特别是在非线性随机振动理论及地震工程中的应用。

全书共分十一章，内容包括有概率论基础知识；随机过程；线性系统的特性和平稳随机过程的传输；单、多自由度线性系统的随机响应分析；线性连续系统的随机响应分析；动力可靠度问题的分析；非线性随机振动问题以及在地震工程中的实际应用。这是一本有较高学术价值的专著，亦是研究生和科学研究人员的教材和参考书。

随机振动理论及其应用

俞载道 曹国敖

同济大学出版社

(上海四平路 1239 号)

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32印张：16 字数：409 千字

1988年7月第1版 1988年7月第1次印刷

印数：1—3000 定价：2.80 元

ISBN 7-5608-0115-3/TB·3

前 言

振动是自然界中常见的物理现象,在实际振动问题中,严格来说大都是不规则的振动,需要用概率论的方法才能描述其规律。这就导致了随机振动理论的发展。它的研究开始于五十年代初,由于电子计算机的迅速发展和普遍使用,为随机振动理论广泛地应用于航空、土木、机械工程、地震工程、海洋工程等领域创造了有利条件,并取得了丰硕的成果。我国在这方面的研究工作开展虽晚,但已引起人们的重视,特别在土木建筑、地震工程、海洋工程、机械工程、航空工程等方面。例如,由于高层建筑的普遍出现,建筑物受随机风荷载问题已经成为建筑规范中不可缺少的内容;又比如,1976年7月我国唐山大地震后,在地震工程中,研究结构在地震荷载作用下的概率分析等都需要借助于随机振动理论,因此,许多高等院校都已开设了这门课程;对于某些专业并以此作为研究生的学位课程。

本书是一本取材稍有不同的随机振动理论书,其目的在于帮助已具备结构动力学(确定性)知识的读者对随机振动理论有进一步的了解,以利其从事于结构动力学的教学和科研工作,为此,本书着重于基本概念,基本理论和方法的阐述。在内容编排和叙述方面则力求由浅入深,简明易懂,便于阅读。并适当介绍一些文献,以供进一步的深入研究。

本书是第二作者通过近几年对研究生讲授随机振动这门课程的教学实践和心得体会,在第一作者以前为研究生主讲本课程时所编写的《随机振动》讲义基础上经过增删修改而写成的。如在非线性随机振动理论这一章中,补充了一点作者和同事们最近的研究成果,还增写了地震荷载作用下结构响应的概率分析方法这一章,这是为结合地震工程的特点而写的,同时也作为理论的应用部分。

下面就本书的各部分作一简短的介绍:

第一章为引论,第二章是概率论的若干基本知识,我们设想读者已经具备这方面的基本知识,内容较简单,带有复习性质,只给出在本书中要用到的一些基本概念和结果。这与后续内容相衔接。

第三章介绍随机过程的基本原理。正确理解随机过程的基本概念特别重要,因为在随机振动问题中,结构(机械)系统的响应是受概率法则支配的,即使是简单的波形亦是一个随机过程。所谓随机是指概率的意思,而不是指复杂的意思。此外,还介绍了均方收敛准则和均方微积分等必要的知识。

第四章介绍几个在工程技术和物理问题中经常遇到的随机过程,亦是随机振动理论中常用的过程。

从第五章到第八章介绍线性系统的特性、平稳随机过程的传输、单自由度、多自由度线性系统和线性连续系统的随机响应分析。

第九章介绍动力可靠性问题的分析。结构(机械)系统的定量安全度评价是动力可靠性问题的最重要的一个内容。在随机激励下结构系统的响应,在其使用期间内能处于一限值内时,就基本上保证了结构的安全性,通过其概率大小,就能定量地评价安全度。在这章里叙述穿越分析、峰值分析、极值的概率分布以及结构的寿命问题和随机疲劳破坏。

第十章介绍非线性随机振动问题的分析。线性随机振动和非线性随机振动理论之间存在着不能泯灭的区别。虽然线性随机振动的有些基本概念可以用在非线性随机振动问题中,但绝不能冒失地把线性振动的特点照搬用于非线性随机振动问题中。例如在非线性随机振动中,解的叠加原理不再适用,输入是 Gauss 过程而系统的输出就不再是 Gauss 过程等。在这章里叙述了等价线性化法、加权等价线性化法、Fokker-Planck 法、摄动法以及 Wiener-Hermite 展开式法等。

最后一章介绍地震荷载作用下结构响应的概率分析方法,作

为随机振动理论的应用。从随机振动理论出发研究如何评价地震响应分析的方法，在这章里主要叙述确定地震时地面运动的随机模型、研究在不同随机模型的地震作用下结构响应的概率特性及最大响应分布等。

本书可作为土建、力学、机械类研究生的教科书或参考书，同时也可作为有关方面的教师、工程师及科技工作者的参考用书。结构动力学是阅读本书的必需知识。对于具备了概率论和随机过程基础知识的学生，书中有关内容可作加深的参考。在本书中还补充插入一些实际例题，以便于对理论的更好理解。在这些例题中，有些是过去已毕业的研究生在学习本课程时完成的。

在本书编写过程中，曾得到李国豪教授的大力支持和热心帮助，在百忙之中仔细审阅了本书的全部内容，并提出了许多宝贵意见，使本书更加完善，作者表示衷心感谢。此外，感谢陈晓东同志协助抄写了部分书稿。

由于我们经验不足，并限于水平，书中不免有不当之处，恳请读者指正。

作者 于同济

1986年8月

目 录

前 言

第一章 引论

第二章 概率论的若干基本知识

§ 2.1	集论简介	(6)
2.1.1	集的概念	(6)
2.1.2	集的运算	(8)
2.1.3	σ -环与 σ -代数, Borel 体	(13)
§ 2.2	概率公理与概率空间	(14)
§ 2.3	几个概率定义及定理和统计规律性	(17)
2.3.1	几个概率定义及定理	(17)
2.3.2	统计规律性 (Bernoulli 大数定理)	(19)
§ 2.4	随机变量	(20)
§ 2.5	概率函数, 概率分布函数与概率密度函数	(22)
§ 2.6	联合分布的随机变量	(27)
§ 2.7	条件分布和统计独立性	(29)
§ 2.8	随机变量的函数	(31)
2.8.1	随机变量的和	(31)
2.8.2	n 个随机变量	(33)
§ 2.9	期望值和矩	(36)
2.9.1	期望值	(36)
2.9.2	矩	(38)
§ 2.10	特征函数, 对数特征函数及随机变量的累积数	(42)
2.10.1	特征函数	(42)

2.10.2 对数特征函数	(46)
§ 2.11 条件期望	(50)

第三章 随机过程

§ 3.1 随机过程的基本概念	(52)
✓ 3.1.1 随机过程的物理描述	(52)
✓ 3.1.2 随机过程的数学描述	(54)
✓ 3.1.3 矢量随机过程	(57)
✓ 3.1.4 随机过程的分类	(58)
§ 3.2 随机过程的矩函数和累积函数	(60)
✓ 3.2.1 随机过程的矩函数	(60)
3.2.2 随机过程的累积函数	(62)
✓ § 3.3 均匀随机过程	(64)
§ 3.4 相关函数的性质及 Wiener-Khintchine 公式	(67)
3.4.1 相关函数的性质	(67)
3.4.2 Wiener-Khintchine 公式	(70)
§ 3.5 随机变量序列的收敛性	(71)
3.5.1 预备知识	(71)
3.5.2 随机变量序列的收敛性	(73)
§ 3.6 均方连续性	(77)
3.6.1 一些二阶随机过程的性质	(77)
3.6.2 均方连续性	(78)
§ 3.7 均方可微性	(80)
3.7.1 均方可微的定义	(80)
3.7.2 均方导数的性质	(82)
§ 3.8 均方积分	(83)
3.8.1 均方 Riemann 积分	(84)
3.8.2 均方 Riemann 积分的性质	(85)
3.8.3 均方 Riemann 积分的均值和相关函数	(86)

§ 3.9	随机过程的谱分解	(87)
3.9.1	随机过程的谱分解	(88)
3.9.2	演变随机过程	(98)
3.9.3	谱密度与互谱密度函数的性质	(100)
3.9.4	两个平稳随机过程之和的相关函数和谱密度	(103)
3.9.5	关于功率谱密度单位的注释及单边功率谱密 度函数	(104)
3.9.6	非平稳过程的谱密度函数	(106)
§ 3.10	周期随机过程	(107)
§ 3.11	各态历经定理及各态历经过程	(109)

第四章 几个常见的随机过程

§ 4.1	Gauss 随机过程	(114)
✓4.1.1	Gauss 分布	(114)
✓4.1.2	中心极限定理	(116)
✓4.1.3	Gauss 随机变量的联合分布	(116)
✓4.1.4	Gauss 随机过程的定义	(121)
§ 4.2	Poisson 随机过程	(122)
✓4.2.1	Poisson 随机过程	(122)
✓4.2.2	Poisson 随机过程的统计量	(125)
§ 4.3	随机脉冲过程	(130)
4.3.1	随机脉冲过程理论	(131)
4.3.2	随机散粒噪声过程和随机白噪声过程	(137)
§ 4.4	Markov 过程	(139)
4.4.1	离散型及连续型 Markov 过程	(139)
4.4.2	Chapman-Kolmogorov-Smoluchowski 方程	(142)

4.4.3 Fokker-Planck 方程.....	(145)
-----------------------------	-------

第五章 线性系统的特性和平稳随机过程的传输

§ 5.1 线性系统的特性.....	(154)
§ 5.2 线性系统的脉冲响应.....	(156)
§ 5.3 频率响应函数.....	(163)
§ 5.4 频率响应函数与脉冲响应函数之间的关系.....	(167)
§ 5.5 线性系统在单个随机激励下的响应—单个随机激励的传输.....	(169)
§ 5.6 线性系统在多个随机激励下的单个响应.....	(176)
§ 5.7 一般情况——线性系统在 l 个激励下的 m 个随机响应.....	(191)

第六章 单自由度线性系统的随机响应分析

§ 6.1 确定性振动分析理论的简要.....	(196)
§ 6.2 随机激励下系统的响应.....	(202)
§ 6.3 单自由度系统在弱平稳随机激励下的响应.....	(204)
§ 6.4 单自由度系统在非平稳随机激励下的响应.....	(216)
6.4.1 Wiener-Khintchine 公式.....	(217)
6.4.2 一般线性系统的响应.....	(218)
6.4.3 输入为非平稳白噪声过程.....	(219)
6.4.4 地震时结构的响应.....	(224)

第七章 多自由度线性系统的随机响应分析

§ 7.1 两个自由度线性系统的随机响应.....	(230)
§ 7.2 多自由度线性系统的随机响应.....	(243)

7.2.1	振型分析法	(243)
7.2.2	传递矩阵法	(253)
§ 7.3	举例	(258)

第八章 线性连续系统的随机响应分析

§ 8.1	线性连续系统的一般分析	(266)
8.1.1	线性连续系统的结构算子	(266)
8.1.2	线性连续系统的一般分析	(269)
§ 8.2	受一集中平稳随机荷载作用时简支梁的随机稳态响应	(277)
8.2.1	简支梁的动力特性	(277)
8.2.2	梁的挠度响应	(280)
§ 8.3	受分布平稳随机荷载作用下简支梁的随机稳态响应	(289)
8.3.1	n 个集中随机荷载作用下梁的响应	(290)
8.3.2	分布随机荷载作用下梁的响应	(291)
8.3.3	分布荷载为白噪声时简支梁的响应	(297)
§ 8.4	弹性梁在基础发生随机位移时的响应	(299)
§ 8.5	分布随机荷载作用下弦的响应	(302)
§ 8.6	分布随机荷载作用下薄板的响应	(309)
§ 8.7	依赖于时间的边界条件	(314)

第九章 动力可靠度分析

§ 9.1	概述	(317)
§ 9.2	平稳 Gauss 窄带过程的统计特性	(320)
§ 9.3	首次穿越分析	(325)
9.3.1	水平穿越分析	(325)
9.3.2	水平穿越的另一种推导	(329)

9.3.3	限值穿越问题的推广	(335)
§ 9.4	峰值的分布或极大值的概率密度函数	(341)
9.4.1	峰值的分布	(341)
9.4.2	两种特殊情况	(346)
9.4.3	峰值(最大值)分布公式的另一种推导	(351)
§ 9.5	极值的概率分布	(352)
§ 9.6	结构的寿命问题	(355)
§ 9.7	窄带过程的疲劳破坏	(360)

第十章 非线性随机振动问题

§ 10.1	概述	(367)
§ 10.2	Markov 矢量法和 Fokker-Planck 法	(368)
§ 10.3	摄动法	(373)
§ 10.4	等价线性化法	(379)
10.4.1	单自由度系统	(379)
10.4.2	多自由度系统	(384)
§ 10.5	加权等价线性化法	(385)
§ 10.6	Wiener-Hermite 展开式法	(392)
10.6.1	Wiener-Hermite 展开式法	(392)
10.6.2	举例	(405)

第十一章 地震荷载作用下结构响应的 概率论分析

§ 11.1	概述	(423)
§ 11.2	平稳随机过程的地震模型	(425)
11.2.1	平稳脉冲随机过程	(426)
11.2.2	白噪声作用下结构响应的最大值	(435)

11.2.3 过滤白噪声地震模型	(443)
§ 11.3 非平稳随机过程地震模型	(448)
11.3.1 非平稳脉冲系列和散粒噪声地震模型	(449)
11.3.2 非平稳 Gauss 随机过程地震模型	(457)
11.3.3 过滤散粒噪声地震模型	(471)
§ 11.4 非线性结构系统的随机地震响应分析	(478)
§ 11.5 举例	(481)
附录 A	(492)
附录 B	(495)
主要参考文献	(497)

第一章 引 论

过去,工程师们在处理结构分析时,常常采用确定性的分析方法,假定结构(机械)的初始状态,结构(机械)的动力特性以及外加激励(或外荷载)的时间历程全部是给定的、确定的。例如,一个最简单的力学模型——单自由度系统(图 1.1 所示),在一

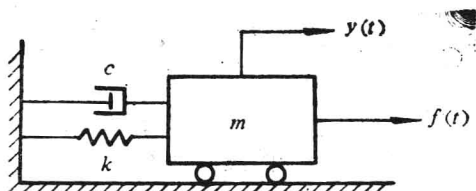


图 1.1 单自由度系统力学模型

外加激励力 $f(t)$ 作用下,如果当时间 $t=0$ 时,初始位移和初始速度分别为

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ \dot{y}(0) &= v_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

则在任意时间 t 时的位移响应 $y(t)$ 可写成

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp(-\xi\omega t) \left[y_0 \cos \omega_d t + \frac{1}{\omega_d} (v_0 + \xi\omega y_0) \sin \omega_d t \right] \\ &\quad + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t f(\tau) \exp[-\xi\omega(t-\tau)] \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \\ &= \exp(-\xi\omega t) \left[y_0 \cos \omega_d t + \frac{1}{\omega_d} (v_0 + \xi\omega y_0) \sin \omega_d t \right] \\ &\quad + \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

或写成更一般的形式:

$$y(t) = g(y_0, v_0, m, k, c, t) + \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (1-2)$$

如果式(1-2)的右端项中的元素(y_0, v_0, m, k, c 以及 $f(\tau)$ 等)都是精确地知道的话, 那末该系统的位移响应 $y(t)$ 就能正确地计算。

可是在实际情况中有些外加激励(荷载), 例如地震荷载、核爆炸时产生的冲击波荷载, 风荷载以及海浪荷载等是不确定性(随机性)的荷载。这些荷载的共同特点是, 它们不仅表现出随时间的复杂变化, 而且两次荷载不会重现同一波形。例如, 同一地基上的地震仪即使遭受相同震级的地震运动, 也决不会画出相同的时间过程, 就是说, 具有非重复性, 可以认为, 特定的地震记录是受概率法则支配而出现的。

再就初始条件而言, 对于某些工程技术问题, 初始条件也带有随机性。例如宇宙飞行器的飞行轨道, 它的初始条件表示主动飞行段末端入轨的条件, 但由于在入轨制导系统中产生随机误差和在主动飞行期间的扰动, 入轨的初始条件就带有不确定性。

在工程实践中, 我们知道, 没有任何材料(金属的和非金属的)是完全匀质的, 由于制造的误差, 没有一根梁是完全均匀一致的, 没有一个铆钉的直径是与铆钉孔的直径完全一致的, 结构系统的实际阻尼大小也是不确定的, 只是这些不确定因素相对来说可加以控制, 因此用确定性的分析方法来计算和设计还是可以的。

在实际情况中对于结构(机械)系统的分析, 严格说来, 应是不确定性的。这是所有自然界及人为现象所具有的固有特点, 但不确定的程度, 也就是随机性的程度则是各不相同的。如果随机性的程度较小时, 则可以略去这些不确定性而把问题按确定性理论来处理。如果随机性程度较大时, 那就必须按不确定性理论来分析和处理, 于是概率论的方法为结构(机械)系统的动力分析和设计提供了一种有效的数学手段。它包括识别不确定性的源, 构造它们的概率模型等。

由于科学和工程技术的迅速发展和进步, 促使概率论广泛地

应用于许多工程技术和物理问题中。例如气体的动力理论、湍流的统计理论、统计恒星动力学、通讯理论、连续体的随机振动、流行病学、人口增长等。而这又导致了概率论作为一门严格的数学科学迅速地发展，它也包括随机过程理论。随机过程理论是由描述悬浮于液体中的微小质点的 Brown 运动的需要而产生的。1905 年 Einstein 发展了一个自由质点的 Brown 运动的数学理论。而后由 Smoluchowski(1906), Fokker(1914), Planck(1917) 及其他学者所推广。Langevin(1908) 去掉质点是自由的条件而推广了 Einstein 理论。另外, Liepmann(1952)、Miles(1954)、Eringen(1957)、Crandall(1962)、Caughey(1963) 等学者在固体力学中对连续介质的 Brown 运动理论的发展作出了贡献。在流体力学中作出贡献的有 Batchelor(1953)、Hinze(1959) 等学者。随机过程理论在工程上首先应用于无线电通讯工程领域, 1944 年 Rice 用来处理信号中的噪声。人们很快认识, 到应用随机过程理论可更切合实际地处理大量工程实际问题(如结构(机械)系统的动力性态分析和设计)。由于该理论广泛地被应用于振动问题, 于是导致并形成了结构动力学的一个新兴的分支——随机振动理论。随着随机振动理论的迅速发展, 使人们对结构(机械)系统的动力性态分析和设计的了解有了显著的提高和发展。Crandall(1958)、Bolotin(1961)、Mark(1963)、Robson(1963) 及 Lin(1967) 等学者在这方面作出了贡献。我国在随机振动理论方面的研究起步较晚, 但对该理论的研究已受到人们的十分重视。国内有关科研单位、高等院校都已开展这方面的理论研究, 近年来发表了不少论文和著作。

按随机振动理论, 描述物理和工程技术问题中的微分方程是随机的。确定性的微分方程是人们所熟悉的, 而随机微分方程则在本世纪才出现。1902 年 Gibbs 在统计力学研究中第一次提出了随机微分方程问题。近卅年来, 随机微分方程的理论和应用有了迅速的发展, 内容十分丰富。为了叙述和研究的方便, 根据问