UMSS

大学数学科学丛书 —31

一般拓扑学基础

张德学 编著

科学出版社

大学数学科学丛书 31

一般拓扑学基础

张德学　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是为本科生编写的一般拓扑学教材，主要介绍一般拓扑学中最基本的概念和内容，包括必要的集论预备、拓扑空间的基本概念、生成拓扑空间的方法、基本拓扑性质等内容. 本书取材精炼，注重公理化思想对现代数学的影响，强调空间性质与映射性质之间的内在联系，并配有大量习题.

本书适合数学系本科生、低年级研究生以及其他数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

一般拓扑学基础/张德学编著. —北京：科学出版社，2012

(大学数学科学丛书；31)

ISBN 978-7-03-035428-0

Ⅰ. ①一… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①拓扑-高等学校-教材 Ⅳ. ①O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 209093 号

责任编辑：王丽平 李静科／责任校对：朱光兰

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京佳艺恒彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 9 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

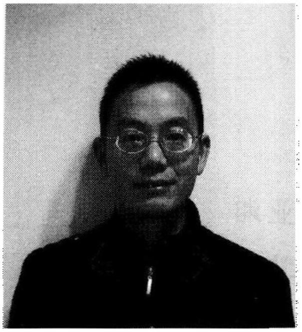
2012 年 9 月第一次印刷 印张：14 1/4

字数：272 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

作 者 简 介



张德学，1966 年出生于四川峨眉山市. 1993 年毕业于四川大学数学系，获博士学位. 毕业后一直在四川大学从事本科生和研究生的教学与科研工作. 为本科生主讲过高等数学、数学分析以及拓扑学等课程. 为研究生开设过一般拓扑学、连续格理论、范畴论、数理逻辑以及多值逻辑等课程. 研究兴趣包括多值拓扑和多值序，特别是相关范畴论性质的研究.

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　言

粗略地说, 拓扑学是研究连续映射的学科. 根据其关注的对象以及研究方法的不同, 拓扑学又可划分为几个分支, 如一般拓扑学 (又称点集拓扑学)、代数拓扑学、微分拓扑学等. 本书介绍一般拓扑学中最为基本的概念和结果, 这些内容是现代数学很多分支特别是分析学的基本工具.

本书源于编者在四川大学数学学院讲授一般拓扑学的讲义. 长期以来, 在四川大学一般拓扑学一直是基础数学专业三年级学生的专业课, 68 个学时. 这一情况在 2008 年发生了改变. 由于一般拓扑学的 "工具课" 特点, 数学学院要求从 2008 级开始, 所有学生都必须学习一般拓扑学的基本内容, 并且把开课时间提前到二年级上学期, 学时压缩为 51 个. 为了适应这一变化, 编者在以前的讲义基础上, 结合二年级学生的知识结构编写了这本教材 (尤其是前半部分). 应当指出, 本书篇幅超出了一个学期所能讲授的内容, 目的是让教师有更多的选择.

国内很多高校都开设了一般拓扑学这门课, 也出版了很多这方面的教材. 总的来说, 这些教材的内容大同小异. 但是, 一本教材内容的取舍以及叙述的方式或多或少地反映了相应课程的目的. 本书有以下两种用途: 一是作为基础课教材, 强调一般拓扑学的 "工具课" 特点, 目的是让学生认识到分析学中许多基本概念并不依赖于空间的度量结构, 而是它的拓扑结构, 由此可以把数学分析中在欧氏空间中建立的连续、收敛等基本概念推广到一般的抽象空间中去, 从而极大地拓宽数学研究对象的范围. 二是作为一般拓扑学的入门书, 让学生对一般拓扑学这一学科有较为系统的了解. 为此, 本书强调了空间性质与映射性质之间的联系, 并在一些章节中以阅读材料的方式给出了一般拓扑学中一些经典有趣的结果, 供有兴趣的读者阅读.

致初学者　公理化方法是 20 世纪数学最伟大的成就之一, 它改变了数学的面貌. 公理化方法是一般拓扑学的一个基本特点, 也是很多初学者不太适应的一个方面. 对很多初学者而言, 一般拓扑学抽象、枯燥, 一个又一个的定义、命题、定理, 再加上一些看起来有些古怪的例子, 因此是本科阶段最为抽象的课程之一. 不少初学者, 特别是低年级同学, 对于概念的理解会遇到困难; 对于练习总觉得无从下手或者说不清楚. 如果你遇到这些问题, 不要气馁, 不要灰心, 因为作为基础课, 这门课程的目的之一就是让你通过学习一般拓扑学的基本概念, 逐步认识公理化方法, 提高对抽象概念的理解和运用能力, 学习如何准确、简洁地表达自己的想法.[1)]

---

1) "When I use a word," Humpty Dumpty said in rather a scornful tone, "it means just what I choose it to mean —— neither more nor less." — Lewis Carroll, Through the Looking-Glass.

致教师　和其他教材相比, 本书在内容上没有太大的差别, 略有不同的是编排顺序和叙述方式. 在不少地方, 本书采用交换图来描述一种构造或一种性质, 这样做的好处是容易揭示不同概念、不同构造之间的相似之处, 也让学生明白可以通过描述与其他对象之间的联系来描述一个数学对象. 由于教材包含的内容较多, 根据需要以及学生情况可做多种选择. 作为低年级的入门课, 讲完前三章以及第 4 章的前两节就可以了 (带星号的内容可略去). 若作为高年级学生的专业课, 则有多种选择: 一种方案是系统讲解一般拓扑学的基本内容, 即前七章的内容 (包括带星号的内容); 另一方案是前七章的大部分内容 (去掉 Nagata-Smirnov 度量化定理、仿紧, 以及拓扑完备空间等) 加上第 8 章, 这一方案能让学生对一般拓扑学有较为系统的了解, 也能接触到代数拓扑学中一些最基本的概念. 此外, 与其他本科课程相比, 一般拓扑学对集合论要求相对较高, 因此本书用了较多的篇幅做这方面的准备. 在教学过程中, 可根据情况做一些取舍, 例如选择公理等价形式的证明可略去, 留给有兴趣的学生自己阅读.

致谢　在编写过程中编者得到了很多人的理解、帮助和支持, 在此谨向他们表示最诚挚的感谢! 感谢四川大学数学学院 2007 级至 2010 级的同学们. 本书初稿在这四个年级中试用过, 其中 2007 级是三年级专业课, 2008 级至 2010 级是二年级基础课, 这对本书的改进有很大的帮助. 感谢西北大学王延庚教授, 他在西北大学试用了本书初稿, 发现了初稿中若干不当之处. 感谢宁德师范学院林寿教授, 他仔细阅读了全书, 提出了许多很好的建议, 特别是简化了初稿中的几个证明. 感谢南京师范大学贺伟教授, 四川大学张树果教授、彭国华教授、寇辉教授、赖洪亮博士等, 他们对书中内容和练习的编写、安排提出了宝贵的建议. 感谢科学出版社王丽平、李静科编辑, 她们对本书的编辑出版给予了很大的帮助. 感谢四川大学数学学院对本书编写的鼓励和支持.

书中一定还有很多谬误及不当之处, 望读者不吝指正. 联系方式: 成都市四川大学数学学院, 610064; 电邮: dxzhang@scu.edu.cn.

张德学

2012 年 3 月于成都

《大学数学科学丛书》已出版书目

1. 代数导引　万哲先　著　2004 年 8 月
2. 代数几何初步　李克正　著　2004 年 5 月
3. 线性模型引论　王松桂等　编著　2004 年 5 月
4. 抽象代数　张勤海　著　2004 年 8 月
5. 变分迭代法　曹志浩　编著　2005 年 2 月
6. 现代偏微分方程导论　陈恕行　著　2005 年 3 月
7. 抽象空间引论　胡适耕　张显文　编著　2005 年 7 月
8. 近代分析基础　陈志华　编著　2005 年 7 月
9. 抽象代数——理论、问题与方法　张广祥　著　2005 年 8 月
10. 混合有限元法基础及其应用　罗振东　著　2006 年 3 月
11. 孤子引论　陈登远　编著　2006 年 4 月
12. 矩阵不等式　王松桂等　编著　2006 年 5 月
13. 算子半群与发展方程　王明新　编著　2006 年 8 月
14. Maple 教程　何青　王丽芬　编著　2006 年 8 月
15. 有限群表示论　孟道骥　朱萍　著　2006 年 8 月
16. 遗传学中的统计方法　李照海　覃　红　张　洪　编著　2006 年 9 月
17. 广义最小二乘问题的理论和计算　魏木生　著　2006 年 9 月
18. 多元统计分析　张润楚　2006 年 9 月
19. 几何与代数导引　胡国权　编著　2006 年 10 月
20. 特殊矩阵分析及应用　黄廷祝等　编著　2007 年 6 月
21. 泛函分析新讲　定光桂　著　2007 年 8 月
22. 随机微分方程　胡适耕　黄乘明　吴付科　著　2008 年 5 月
23. 有限维半单李代数简明教程　苏育才　卢才辉　崔一敏　著　2008 年 5 月
24. 积分方程　李星　编著　2008 年 8 月
25. 代数学　游宏　刘文德　编著　2009 年 6 月
26. 代数导引（第二版）　万哲先　著　2010 年 2 月
27. 常微分方程简明教程　王玉文　史峻平　侍述军　刘　萍　编著　2010 年 9 月
28. 有限元方法的数学理论　杜其奎　陈金如　编著　2012 年 1 月
29. 近代分析基础（第二版）　陈志华　编著　2012 年 4 月
30. 线性代数核心思想及应用 王卿文 编著 2012 年 4 月
31. 一般拓扑学基础　张德学　编著 2012 年 9 月

目　　录

第 1 章　集合与映射

集合 (也简称为集) 与映射是最基本的数学概念, 是人们表述和交流数学概念、结果的基本术语. 这一章介绍本课程需要的有关集与映射的基本概念.

1.1 集　　合

直观上一个集合表示满足某种性质的对象的全体.[1] 我们经常用到以下一些集合: 自然数集 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$, 整数集 $\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$, 有理数集 $\mathbb{Q}$, 无理数集 $\mathbb{P}$, 实数集 $\mathbb{R}$, 以及复数集 $\mathbb{C}$ 等.

如果一个对象 x 在集合 X 中, 则说 x 是 X 的一个元素, 记为

$$x \in X,$$

读作 x 属于 X; 若 x 不在集合 X 中, 则说 x 不是 X 的元素, 记为

$$x \notin X,$$

读作 x 不属于 X. 例如, $0\in\mathbb{N}, 1/2\notin\mathbb{N}$, $\sqrt{2}\in\mathbb{P}, \sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$. 由于实数集的一个元素对应到直线上的一个点, 因此集合 X 的元素也称为 X 的点.

若 X 的元素都是 Y 的元素, 则称 X 为 Y 的一个子集, 记为 $X\subseteq Y$ (读作 X 含于 Y) 或者 $Y\supseteq X$ (读作 Y 包含 X). 例如, $\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的子集, $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的子集.

称集 X 与集 Y 相等, 若它们含有相同的元素, 即 $x\in X$ 当且仅当 $x\in Y$. 换言之, 一个集合由它的元素完全确定. 显然, $X=Y$ 当且仅当 $X\subseteq Y, Y\subseteq X$ 同时成立.

集合 Y 的子集 X 称为 Y 的真子集, 若 $Y\neq X$.

在集合论里, 人们通过描述集合之间的关系以及运算来认识和研究集合. 换言之, 虽然我们不定义集合是什么, 但可以确定关于集合我们能做些什么.[2] 公理集合论的出发点就是给出一组集合 "应该" 满足的公理, 在此基础上研究集合的性质.[3]

---

1) 集合作为最初始的数学概念, 不予定义. 如果我们试图给集合一个定义, 必然要借助另外一些概念, 这些概念又怎么定义呢? 由此看出我们必须有一个出发点, 这个出发点就是一些不加定义 (“意义自明”) 的初始概念. 在数学领域里, 集合这一概念是一个合适的选择.

2) 现实生活中我们也经常遇到这样的情况. 篮球比赛时我们不需要清楚球的尺寸和材质等方面的东西, 但是必须清楚比赛的规则. 对一项体育运动来说, 比赛规则是它最重要的组成部分.

3) 集合论里普遍采用的公理体系是 ZFC, 它由 Zermelo-Fraenkel 集论公理 (ZF) 加上选择公理 (AC) 构成.

由于本课程主要关心一般拓扑学, 对于集论公理我们不作讨论, 只是列举一些从已知集合构造新的集合的规则.

分离模式

设 X 是集, P 是某种性质, 则

$$\{x \in X \mid P(x)\}$$

是一个集合, 它表示 X 中所有具有性质 P 的元素之集, 它是 X 的一个子集. 直观上这个集合是把 X 中具有性质 P 的元素分离出来得到的.

例 1.1　1. $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ 是一个集合, 它表示所有大于 0 的有理数集.

2. 若 X, Y 是集合, 则

$$\{x \in X \mid x \notin Y\}$$

是 X 的一个子集, 它表示所有在 X 中但不在 Y 中的对象之集, 称为 X 与 Y 的差, 记为 $X \setminus Y$.

如果 A 是 X 的子集, 则称差 $X \setminus A$ 为 A 在 X 中的补集. 显然 $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$, $A \cup (X \setminus A) = X$.

3. 任给集合 X,

$$\{x \in X \mid x \neq x\}$$

是一个集合. 该集合不含任何元素, 称为空集, 用 $\varnothing$ 表示. 显然, 空集 $\varnothing$ 是任何一个集合的子集.

幂集

一个集合可以是另一个集合的元素. 例如, 任给集合 X,

$$\{X\}$$

是一个集合, 它只有一个元素 X. 特别地, $\{\varnothing\}$ 是一个集合, 空集 $\varnothing$ 是它唯一的元素. 由于 $\varnothing$ 是空集, 不含任何元素, 因此 $\{\varnothing\} \neq \varnothing$. 只含一个元素的集合称为单点集. 集 $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ 有两个元素: 空集 $\varnothing$ 与单点集 $\{\varnothing\}$. 显然, $x \in X$ 当且仅当 $\{x\} \subseteq X$.

任给集合 X, X 的所有子集作为元素构成一个集合

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

集 $\mathcal{P}(X)$ 称为 X 的幂集 (power set). X 的幂集的一个元素就是 X 的一个子集.

例 1.2　1. $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$; $\mathcal{P}\mathcal{P}(\varnothing) = \mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

2. 若 X 有 n 个元素 $(n \in \mathbb{N})$, 则 $\mathcal{P}(X)$ 有 2^n 个元素.

笛卡儿乘积

任给两个集合 X, Y, 它们的笛卡儿乘积 (或卡氏积, Cartesian product) $X \times Y$ 指第一个分量在 X 中, 第二分量在 Y 中的有序对 (x,y) 构成的集合

$$\{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

两个有序对 (x,y) 与 (u,v) 相等当且仅当它们的两个分量分别相等, 即 $x=u, y=v$.

例 1.3　1. 若 $A=\{a,b\}, X=\{x,y\}$, 则 $A \times X=\{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y)\}$.

2. 任给集合 X, $X \times \varnothing=\varnothing \times X=\varnothing$.

集族的并与交

首先考虑有限个集合的并和交. 任给有限个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 它们的并指集合

$$\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i=\{x \mid \exists i \leqslant n, x \in A_i\};$$

它们的交指集合

$$\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i=\{x \mid \forall i \leqslant n, x \in A_i\}.$$

集合的交与并具有以下一些简单性质, 留给读者自己验证.

(1) (幂等律) $A \cap A=A=A \cup A$.

(2) (交换律) $A \cap B=B \cap A$; $A \cup B=B \cup A$.

(3) (分配律) $A \cap(B \cup C)=(A \cap B) \cup(A \cap C)$; $A \cup(B \cap C)=(A \cup B) \cap(A \cup C)$.

(4) (结合律) $A \cap(B \cap C)=(A \cap B) \cap C$; $A \cup(B \cup C)=(A \cup B) \cup C$.

(5) (De Morgan 律) $A \backslash(B \cap C)=(A \backslash B) \cup(A \backslash C)$; $A \backslash(B \cup C)=(A \backslash B) \cap(A \backslash C)$.

(6) $A \times(B \cap C)=(A \times B) \cap(A \times C)$; $A \times(B \cup C)=(A \times B) \cup(A \times C)$.

(7) $X \backslash(X \backslash A)=A \cap X$. 特别地, 若 $A \subseteq X$, 则 $X \backslash(X \backslash A)=A$.

(8) $A \cap B=A \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B=B$.

现在考虑一族集合的并与交. 设 J 是集合. 如果对任意 $j \in J$ 都给定了一个集合 A_j, 那么这些 A_j 的全体称为一个以 J 为指标集的集族, 记为 $\{A_j\}_{j \in J}$. 指标集为空集的集族称为空族; 指标集为自然数集的集族 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 也称为集列.

若集族 $\mathcal{A}=\{A_j\}_{j \in J}$ 中的每个元素 A_j 都是集 X 的子集, 则称 $\mathcal{A}$ 为 X 的子集族.

例 1.4　1. 任给 $n \in \mathbb{N}$, 令 $F_n=((-1)^n, 1+(-1)^n]$, 则 $\mathcal{F}=\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集列.

2. 任给 $x \in \mathbb{Q}$, 令 $G_x=\mathbb{R} \backslash\{x\}$, 则 $\mathcal{G}=\{G_x\}_{x \in \mathbb{Q}}$ 是以 $\mathbb{Q}$ 为指标集的实数集 $\mathbb{R}$ 的子集族.

设 $\mathcal{A}=\{A_j\}_{j\in J}$ 是一个集族. $\mathcal{A}$ 的并指集合

$$\bigcup_{j\in J} A_j=\{x \mid \exists j\in J, x\in A_j\}.$$

集族 $\mathcal{A}$ 的并也用 $\cup\mathcal{A}$ 表示. 显然, 空族的并是空集; 任何集族 $\mathcal{A}$ 都是它的并 $\cup\mathcal{A}$ 的子集族.

设 $\mathcal{A}=\{A_j\}_{j\in J}$ 是一个指标集非空的集族. $\mathcal{A}$ 的交指集合

$$\bigcap_{j\in J} A_j=\{x \mid \forall j\in J, x\in A_j\}.$$

集族 $\mathcal{A}$ 的交也记为 $\cap\mathcal{A}$. 这一节的最后将说明若指标集 J 是空集, 则 $\cap\mathcal{A}$ 没有意义.

例 1.5 设 $\mathcal{F}=\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{G}=\{G_x\}_{x\in\mathbb{Q}}$ 是例 1.4 中定义的集族, 则

1. $\cup\mathcal{F}=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n=(-1,0]\cup(1,2]$; $\cap\mathcal{F}=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n=\varnothing$.
2. $\cup\mathcal{G}=\bigcup\limits_{x\in\mathbb{Q}} G_x=\mathbb{R}$; $\cap\mathcal{G}=\bigcap\limits_{x\in\mathbb{Q}}(\mathbb{R}\setminus\{x\})=\mathbb{P}$.

有限个集合的运算性质很容易推广到集族的情形, 这就是下面的命题.

命题 1.1 设 A, X 是集合, $\{B_j\}_{j\in J}$ 是一集族并且指标集 J 非空.

(1) (分配律) $A\cap\bigcup\limits_{j\in J} B_j=\bigcup\limits_{j\in J}(A\cap B_j)$; $A\cup\bigcap\limits_{j\in J} B_j=\bigcap\limits_{j\in J}(A\cup B_j)$.

(2) (De Morgan 律) $X\setminus\bigcap\limits_{j\in J} B_j=\bigcup\limits_{j\in J}(X\setminus B_j)$; $X\setminus\bigcup\limits_{j\in J} B_j=\bigcap\limits_{j\in J}(X\setminus B_j)$.

(3) $X\times\bigcap\limits_{j\in J} B_j=\bigcap\limits_{j\in J}(X\times B_j)$; $X\times\bigcup\limits_{j\in J} B_j=\bigcup\limits_{j\in J}(X\times B_j)$.

证明 以分配律 $A\cap\bigcup\limits_{j\in J} B_j=\bigcup\limits_{j\in J}(A\cap B_j)$ 为例, 其余留作练习. 只需验证 $A\cap\bigcup\limits_{j\in J} B_j$ 与 $\bigcup\limits_{j\in J}(A\cap B_j)$ 包含相同的元素. 若 $x\in A\cap\bigcup\limits_{j\in J} B_j$, 则 $x\in A$ 并且存在 $i\in J$ 使得 $x\in B_i$. 于是, $x\in A\cap B_i$, 从而 $x\in\bigcup\limits_{j\in J}(A\cap B_j)$. 反过来, 若 $x\in\bigcup\limits_{j\in J}(A\cap B_j)$, 则存在 $i\in J$ 使得 $x\in A\cap B_i$. 因此 $x\in A$ 并且 $x\in\bigcup\limits_{j\in J} B_j$, 所以 $x\in A\cap\bigcup\limits_{j\in J} B_j$. □

罗素悖论

或许你会问分离模式能否换成如下的形式: 若 P 是某种性质, 则

$$\{x \mid P(x)\}$$

是一个集合, 它表示所有具有性质 P 的对象的全体, 这似乎更符合我们对集合的直观理解. 但是, 这样做会导致一个逻辑上的矛盾. 考察

$$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

如果 R 是一个集合, 问 R 是否是它自己的一个元素, 即 $R \in R$ 是否成立? 假设 $R \in R$, 根据 R 的定义可得 $R \notin R$; 假设 $R \notin R$, 同样由 R 的定义可得 $R \in R$. 这说明无论假设 $R \in R$, 还是假设 $R \notin R$ 都会导致矛盾. 这就是著名的罗素悖论, 它是 1903 年由罗素 (Bertrand Russell (1872~1970)) 发现的.[4] 上面采用的分离模式避免了这一悖论.

罗素悖论告诉我们 $R = \{X \mid X \notin X\}$ 不是一个集合, 由此可知所有的集合放在一起不再是一个集合, 也就是说

$$V = \{X \mid X = X\}$$

不是一个集合. 否则, 罗素悖论中的 R 可以写成

$$R = \{X \in V \mid X \notin X\},$$

由分离模式 R 是一个集合, 这样又导致了罗素悖论.

前面在给出一个集族 $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ 的交的时候, 要求指标集 $J \neq \varnothing$. 这一要求是合理的, 因为若指标集 $J = \varnothing$, 则

$$\cap \mathcal{A} = \{X \mid \forall j \in \varnothing, X \in A_j\} = V$$

不是集合.

练　习　1.1

1. 设 $A, B \subseteq X$. 验证 $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$.
2. 验证命题 1.1 的其余结论.
3. 两个集合 A, B 的对称差定义为 $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. 证明

(a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = B \triangle A$;

(b) $A \triangle \varnothing = A$, $A \triangle A = \varnothing$;

(c) 任给集合 A, B, C, $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;

(d) 任给集合 A, B, C, $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

(e) $A \triangle (A \setminus B) = A \cap B$;

(f) $B \triangle (A \setminus B) = A \cup B$.

(a)~(d) 表明任给集合 X, $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ 是一个交换环.

4) 罗素悖论有若干不同的形式, 它的理发师版本如下: 某理发师声称他给所有不给自己理发的人理发. 问这位理发师给不给他自己理发?

4. 设 $\{X_i\}_{i\in I}, \{Y_j\}_{j\in J}$ 是两个集族, I, J 非空. 证明

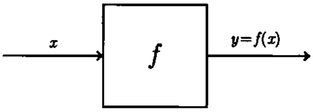
(a) $\left(\bigcup\limits_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcup\limits_{j\in J} Y_j\right) = \cup\{X_i \times Y_j \mid i \in I, j \in J\}$;

(b) $\left(\bigcap\limits_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcap\limits_{j\in J} Y_j\right) = \cap\{X_i \times Y_j \mid i \in I, j \in J\}$.

1.2　映射与关系

映射

映射是一个基本的数学概念, 它是集合之间的一种联系方式. 我们从中学就开始接触这一概念, 对它已经不陌生了. 一个映射由三部分组成: 定义域 X, 值域 Y, 以及对应法则 f. 任给 X 中一个元素 x, 对应法则 f 指定了 Y 中唯一一个元素 $y = f(x)$ 与 x 相对应. 直观上我们可以把一个映射看作一个程序, 给它一个输入 x, 它就给出一个输出 $f(x)$. 不同的输入可能会得到相同的输出, 但是一个输入只能对应一个输出.



用符号 $f : X \longrightarrow Y$ 表示一个映射, 也说 f 是 X 到 Y 的映射. 习惯上把值域为实数集 $\mathbb{R}$ 的映射称为函数.

例 1.6　设 X 是集合.

1. 对应法则 $x \mapsto x$ 确定了 X 到 X 的一个映射, 记为 $1_X : X \longrightarrow X$. 1_X 称为 X 上的恒等映射.

2. 若 A 是 X 的子集, 则对应 $x \mapsto x$ 确定了 A 到 X 的一个映射, 称为含入映射. 通常用符号 $A \hookrightarrow X$ 表示含入映射.

3. 对应 $x \mapsto \{x\}$ 确定了一个映射 $\{\ \} : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, 它把 X 的每个点 x 映为单点集 $\{x\}$.

两个映射 $f : X \longrightarrow Y$ 与 $f' : X' \longrightarrow Y'$ 相等, 若 $X = X', Y = Y'$, 并且 f 与 f' 是同一对应法则. 虽然映射

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1$$

与映射

$$g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad g(x) = x^2 + 1$$

定义域相同, 对应法则也相同, 但是值域不同 (f 的值域是 $\mathbb{R}$, g 的值域是 $\mathbb{Q}$), 因此 f 与 g 是不同的映射.

若 $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$ 是映射, 则对应法则