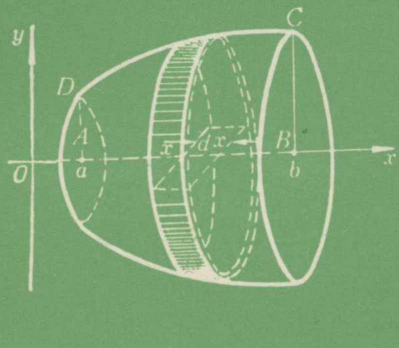
# 微積分習題解

# 1800 例




廖碧華編

科進出版社出版

# 微積分習題解

# 1800 例

廖碧華編

科進出版社出版

微積分習題解1800例　　廖碧華編

科進出版社出版　　電話3-457842
香港九龍官塘康寧道41號十五樓第五座

嶺南印刷公司印刷　　電話3-497470
香港德輔道西西安里13號地下

 1980年10月版

# 前　言

爲了幫助本港及國內青年學生解決學習《微積分》遇到的困難，本社特邀請廖碧華先生編寫了這本《微積分習題解1800例》。

廖碧華先生曾在國內及本港著名大學、中學任數學教師二十年，有豐富的教學和寫作經驗，曾在國內和本港編寫過幾十種有關數學參考書，這些參考書受到了廣大讀者的熱烈歡迎。

本書是作者根據二十年的教學經驗並參照國內高中、中專、電視大學及大專院校理工科對微積分的要求，並結合本港對微積分的教學需要而精心編選的。內容包括各種類型的一元微積分例題、難題及習題一千八百例，內容全面而且廣泛，所選的例題都具有代表性，是一本非常適合本港及國內青年學生學習微積分的參考書。

科進出版社

一九八〇年十月

# 目　录

# 第一章　函数

**例1** 解不等式：

(1) $|2x-1|<5$；

(2) $|x+2|\geqslant 3$.

**解** (1) 原不等式化为：

$$-5<2x-1<5,$$

$$-4<2x<6,$$

∴ 原不等式的解是 $-2<x<3$。

(2) 解原不等式就是解以下两个不等式：

$x+2\geqslant 3$ 和 $x+2\leqslant -3$.

∴ 原不等式的解是 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -5$.

**例2** 试解 $|x^2+x-2|>4$。

**解** 题中不等式等价于

$$x^2+x-2>4 \text{ 或 } x^2+x-2<-4.$$

由左边的不等式得到 $x>2$ 或 $x<-3$。右边的不等式无解。故所求不等式的解为

$$x>2 \text{ 或 } x<-3.$$

**例3** 解绝对值不等式：$|x-5|-|2x+3|<1$。

**解** （1）$x\geqslant 5$ 时，原不等式化为

$x-5-(2x+3)<1$，∴ 解为 $x\geqslant 5$。

（2）$-\dfrac{3}{2}\leqslant x<5$ 时，原不等式化为

$-(x-5)-(2x+3)<1$，∴ 解为 $\dfrac{1}{3}<x<5$。

（3）$x<-\frac{3}{2}$时，原不等式化为

$$-(x-5)+(2x+3)<1，\therefore\ 解为x<-7。$$

综上所述，得原不等式的解为$x>\frac{1}{3}$，或$x<-7$。

**例4** 解不等式 $|x+7|-|3x-4|+\sqrt{3-2\sqrt{2}}>0$。

**解** $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1-2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}$

$$=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}-1.$$

（1）$x<-7$：$-(x+7)+(3x-4)+\sqrt{2}-1>0$，

即$2x-12+\sqrt{2}>0$，$x>6-\frac{\sqrt{2}}{2}$，但$x<-7$，$\therefore$无解。

（2）$-7\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$：$x+7+(3x-4)+\sqrt{2}-1>0$，

即$4x+2+\sqrt{2}>0$，　$x>-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$\therefore -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}<x<\frac{4}{3}$.

（3）$\frac{4}{3}\leqslant x$：$x+7-(3x-4)+\sqrt{2}-1>0$，$-2x>$

$-(10+\sqrt{2})$，$x<5+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \frac{4}{3}\leqslant x<5+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore -\frac{2+\sqrt{2}}{4}<x<5+\frac{\sqrt{2}}{2}$为原不等式的解.

**例5** 已知函数$f(x)=\frac{|x-1|}{x+1}$，　求函数值$f(3)$，$f(0)$，$f(a)$。

**解**　(1) $f(3)=\frac{|3-1|}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$；

(2) $f(0)=\dfrac{|0-1|}{1}=\dfrac{1}{1}=1$;

(3) $f(a)=\begin{cases}\dfrac{a-1}{a+1}, & (a>1)\\[2ex] \dfrac{1-a}{a+1}, & (a<1,\text{且}a\neq -1)\\[1ex] 0\ . & (a=1)\end{cases}$

**例 6** 求函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $x=2$ 时的函数值。

**解** 这是用公式法表示的函数，求 $x=2$ 时的函数值，只要把式中的 $x$ 用 2 代入计算就行了。

$$y|_{x=2}=\frac{1}{1+(2)^2}=\frac{1}{5},$$

这就是 $x=2$ 时的函数值。

如果我们用记号 $y=f(x)$ 表示函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, 则

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

那末，当 $x=2$ 时的函数值就可以记作 $f(2)$, 于是有

$$f(2)=\frac{1}{1+(2)^2}=\frac{1}{5}。$$

**例 7** 求函数 $f(x)=x^2-3x+5$ 在 $x=2$、$x=x_0+1$、$x=x_0+h$ 各点处的函数值。

**解** 以 2 代 $x$, 得 $x=2$ 处的函数值:

$$f(2)=(2)^2-3(2)+5=4-6+5=3。$$

以 $x_0+1$ 代 $x$, 得 $x=x_0+1$ 处的函数值:

$$f(x_0+1)=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5$$
$$=x_0^2+2x_0+1-3x_0-3+5=x_0^2-x_0+3。$$

以 $x_0+h$ 代 $x$, 得 $x=x_0+h$ 处的函数值:

$$f(x_0+h)=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5$$
$$=x_0^2+2hx_0+h^2-3x_0-3h+5$$
$$=x_0^2+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5)。$$

**例 8** 在电子技术中经常遇到的"单位阶跃函数"的表达式是

$$u(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 1, & t>0,\end{cases}$$

作出它的图形, 并求 $u(0)$、$u(1)$、$u(-1)$的值。

**解** 这个函数在两个不同的区间内是由两个不同的式子分段表示出来的, 叫做分段函数, 其图形如图 1-1 所示。要注意, 这是一个函数, 切不可误认为是两个函数, 其定义区间是一切实数。

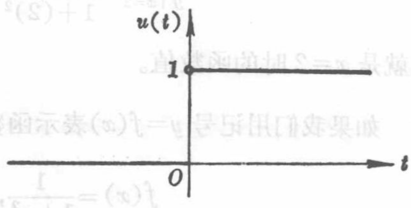



图 1-1

分段函数求函数值时, 不同点的函数值应由相应区间的式子确定。根据函数 $u(t)$ 的表达式, $t=0$ 和 $t=-1$ 处的函数值 $u(0)$、$u(-1)$, 应由第一个式子确定, 因为这两个值都在 $t\leqslant 0$ 的区间内, 所以

$$u(0)=0,\quad u(-1)=0。$$

$t=1$ 处的函数值 $u(1)$, 应由第二个式子确定, 因为这个值在 $t>0$ 的区间内, 所以

$$u(1)=1。$$

**例 9** 求下列函数的定义域

(1) $y=\frac{1}{x}$; (2) $y=\frac{x^2+1}{x-1}+\sqrt{x}$.

**解** (1) $y=\frac{1}{x}$.

显然，这里的分母 $x$ 不能为零，函数的定义域是 $x\neq0$ 的一切实数，或$(-\infty, 0)$与$(0, +\infty)$.

(2) $y=\frac{x^2+1}{x-1}+\sqrt{x}$.

$x$ 所允许取的值既要能确定 $\frac{x^2+1}{x-1}$，又要能确定 $\sqrt{x}$. 按照前者应有 $x\neq1$，按照后者应有 $x\geqslant0$. 故这个函数的定义域是$x\geqslant0$ 而且 $x\neq1$，或$[0, 1)$与$(1, +\infty)$.

**例10** 求 $y=\frac{-3}{x^2-2|x|}$ 的定义域.

**解** 用分式表达的函数式，它的定义域是使分子有意义，并且使分母的值不为零的所有 $x$ 值.

$\therefore\quad x^2-2|x|=0$,

$\therefore\quad x=0,\ x=\pm2$.

$\therefore$ 定义域为 $x\neq0$，$x\neq\pm2$的一切实数.

**例11** 求函数$y=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{lg(2x-1)}$的定义域.

**解** 在$\sqrt{2x-x^2}$中，$2x-x^2\geqslant0$.

而 $x(2-x)\geqslant0$.

化成不等式组为：

$$\begin{cases}x\geqslant0\\2-x\geqslant0\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x\leqslant0\\2-x\leqslant0\end{cases}$$

前一个不等式组的解是$0\leqslant x\leqslant 2$，后者无解（这个不等式也可以用我们在上节介绍的方法或图象法求解）。

又因为$lg(2x-1)$中，$2x-1>0$，$\therefore x>\frac{1}{2}$，

且 $2x-1\neq 1$，　　$\therefore$　$x\neq 1$.

故函数的定义域为$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$，且$x\neq 1$. 或写为$\frac{1}{2}\leqslant x<1$，$1<x\leqslant 2$.

**例12　指出下列函数的定义域：**

（1）　$y=\arcsin(x^2-x)$；　（2）　$y=\lg(2-\sqrt{x-1})$.

**解**

（1）的定义域由解不等式$|x^2-x|\leqslant 1$得到：

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

（2）的定义域由解不等式组

$$\begin{cases} x-1\geqslant 0 \\ 2-\sqrt{x-1}>0 \end{cases}$$

而得到：$1\leqslant x<5$.

对于稍为复杂的初等函数，同样可求出它的定义域. 如

(3)　$y=\lg(|x-a|-b)$；

由 $|x-a|-b>0$，即 $|x-a|>b$，这就要求$x-a>b$或$x-a<-b$. 故函数$y$的定义域为

$$x>a+b\quad 以及\quad x<a-b.$$

(4)　$y=\sqrt{(x-1)(5-x)}+\ln(x-3)(x-4)$.

要求出函数$y$的定义域，即求函数$\sqrt{(x-1)(5-x)}$的定义域

与函数 $\ln(x-3)(x-4)$ 的定义域的公共部分，也就是求解下列不等式组：

$$\begin{cases}(x-1)(5-x)\geqslant 0, & (1)\\ (x-3)(x-4)>0. & (2)\end{cases}$$

（因从 $x-3>0$ 同时 $x-4>0$，可得出 $x>4$；从 $x-3<0$ 同时 $x-4<0$，可得出 $x<3$）．因而函数 $y$ 的定义域为 $1\leqslant x\leqslant 5$ 和 $x<3$ 以及 $x>4$ 的公共部分，即 $1\leqslant x<3$ 以及 $4<x\leqslant 5$（也就是不等式组的解）．

**例13** 确定函数

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

的定义域。

**解** 当

$$x^2-3x+2>0$$

时函数有定义（注意，当 $x^2-3x+2=0$ 时，函数是没有定义的！）。

而

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2);$$

整个实轴由点 $x=1$，$x=2$ 分成三个区间。可知这函数的定义域是 $(-\infty, 1)$ 和 $(2, \infty)$。

**例14** 求函数

$$y=\sqrt{\lg(x-2)}$$

的定义域。

**解** 当

$$\lg(x-2)\geqslant 0$$

时函数有定义。

根据对数函数的性质（在 $a>1$ 的情况）。当自变量的值大于或等于1时，对应的函数值大于或等于0。

因此，

当 $$x-2\geqslant 1$$

时，$\lg(x-2)\geqslant 0$。所以函数的定义域是$[3,\infty)$。

**例15** 求函数

$$y=\sqrt{3-x}+\arcsin\frac{3-2x}{5}$$

的定义域。

**解** $\sqrt{3-x}$ 当 $x\leqslant 3$ 时有定义。再考察

$$\arcsin\frac{3-2x}{5}。$$

由反正弦函数的定义知：当

$$\left|\frac{3-2x}{5}\right|\leqslant 1$$

时，函数有定义。现在来解这个绝对值不等式。

不等式两端各乘以5，得

$$|3-2x|\leqslant 5;$$

这绝对值不等式相当于

$$-5\leqslant 3-2x\leqslant 5;$$

三边各减以3，得

$$-8\leqslant -2x\leqslant 2;$$

各边再除以$-2$（同时应改变所有不等式的方向），得

$$4\geqslant x\geqslant -1。$$

取这两式有定义的公共部分（图 1-2），即知函数的定义域为$[-1,3]$。

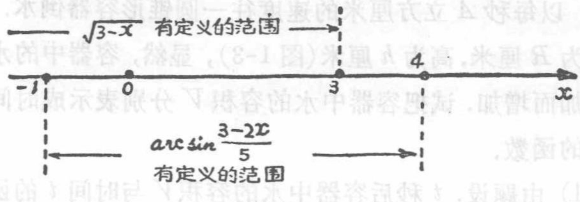



图 1-2

**例16** $y=\dfrac{|x|}{x}$;

$$y=\frac{\sqrt{x^2}}{x};$$

$$y=\begin{cases}1, & 当x>0时,\\ -1, & 当x<0时.\end{cases}$$

这三个函数的定义域都是除$x=0$以外的一切实数．而且对应法则也是一样的：当 $x$ 为正数时对应的 $y$ 就等于1；当 $x$ 为负数时对应的 $y$ 就等于$-1$．所以这三个函数实际上是同一个函数，只是同一法则用了三个不同的方式来表达，而同一法则的表达方式是可以不同的．

**例17** $y=\lg x^2$;

$$y=2\lg x.$$

假定这两个函数的定义域分别是使右边的表达式有意义的实数的全体，那么这两个函数并不是同一函数．因为虽然对于使它们都有定义的 $x$ 来说对应的 $y$ 是相同的，但它们的定义域却是不同的．$y=\lg x^2$的定义域是除 0 外的实数全体，$y=2\lg x$的定义域则是$(0,\ +\infty)$．

**例18** 以每秒 $A$ 立方厘米的速度往一圆锥形容器倒水．容器的底半径为 $R$ 厘米，高为 $h$ 厘米(图 1-3)，显然，容器中的水将随时间的增加而增加，试把容器中水的容积 $V$ 分别表示成时间 $t$ 及水高度 $y$ 的函数．

**解** 1) 由题设，$t$ 秒后容器中水的容积 $V$ 与时间 $t$ 的函数关系为

$$V=At\ (0\leqslant t\leqslant t_1,\ t_1 \text{ 为注满水的时间})；$$

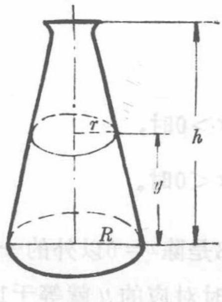


图 1-3

2) 设水的容积为 $V$ 时，容器中水的高度为 $y$，液面半径为 $r$，利用锥体体积公式，这时

$$V=\frac{\pi R^2 h}{3}-\frac{\pi r^2(h-y)}{3},$$

并注意到 $r$ 与 $y$ 的关系，由相似三角形性质，知

$$\frac{r}{R}=\frac{h-y}{h},$$

即
$$r=\frac{R}{h}(h-y),$$

代入上式，得

$$V=\frac{\pi R^2 h}{3}\left[1-\left(1-\frac{y}{h}\right)^3\right] \quad (0\leqslant y\leqslant h).$$

这就是水的容积 $V$ 与高度 $y$ 的函数关系.

**例 19** 在机械中，曲柄连杆机构是常见的. 主动轮转动时，连杆带动滑块 $B$ 作往复直线运动，如图 1-4. 设主动轮半径为 $r$，转动角速度为 $\omega$(单位时间转过的角度叫角速度)，连杆长度为 $l$，求滑块的运动规律.

**解** 设滑块 $B$ 的位置用变量 $s$ 表示. $B$ 的位置因时间而改变，所以取时间 $t$ 为自变量，$s$ 为因变量. 求滑块的运动规律，

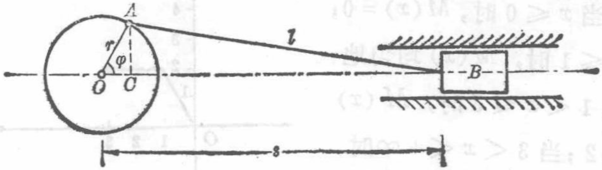



图 1-4

就是求 $s$ 与 $t$ 的函数关系.

按所给条件，主动轮的转角 $\varphi$ 是 $t$ 的函数，即

$$\varphi=\omega t,$$

其中，$t$ 的单位是秒，$\varphi$ 的单位是弧度，$\omega$ 的单位是弧度/秒. 从图上看出，$s$ 与 $\varphi$ 的关系是容易分析的. 自 $A$ 作 $AC\perp OB$，则

$$\overline{OC}=r\cos\varphi, \quad \overline{AC}=r\sin\varphi.$$

于是

$$\overline{CB}=\sqrt{l^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}.$$

但

$$s=\overline{OC}+\overline{CB},$$