GAODENGSHUXUE JIETIFANGFA YU TONGBUZHIDAO

高等数学解题方法与同步指导

配同济大学编《高等数学》（高教五版、六版）

陈春宝　沈家骅　主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

高等数学解题方法与同步指导

配同济大学编《高等数学》(高教五版、六版)

陈春宝　沈家骅　主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书为配合同济大学数学系主编的《高等数学》(第五、六版)(高等教育出版社出版)教学而编写.全书共12章,每章由教学目的与要求、知识点精要及基本题型与同步练习两大部分组成.本书有如下特点:1.集中要点,与教学同步.根据教材顺序,每次课一个单元将每节的知识点归纳集中在一起,与教学同步给出练习题,题型既有常规的也有一些比较特殊的,尤其对付考试的一些题型,便于读者整体掌握本章节内容,同时方便读者随时检索查阅这些详细题解.2.多级筛选,突出重点.按照教材的要求,本书对各章、节内容进行了分阶段筛选、分步练习.使学生及时掌握有关内容、发现知识的缺陷并随时补足.这样,学习者可按照自身的情况制定学习方案.3.循环复习,强化记忆.本书每章后的习题课对全章的内容作了一个小结,选了各章的综合例题进行了精解,对常见问题和常见错误进行解答,每章配有练习题,并给出解答.最后,为了广大学子的学习要求,配有学期期末考试模拟题,以上内容也为教师上习题课提供了素材.

本书可作为各类高等院校"高等数学习课题"教材,也可作为高校师生的教学参考读物,还可作为硕士研究生入学考试前的复习资料和自学考试有关人员的复习课本.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题方法与同步指导/陈春宝,沈家骅主编.--上海:同济大学出版社,2012.6

IBSN 978-7-5608-4855-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… ②沈… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第075626号

高等数学解题方法与同步指导

配同济大学编《高等数学》(高教五版、六版)

陈春宝 沈家骅 主编

责任编辑 缪临平 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路1239号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经　销 全国各地新华书店

印　刷 江苏句容排印厂

开　本 787mm×960mm 1/16

印　张 26.75

印　数 1—4100

字　数 535000

版　次 2012年6月第1版 2012年6月第1次印刷

书　号 ISBN 978-7-5608-4855-6

定　价 58.00元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前 言

高等数学是理工科高等院校一门重要的基础课，是深入学习专业课程的必备基础. 掌握好高等数学的基础知识、基本理论及基本技能和分析方法，对学生后续课程的学习有很大的帮助.

由于高等数学的内容繁多，习题浩如烟海，初学者往往对其概念、定义和定理重视不够或理解不深，有时缺乏解题的思路，故需提高其分析和解决问题的能力及基本运算技能的熟练程度. 为了帮助学生克服这种困难，我们组织了具有丰富教学经验的教师，以全国高等院校数学课程指导委员会编制的《数学课程教学的基本要求》为依据，结合目前高等数学课程的实际教学情况，与同济大学数学系主编的《高等数学》(高教第五版、第六版)教材同步配套，编写了《高等数学解题方法与同步指导》一书.

本书对高等数学中最主要的概念、定义、定理作了概括的叙述和分析，提出了基本要求和复习要点；系统地对高等数学的相关内容进行了范例分析，既有典型的概念题、计算题，又有综合题、应用题；既有课本内容及例题的分析与详解，又有各种题型的总结与注意事项，兼顾知识拓展及课后难题的加深. 因此，本书既可配合本科学生作复习和习题课之用，也可作为报考研究生复习高等数学时作重要参考书.

全书各章节分为教学目标与要求、知识点精要、典型例题解析、同步习题及解答 4 个部分(部分习题参考同济大学出版社《新编高等数学阶梯同步练习与辅导》).

(1)教学目的与要求：根据全国高等院校数学课程指导委员会编制的《数学课程教学的基本要求》，明确指出对各章教学内容的要求，使学生了解教学目标.

(2)知识点精要：给出该章的主要定义及重要命题，补充书上没有但在学习过程中经常利用的一些重要结论.

(3)典型例题解析：列举该章的重点题型，并归纳总结各种题型的解

决方法、技巧和注意问题，以帮助提高学生分析问题和解决问题的能力.

(4)同步习题及解答：每章最后都给出教学内容同步的练习题及详细的解答，以帮助学生巩固内容，检查学习效果.

全书共分12章，内容包括函数与极限，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，空间解析几何与向量代数，多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程. 其中，第一章至第三章由何少平编写，第四章至第六章由王彩芳编写，第七章至第九章由沈家骅编写，第十章至第十二章由陈春宝编写. 本书的编写工作得到了同济大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，书中如有不妥之处，敬请专家、同行和读者批评指正，以便不断完善.

编　　者

2012年3月于上海

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章 函数与极限

一、教学目的与要求，知识点精要

(一)教学目的与要求

1. 了解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立简单应用问题中的函数关系式.

2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 了解极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

(二)知识点精要

1. 函数

设 x 和 y 为两个变量，D 是一个给定的数集，若对于 D 中任意一个 x，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，其中，D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域，x 为自变量，y 为因变量，$W=\{y\mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域，$G=\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

2. 函数特性

(1)函数的有界性　若函数 $y=f(x)(x\in D)$，存在 $M>0$，使得对于 D 内任意一点 x，有 $|f(x)|<M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界；否则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上无界，即对于任意的 $M>0$，在 D 内至少存在一点 x，有 $|f(x)|\geqslant M$.

(2) 函数的单调性　若函数 $y=f(x)(x\in D)$ 对于 D 内的区间 I 上任意两点 x_1,x_2，若 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加；若 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调减少.

(3) 函数的奇偶性　若函数 $y=f(x)$ 定义域 D 关于原点对称(即 $x\in D$ 时，必有 $-x\in D$)，且对于 D 内任意一点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数；若恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

(4) 函数的周期性　若函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，且存在一个非零常数 l，使得对 D 中任意 x，有 $x+l\in D$，而且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，函数的周期通常是指最小正周期.

3. 反函数

函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，对 W 中任意的 y，至少可以确定一个 $x\in D$(适合 $f(x)=y$) 与之对应，由此构成的函数 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

4. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数称为基本初等函数.

5. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 定义域为 D，值域为 W，若 $W\subset D_1$，则对 D 内任意一点 x，有确定的值 $u=\varphi(x)$ 与之对应，由于 $u=\varphi(x)\in W\subset D_1$，又有确定的值 y 与之对应，由此确定的函数称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，记作 $y=f\circ\varphi(x)=f[\varphi(x)]$.

6. 数列及其极限

(1) 数列　数列是无穷有序的数组，而其第 n 项称为一般项；数列 a_n 中取无穷项且保持原有次序而构成的数列称为 a_n 的子列.

(2) 数列的极限　对于数列 a_n，若存在数 a，满足：

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 a_n 极限存在或收敛，并把 a 称为数列 a_n 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

若数列 a_n 极限不存在，则称数列 a_n 发散.

几何意义　数列 a_n 极限为 a，则 a 的任一邻域内含有数列 a_n 几乎所有的项，即除至多有限项外的所有项都在该领域中.

7. 函数极限

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

(1) 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，若存在数 A，满足：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对于满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的任意 x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限存在且极限为 A，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

单侧极限　设函数 $y=f(x)$ 在某区间 (x_0-r,x_0) (x_0,x_0+r) $(r>0)$ 有定义，若存在数 A，满足：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<r)$，对于满足 $0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$ 的任意 x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则 $A=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)(A=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0))$ 称作 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限(右极限).

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件为其左右极限存在且相等.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>X_0$(其中 $X_0>0$) 内有定义，若存在数 A，满足：

$\forall\varepsilon>0,\exists X>0(X>X_0)$，对于满足 $|x|>X$ 的任意 x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限存在且极限为 A，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A)$：设函数 $y=f(x)$ 在 $x>X_0(x<-X_0)$(其中 $X_0>0$) 内有定义，若存在数 A，满足：

$\forall\varepsilon>0,\exists X>0(X>X_0)$，对于满足 $x>X(x<-X)$ 的任意 x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限存在且极限为 A，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\quad(\lim_{x\to-\infty}f(x)=A).$$

注　给定的一个数列 a_n 可以看作定义在自然数集 N 上的函数 $f(n)$，因此，数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 就是函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\in N)}}f(x)$，从而数列极限与函数极限都具有下面的性质.

8. 极限的性质

(1) 唯一性　若极限存在，则极限唯一.

(2) 有界性　若极限存在，则函数有界(所谓有界，对函数来说是指局部有界，即在自变量变化过程中的某邻域或某无穷区间内函数有界).

(3) 归并性

① 数列收敛的充分必要条件为其任一子列收敛；

② 函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 极限存在，其充分必要条件是：对任意

数列 x_n，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$（其中 $x_n\neq x_0$）（或$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$），则数列 $f(x_n)$ 收敛.

(4) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 x_0 的某个去心邻域，在此去心邻域内，有 $f(x)>A/2$（或 $f(x)<A/2$）.

若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

注 此性质也适用于其他极限过程和$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 等（包括单侧极限），其结论只需根据其极限过程，改动使不等式成立的自变量范围即可.

9. 极限运算法则

在下列(1)，(2)，(3) 条件设在同一极限过程中，$\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ （其中$\lim g(x)\neq 0$）；

(4) $\lim f(x)=0$，$g(x)$ 有界，则$\lim f(x)g(x)=0$；

(5)（复合函数）若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且在 x_0 的某一去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$，令 $u=\varphi(x)$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A$.

10. 无穷小与无穷大

(1) 若$\lim f(x)=0$，则称在这极限过程中 $f(x)$ 为无穷小(量)；

若$\lim f(x)=\infty$，则称在这极限过程中 $f(x)$ 为无穷大(量).

(2)（无穷小与无穷大的关系）在同一极限过程中，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大；若 $f(x)$ 为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

(3)（无穷小与极限的关系）在某一极限过程中，$\lim f(x)=A$ 的充分必要条件为 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是同一过程中的无穷小量.

(4)（无穷小的比较）设在同一极限过程中，α，β 为无穷小量：

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0(\alpha\neq 0)$ 或$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty(\beta\neq 0)$，则作 β 为 α 的高阶无穷小量，记作 $\beta=o(\alpha)$ 或称 α 是 β 的低价无穷小量.

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 和 α 为同阶无穷小量，特别若 $c=1$ 时，则称 β 与 α 是等价无穷小量，记作 $\beta\sim\alpha$.

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0(k>0)$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小，记作 $\beta=o(\alpha^k)$.

(5)（无穷小的运算法则）在同一极限过程中，有限多个无穷小量的和与积仍是无穷小量；有界变量与无穷小量之积仍是无穷小量.

(6)(无穷小的替换性质) 设 α,β 为同一极限过程的无穷小量，且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在($\alpha\neq 0,\alpha'\neq 0$)，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 存在，且 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

11. 极限存在的两个准则及两个重要极限

(1) 准则 Ⅰ：数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足：① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，

准则 Ⅰ′：若函数 $f(x),g(x),h(x)$ 在同一极限过程中满足：① $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；② $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$.

(2) 准则 Ⅱ：单调有界数列必收敛.

(3) 两个重要极限及一些重要等价无穷小

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}.$$

当 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\mathrm{arc}\sin x\sim\mathrm{are}\tan x$；$\ln(1+x)\sim x$；$\mathrm{e}^x-1\sim x$；$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$；$(1+x)^a-1\sim ax$；$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1)$.

12. 函数的连续性与间断点

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的几个等价定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，是指：

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；

② $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$；

③ 当自变量增量为 $\triangle x$，相应的函数增量为

$$\triangle y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0)\text{，则}\lim_{\triangle x\to 0}\triangle y=0;$$

④ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对于满足 $|x-x_0|<\delta$ 的任意 x，都有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 均存在，而 $y=f(x)$ 在点 x_0 处间断，则称 x_0 为第一类间断点，特别当 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在时，把点 x_0 称为可去间断点；当 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 时，把点 x_0 称为跳跃间断点.

若 $f(x)$ 的间断点 x_0 不是第一类的，则称点 x_0 为 $y=f(x)$ 的第二类间断点，特别当 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 为无穷大时，把点 x_0 称为 $y=f(x)$ 的无穷间断点；当 $x\to x_0$ 时，对应的函数值无限次地在两个固定的不同数值间变动，就把点 x_0 称为

$y=f(x)$ 的振荡间断点.

13. 连续函数的代数运算性质

(1) 若函数 $f(x),g(x)$ 均在点 x_0 处连续,则函数 $f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x)$ 都在点 x_0 处连续,在 $g(x_0)\neq 0$ 条件下,函数$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在点 x_0 处也连续.

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(减少)且连续,则其反函数 $x=\varphi(y)$ 也在区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加(减少)且连续.

(3) 函数 $y=f(u)$ 在 $u=a$ 点处连续,函数 $u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 点处连续,且 $a=\varphi(x_0)$,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 点处连续.

(4) 初等函数(即由常数与基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤能用一个算式表示的函数)在其定义区间内连续.

14. 闭区间上连续函数的分析性质

若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上存在 x_0,使得对于 I 上任意一点 x,满足 $f(x)\leqslant f(x_0)$(或 $f(x)\geqslant f(x_0)$),则称点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的最大值点(或最小值点),$f(x_0)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的最大值(或最小值).

(1) 最大值、最小值存在与函数有界定理　若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则有 ① $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必可取到最大值及最小值,即 $\exists\,\xi,\eta\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x),f(\eta)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$;② $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,即 $\exists M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in[a,b]$.

(2) 零点定理与介值定理　设 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,① 若 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$(零点定理);② 若 $f(a)\neq f(b)$,则对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意值 μ,在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=\mu$(介值定理).

推论　① 若 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,设 m,M 分别为 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值、最大值,则对介于 m 和 M 之间的任意值 μ,在 $[a,b]$ 上至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=\mu$;② 闭区间上的不恒为常数的连续函数,其值域为闭区间.

二、基本题型与同步练习

(一) 函数及其极限

例 1　若 $f(t)=3t^3+\dfrac{3}{t^3}-\dfrac{2}{t}-2t$,　证明:$f\left(\dfrac{-1}{t}\right)=-f(t)$.

证　$f\left(-\dfrac{1}{t}\right)=3\left(-\dfrac{1}{t}\right)^3+\dfrac{3}{\left(-\dfrac{1}{t}\right)^3}-\dfrac{2}{-\dfrac{1}{t}}-2\left(-\dfrac{1}{t}\right)$

$$=-\frac{3}{t^3}-3t^3+2t+\frac{2}{t}=-\left(3t^3+\frac{3}{t^3}-\frac{2}{t}-2t\right)=-f(t).$$

例 2　证明：定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

我们先对本题作一分析，设函数$f(x)$在$(-l,l)$上有定义，假定$f(x)$可表示为奇函数$h(x)$与偶函数$k(x)$之和，即

$$f(x)=h(x)+k(x),$$

则

$$f(-x)=h(-x)+k(-x)=-h(-x)+k(x),$$

于是

$$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},\ k(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

由此启发而得到下面的证明.

证　设$f(x)$在$(-l,l)$上有定义，令

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},\ \varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$

容易验证

$$\varphi(-x)=-\varphi(x),\psi(-x)=\psi(x),$$

即$\varphi(x)$为奇函数，$\psi(x)$为偶函数，而且$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，故结论成立.

例 3　设$f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数，若$f(x)$在$(0,l)$内单调增加，证明$f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

证　设$x_1<x_2$，x_1,x_2为$(-l,0)$内任意两点，则$-x_1$，$-x_2$为$(0,l)$内两点，且$-x_1>-x_2$.

由于$f(x)$在$(0,l)$内单调增加，故

$$f(-x_1)>f(-x_2).$$

又由于$f(x)$为奇函数，故

$$f(-x_1)=-f(x_1),\quad f(-x_2)=-f(x_2),$$

从而

$$-f(x_1)>-f(x_2),$$

即

$$f(x_1)<f(x_2),$$

因此，$f(x)$在$(-l,0)$内单调增加.

例 4　求$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$的反函数，并问$a,b,c,d$满足什么条件时，这反函数与直接函数相同？

先说明条件“$ad-bc\neq 0$”的意义；如果$ad-bc\neq 0$，即$ad\neq bc$，我们注意到

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的表达式中已约定 c 与 d 不同时为零，不妨设 $c\neq 0$，于是

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{acx+bc}{c^2x+cd}\neq\frac{acx+ad}{c^2x+cd}$$

$$\neq\frac{acx+bc}{c^2x+cd}=\frac{a}{c},$$

因此，该条件说明 $y\neq\dfrac{a}{c}$，由下面的证明可知，这也是 y 有反函数的条件.

证 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，得到

$$(cy-a)x=b-dy,$$

由前面说明，$y\neq\dfrac{c}{a}$，故解得

$$x=\frac{b-dy}{cy-a},$$

故反函数为

$$y=\frac{b-dx}{cx-a}.$$

若反函数与直接函数相同，则

$$\frac{ax+b}{cx+d}\equiv\frac{b-dx}{cx-a},$$

整理成二次恒等式后比较系数，得

$$\begin{cases}c(a+d)=0\\(a-d)(a+d)=0\\b(a+d)=0,\end{cases}$$

故

$$a+d=0\quad\text{或}\quad\begin{cases}b=c=0,\\a=d\neq 0.\end{cases}$$

例 5 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证 必要性：$f(x)$ 在 X 上有界，故

$\exists M>0$，对于 X 上任意一点 x，有

$$|f(x)|<M,$$

即

$$-M<f(x)<M,$$

故 $f(x)$ 有上界 M，有下界 $-M$.

充分性：设 $f(x)$ 在 X 上有上界 M、下界 m，即对于 X 上任意一点 x，有

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com