财经类
核心课程
系列教材
总主编 伍中信

普通高等学校精品课程教材

XIAN XING DAI SHU

线性代数

第二版

主　编　吴建国
副主编　刘平兵　谭　立

湖南人民出版社

财经类核心课程系列教材
总主编 伍中信

普通高等学校精品课程教材

XIAN XING DAI SHU

线性代数

第二版

主　编　吴建国
副主编　刘平兵　谭　立

湖南人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／吴建国主编．—长沙：湖南人民出版社，2011.3

ISBN 978－7－5438－7297－4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①线性代数－高等职业教育－教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第034704号

线性代数

吴建国 主编

责任编辑：莫金莲 李好霏 贺 娅
装帧设计：谢俊平

出版、发行：湖南人民出版社
网 址：http://www.hnppp.com
地 址：长沙市营盘东路3号
邮 编：410005
经 销：湖南省新华书店
印 刷：长沙丰华印刷厂
印 次：2011年3月第1版第1次印刷
开 本：787×1092 1/16
印 张：12
字 数：328000
书 号：ISBN 978－7－5438－7297－4
定 价：28.80元

营销电话：0731－82226732 （如发现印装质量问题请与承印厂调换）

总序

ZONGXU

在钟灵毓秀的岳麓山下，林立的高校似争奇斗艳的奇葩；在“唯楚有才，于斯为盛”的大学城内，群贤荟萃，荆玉焕彩．这里，源远流长的湖湘文化孕育了一代代贤哲俊彦，经世致用的湖湘精髓砥砺着一批批乡贤名士，而今，湖湘文化的接力棒依然鞭策着湖南财专的莘莘学子．为了传承文明，他们焚膏继晷，著书立说，撰写了一部部较高质量的著作．

湖南财专，兴学久远，私立起源，几经合并、迁址易名，改革开放后拓址新建，前后70余年．虽历尽坎坷，仍薪火相传，弦歌不绝．历代师生，筚路蓝缕，励精图治，春华秋实．正值高教突飞猛进、日新月异之际，湖南财专同仁审时度势，踏上了跨越式发展之路．为了抢抓机遇，夯实基础，内强实力，外树形象，财专人在办学理念上进行了不懈的探索．

近几年来，为实现学校跨越式发展战略目标，根据高等职业教育学科专业建设、课程建设、教材建设的发展趋势，结合我校实际，进一步明确了办学理念，理清了办学思路，调整和完善了学科与专业结构，形成了既注重人才培养模式的优化，又能适应现代化建设对财经类应用型人才的需求，体现和反映学校办学特色、办学风格和办学传统．为此，学校先后启动了“学科专业建设工程”、“重点课程建设工程”和“重点教学改革研究工程”，并于2008年5月资助出版12门重点建设课程教材．这次资助出版的重点建设课程教材，涉及市场营销、公共投资、经济数学、西方经济学、会计信息系统等方面．集中体现了学校主动适应人才

市场需求的变化，重视实践教学，注重学生的自学能力、思考能力、应用能力的培养，不断优化课程体系，更新教学内容，优化知识结构，突出个性化养成，努力提高人才培养质量等方面所取得的成果．这批教材的出版，标志着我校的办学理念日趋成熟，专业结构日益优化，学校办学特色进一步彰显．

这批教材的作者长期在教学科研一线工作，既有丰富的教学经验，又有一定的教学积累和良好的专业基础，这批教材体现了财专学人的学术视野和教学理念，我们感谢湖南人民出版社为我们提供了这样的平台．当然，这批教材也存在着这样或那样的不足．我们恳请学者贤达关注、批评、指正．

衷心希望这批教材能够成为湖南财专实现跨越式发展的隆重献礼！

是为序．

伍中信

2008 年 5 月

（总序作者为湖南财政经济学院院长，湖南大学会计学院博士生导师）

前言

QIANYAN

由于科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到社会经济的各个领域，数学的重要性已被整个社会所公认，数学的应用日益广泛深入．高等院校作为培育人才的摇篮，其数学课程的开设具有特别重要的意义．

线性代数作为高等院校专业的基础数学课程之一，具有较强的逻辑性和抽象性．本书编写的宗旨：以“掌握概念，强化应用，培养技能”为重点，以“数学为本，经济为用”为目标．本书既突出了数学方法与应用的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性．

本书作为普通高等学校精品课程教材，适用于高等院校经济管理类专业的教学．教材内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性代数应用问题共六章，并附有数学实验、习题参考答案．教学时可根据专业需要、学生基础、课时实际，有针对性地选择，实行模块化教学，使学生能更扎实地掌握所学知识，提高教学效果．

本书由吴建国教授任主编，刘平兵副教授、谭立副教授任副主编．吴建国教授拟定全书编写大纲并负责修改补充和总纂定稿．全书编写分工如下：第 1 章：邓永辉；第 2 章：刘平兵、李兰平；第 3 章：谭立、陈丽萍；第 4 章：吴建国；第 5 章：李建伟；第 6 章：刘平兵；附录部分：吴建国．

本书在讨论编写过程中，博采众长，借鉴了许多同行的论著、编著等科研成果，得到了学校领导、教务处、基础课部的大力支持，湖南人民出版社为本书的编写出版给予了大量的帮助，在此一并表示深深的谢意！

由于编写水平有限，教材中的不妥之处在所难免，恳请专家、同行和读者予以指正．

编　者

2009 年 1 月

第二版说明

《线性代数》（第二版）是对2009年版的修订，这次修订，改正了原来的一些错误与不妥之处，对第一章增添了排列与逆序等内容，其余章节均有一定的增删，但基本上保持了原来的风格与体系，相信读者使用起来会更适用.

参加第二版修改与审阅的有：吴建国、刘平兵、谭立、陈丽萍、邓永辉、李建伟、李兰平，由吴建国教授任主编，刘平兵副教授、谭立副教授任副主编.

书中不妥之处，敬请读者批评指正.

编　者

2011年2月

目录

contents

第1章 行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，本章将由简单的二、三阶行列式推广到 n 阶行列式，然后讨论 n 阶行列式的性质及其计算方法，最后介绍利用行列式来解线性方程组的 Cramer 法则.

学习本章要求掌握 n 阶行列式的定义，熟悉并能应用行列式的基本性质，掌握行列式的计算方法以及利用行列式解有关线性方程组的 Cramer 法则.

第2章 矩阵

矩阵是数学中一个重要内容，也是经济模型、工程计算等问题中强有力的解决问题的工具. 矩阵作为研究线性变换、向量的线性相关性及求解线性方程组的工具，在线性代数中具有尤其重要的地位.

学习本章，要求掌握矩阵的概念，熟练掌握矩阵的运算，理解逆矩阵的概念与性质，会求逆矩阵，会对矩阵进行初等变换，并会求矩阵的秩.

目录 contents

第3章 线性方程组

线性方程组是线性代数的重要内容之一，自然科学和经济管理中的许多问题都可以归结为求线性方程组的解.

学习本章，应掌握线性方程组有解的判别定理，熟练求解线性方程组；理解向量的概念，掌握向量的运算法则；理解向量组的线性相关性及其有关性质，会求向量组的极大无关组及其秩，并能熟练地用导出组的基础解系表示线性方程组的解.

第4章 矩阵的特征值与特征向量

在经济理论及其应用研究中，经常需要讨论矩阵的特征值等问题. 本章将对向量的内积、方阵的特征值与特征向量以及方阵的相似与对角化等问题进行探讨，这些内容在许多学科中都有非常重要的应用.

学习本章，应理解矩阵的特征值和特征向量的概念，会计算矩阵的特征值和特征向量；掌握矩阵与对角矩阵相似的充分与必要条件；理解实对称矩阵的特征值和特征向量的性质；熟练掌握实对称矩阵的对角化.

第5章 二次型

前面我们主要研究线性问题，但在实际问题中还存在大量解线性问题，其中最简单的模型就是二次型. 本章利用矩阵工具来研究二次型，介绍化二次型为标准形的几种方法.

学习本章，应理解二次型及其矩阵的概念；理解二次型的标准形和规范形的概念，会化二次型为标准形，并能判断一个二次型的正定性.

第6章 应用问题

矩阵理论在自然科学、社会科学和经济管理领域有着广泛的应用. 以下用三方面实例来介绍这类应用.

学习本章,主要掌握以下三类问题的求解:交通流问题;递归关系式的矩阵解法;投入产出数学模型.

附录 数学实验、答案及参考文献

计算机是学习数学的重要工具,它运用一些数学软件完成必要的计算、分析和判断,来解决一些典型的数学问题,从而避免繁琐的公式推导和数学运算. 我们将数学内容与计算机应用有机结合起来就是数学实验. 本附录将介绍 Mathematica 数学软件及其在线性代数方面的基础实验.

目录 contents

第1章 CHAPTER

行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，本章将由简单的二、三阶行列式推广到n阶行列式，然后讨论n阶行列式的性质及其计算方法，最后介绍利用行列式来解线性方程组的Cramer法则.

学习本章要求掌握n阶行列式的定义，熟悉并能应用行列式的基本性质，掌握行列式的计算方法以及利用行列式解有关线性方程组的Cramer法则.

第1节 n 阶行列式

§1.1.1 二阶行列式

行列式的概念是从解线性方程组的需要中引进来的．所谓线性方程组是指未知项的最高次数是一次的方程组,其中最简单的是在中学时已经学习过的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 a_{ij}表示第 i 个方程中第 j 个未知数的系数,b_i 表示第 i 个方程的常数项．用加减消元法来解方程组(1.1),第一、二两个方程分别乘以 a_{22}、a_{12},然后相减,消去未知数 x_2,得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

同理消去未知数 x_1,得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,方程组(1.1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了便于记忆上述公式,我们引入如下记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

称为二阶行列式,其中 a_{ij}称为这个行列式第 i 行第 j 列的元素,横排为行,竖排为列.

二阶行列式表示的代数和,可以用画线(图 1 -1)的方法记忆,即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积。

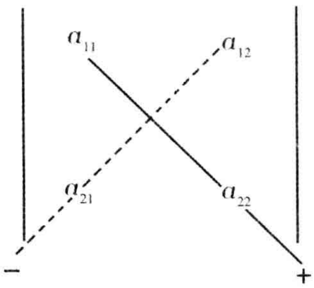

图 1－1

显然，当 $D\neq 0$ 时，利用(1.2)知方程组(1－1)的解可表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},$$

其中
$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

例 1 设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$，当 λ 为何值时 $D=0$.

【解】

$$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda$$

当 $\lambda^2+3\lambda=0$，则 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-3$.

因此可得

当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-3$ 时，$D=0$.

§1.1.2 三阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$
称为三阶行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.3}$$

三阶行列式表示的代数和，也可以用画线(图 1－2)的方法记忆，其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线联结的三个元素乘积是代数和中的负项.

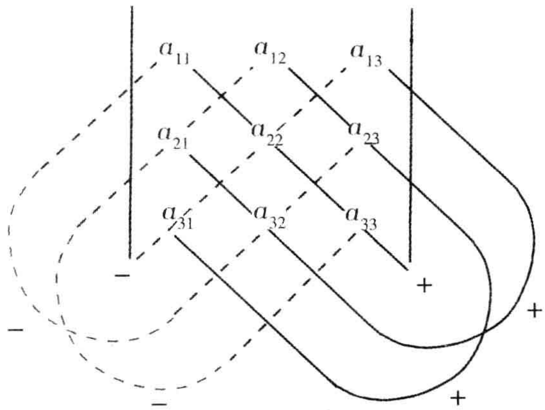

图 1-2

例 2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0-1\times5\times0-2\times4\times6-3\times0\times(-1)=-58$

例 3 a,b 满足什么条件时有

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

【解】

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2$$

若要 $D=0$,则须 a、b 同时为零. 因此当 $a=0$ 且 $b=0$ 时,$D=0$.

§1.1.3 n 阶行列式

一、排列与逆序

由 n 个不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$,称为一个 n 级排列.

例如,1234 及 2431 都是 4 级排列,25413 是一个 5 级排列.

定义 1.1 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面($i_s<i_t$),则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数,称为它的逆序数,记为

$$N(i_1i_2\cdots i_n)$$

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 是奇数则称为奇排列,是偶数则称为偶排列.

例如,排列 23154 中,2 在 1 前面,3 在 1 前面,5 在 4 前面,共有 3 个逆序,即 $N(23154)=3$,所以 23154 为奇排列.

例如,由 1,2,3 这 3 个数码组成的 3 级排列共有 $3!=6$ 种,其排列情况如表 1-1.

表 1－1

排列	逆序	逆序数	排列的奇偶性
1 2 3	无	0	偶排列
1 3 2	32	1	奇排列
2 1 3	21	1	奇排列
2 3 1	21,31	2	偶排列
3 1 2	31,32	2	偶排列
3 2 1	21,31,32	3	奇排列

在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调,其它数码不变,得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,这样的变换,称为一个对换,记为对换$(i_s,i_t)$.

例如,对排列 21354 施以对换(1,4)后得到排列 24351.

定理 1.1 任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变.

【证】 (1)首先讨论对换相邻两个数码的特殊情形,设排列为

$$AijB$$

其中 A,B 表示除 i,j 两个数码外其余的数码,经过对换(i,j),变为排列

$$AjiB$$

比较上面两个排列中的逆序,显然,A,B 中数码的次序没有改变,并且 i,j 与 A,B 中数码的次序也没有改变,仅仅改变了 i 与 j 的次序,因此,新排列仅比原排列增加了一个逆序(当 $i<j$ 时),或减少了一个逆序(当 $i>j$ 时),所以它们的奇偶性相反.

(2)在一般情形,设原排列为

$$Aik_1k_2\cdots k_sjB$$

经过对换(i,j),变为新排列

$$Ajk_1k_2\cdots k_siB$$

由原排列中将数码 i 依次与 $k_1,k_2\cdots k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻对换,变为

$$Ak_1k_2\cdots k_sjiB$$

再将 j 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作 s 次相邻对换得到新排列,即新排列可以由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到. 由(1)的结论可知改变了奇数次奇偶性,所以它与原排列的奇偶性相反.

二、n 阶行列式的定义

观察二阶行列式和三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

(1)二阶行列式表示所有位于不同的行不同的列的两个元素乘积的代数和. 两个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}$$

j_1j_2 为 2 级排列,当 j_1j_2 取遍了 2 级排列(12,21)时,即得到二阶行列式的所有项(不包含符号),共为 2! =2 项.

二阶行列式表示所有位于不同的行不同的列的 3 个元素乘积的代数和. 3 个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列,当 $j_1j_2j_3$ 取遍了 3 级排列时,即得到三个阶行列式的所有项(不包含符号),共为 3! =6 项.

(2)每一项的符号是,当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号,如在上述二阶行列式中,当 $N(j_1j_2)$ 为偶数时取正号,为奇数时取负号;在上述三阶行列式中,当 $N(j_1j_2j_3)$ 为偶数时取正号,为奇数时取负号.

根据这个规律,可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.2 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,其中横排称为行,纵排称为列,它表示所有位于不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和,各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号. 因此,n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 级排列,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍了 n 级排列时,则得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项.

一阶行列式 $|a|$ 就是 a.

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$.

对于四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中有 4! =24 项. 其中

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 行标排列为 1234,元素取自不同的行;列标排列为 1234,元素取自不同的

列,且逆序数 $N(1234)=0$,即元素乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 前面应冠以正号,所以 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 为 D 的一项.

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 行标排列为 1234,元素取自不同的行;列标排列为 4312,元素取自不同的列,且逆序数 $N(4312)=5$,即元素乘积 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前面应冠以负号,所以 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 为 D 的一项.

$a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$ 有两个元素取自第四列,所以它不是 D 的一项.

例 4 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值,其中 a_{ij} 可以任意取值($i=1,2\cdots,n$).

【解】 记行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

D 中有很多项为零,现在考察有哪些项不为零,一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行,但第一行中只有 a_{11} 不为零,因而 $j_1=1$,即 D 中只有含 a_{11} 的那些项可能不为零,其它项均为零;一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行,第二行中有 a_{21} 和 a_{22} 不为零,因第一个元素 a_{11} 已取自第一列,因此第二个元素不能取自第一列,即不能取 a_{21},所以第二个元素只能取 a_{22},从而 $j_2=2$,即 D 中只有含有 $a_{11}a_{22}$ 的那些项可能不为零,其它项均为零;这样下去,可得 $j_3=3,j_4=4,\cdots,j_n=n$. 因此,D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为零,其它项均为零. 由于 $N(12\cdots n)=0$,因此这一项应取正号,于是可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

我们称上面形式的行列式为下三角形行列式.

同时可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

其中 a_{ij} 可以任意取值($i=1,2\cdots,n$).

特殊情况: