经典教材同步辅导

出版社同济大学主编《高等代数》

九章丛书

高等代数

高教第二版

辅导及习题全解

下册

主编/田国华　董志伟
编写/九章系列课题组

◇知识点窍
◇逻辑推理
◇习题全解
◇全真考题
◇名师执笔
◇题型归类

人民日报出版社

高校经典教材同步辅导

高等代数

（高教第二版·下册）

辅导及习题全解

主　编　田国华　董志伟

主　审　杨富云

编　写　九章系列课题组

人民日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

高校经典教材同步辅导·高等代数(高教第二版·下册)/田国华,董志伟主编.—北京:人民日报出版社,2004.4

ISBN 7-80153-865-X

Ⅰ.高… Ⅱ.①田…②董… Ⅲ.高校—教学参考资料

Ⅳ.G624

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 030532 号

高校经典教材同步辅导·高等代数(高教第二版·下册)

主　　编:田国华　董志伟
责任编辑:安　申
封面设计:吴文忠

出版发行:人民日报出版社(北京金台西路 2 号/邮编:100733)
经　　销:新华书店
印　　刷:北京顺天意印刷有限公司

字　　数:306 千字
开　　本:850×1168　1/32
印　　张:15.5
印　　数:3000
印　　次:2007 年 1 月第 2 次印刷

书　　号:ISBN 7-80153-865-X/G·479
定　　价:10.00 元(全五册·128.00 元)

前　言

高等代数是数学学科中一门重要的基础课程，也是数学专业硕士研究生入学考试的必考科目，它对学生的抽象思维能力、逻辑推理能力的培养，以及后续课程的学习起着非常重要的作用。但是，大多数学生在学习过程中，存在对基本概念以及定理结论理解不透，解题缺乏思路等问题。

为帮助学生消化课堂讲授内容，掌握高等代数的基本理论和基本方法，提高解题的技巧和方法，根据丘维声教授主编的《高等代数》(第二版)编写了本辅导教材。

本书按课本的自然章节编排，每章由以下几部分组成：

一、基本要求、重点与难点——列出各章重点掌握和理解的知识点。

二、重要定理、公式及结论——将各章节的内容进行了简明扼要的叙述、归纳和总结，突出必须掌握和理解的核心内容，以加深读者对其理解。

三、典型例题解析——精选了高等代数中具有代表性的部分典型例题，归纳成各种题型，通过对典型例题的解题分析，使读者可以举一反三，触类旁通。

四、课后习题全解——给出了各章习题的全部解答，本书除了有传统习题集的解题过程外，还有以下特点：

1. **知识点窍**：运用公式、定理及定义来点明知识点；

2. **逻辑推理**：阐述习题的解题过程；

3. **解题过程**：概念清晰、步骤完整、数据准确、附图齐全。

把“知识点窍”、“逻辑推理”、“解题过程”串起来，做到融会贯通，最后给出教材课后习题的答案，在解题思路和解题技巧上进行精练分析和引导，巩固所学，达到举一反三的效果。

由于编着水平有限及编写时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评指正。

编　者

目　录

第七章　多项式环 …………………………… (1)

【基本要求、重点与难点】 …………………………… (1)

【重要定理、公式及结论】 …………………………… (4)

【典型例题解析】…………………………… (9)

一、一元多项式的基本概念 …………………………… (9)

二、一元多项式的整除理论…………………………… (10)

三、一元多项式的带余除法理论…………………………… (13)

四、一元多项式的公因式和最大公因式…………………………… (18)

五、一元多项式的因式分解理论…………………………… (29)

六、一元多项式根的求解…………………………… (39)

七、一次多项式根的判别…………………………… (42)

八、一次因式与根及根与系数的关系…………………………… (50)

九、多项式环及对称的多项式…………………………… (57)

十、有限域的概念…………………………… (70)

【课后习题全解】 …………………………… (73)

第八章　线性空间 …………………………… (135)

【基本要求、重点与难点】 …………………………… (135)

【重要定理、公式及结论】 …………………………… (137)

【典型例题解析】…………………………… (144)

一、线性空间的定义及其性质 …………………………… (144)

二、线性空间中向量组的相关性 …………………………… (151)

三、线性空间中矩阵的计算 …………………………… (158)
四、线性空间的基维数 ………………………………… (161)
五、线性空间的坐标 …………………………………… (167)
六、线性子空间的定义及性质 ………………………… (174)
七、线性子空间的运算 ………………………………… (181)
八、子空间的交与和 …………………………………… (187)
九、子空间的直和 ……………………………………… (192)
十、线性空间的同构 …………………………………… (198)
十一、商空间 …………………………………………… (207)
【课后习题全解】…………………………………………… (211)

第九章 线性映射 ……………………………………… (242)
【基本要求、重点与难点】 ………………………………… (242)
【重要定理、公式及结论】 ………………………………… (245)
【典型例题解析】…………………………………………… (254)
一、线性变换的定义及运算 …………………………… (254)
二、线性映射的定义及性质 …………………………… (260)
三、线性变换的核与象 ………………………………… (261)
四、线性变换的矩阵表示 ……………………………… (269)
五、线性变换的特征值与特征向量 …………………… (282)
六、线性变换的可对角化条件的讨论 ………………… (294)
七、线性变换的不变子空间 …………………………… (299)
八、幂零矩阵、幂等矩阵及对合矩阵 ………………… (305)
九、矩阵的最小多项式 ………………………………… (311)
十、矩阵的 Jordan 标准形 …………………………… (315)
十一、线性函数 ………………………………………… (330)
十二、对偶空间 ………………………………………… (337)
【课后习题全解】…………………………………………… (340)

第十章　具有度量的线性空间 …………………………… (410)
【基本要求、重点与难点】 …………………………… (410)
【重要定理、公式及结论】 …………………………… (413)
【典型例题解析】…………………………………… (422)
一、双线性函数的概念及有关问题 ………………… (422)
二、欧氏空间的定义及基本性质 …………………… (426)
三、正交补和正交投影的基本概念、应用 ………… (436)
四、正交变换和对称变换的基本概念及性质 ……… (441)
五、酉空间和酉矩阵的定义及基本性质 …………… (446)
六、辛空间和辛矩阵的定义及基本性质 …………… (453)
七、关于矩阵的问题 ……………………………… (456)
【课后习题全解】…………………………………… (459)

第七章　多项式环

【基本要求、重点与难点】

一、基本要求

1. 掌握一元多项式的概念、运算规则以及通用性质. 理解环的概念.

2. 理解多项式的整除性概念；掌握带余除法定理及其基本性质. 理解最大公因式的概念；会使用辗转相除法求最大公因式. 了解互素的定义和重要性质.

3. 理解不可约多项式的定义和基本性质；掌握多项式的唯一因式分解定量. 了解多项式的导数、求导法则. 掌握重因式的概念；会使用辗转相除法判断多项式有无重因式.

4. 了解多项式函数环、同构映射的定义. 理解余数定理和代数基本定理. 会使用多项式的 Vieta 公式. 掌握复系数(实系数)唯一因式分解定理.

5. 理解本原多项式的概念及基本性质. 会用 Eisenstein 判别法判别多项式在有理数域上的不可约性. 会求解有理数域上多项式的全部有理根.

6. 了解多元多项式环的定义. 理解对称多项式的定义及其基本定理. 掌握多项式 $f(x)$ 的判别式 $D(f)$ 的定义. 会用牛顿公式把幂和用初等对称多项式表示.

7. 理解数域的基本概念及相关特征.

二、重　　点

1. 整除理论:整除、最大公因式、互素

2. 因式分解理论:不可约多项式、多项式的因式分解、有理系数不可约多项式的判别

3. 根的理论:多项式函数、多项式的根、代数基本定理、根与系数的关系、有理系数多项式有理根的求法

三、难　　点

1. 唯一因式分解定理的应用

1) 多项式 $f(x)$的分解式给出了它的全部不可约因式(在相伴意义下);

2) 没有统一的方法求出一个次数大于零的多项式的所有不可约多项式;

3) 多项式 $f(x)$的标准分解式

在多项式 $f(x)$的分解式中,可以把每一个不可约因式的首项系数提出来,使它们成为首项系数为 1 的多项式,再把相同的不可约因式的乘积写成乘幂的形式,于是 $f(x)$的分解式成为

$$f(x) = cp_1^{r_1}(x)cp_2^{r_2}(x)\cdots cp_m^{r_m}(x) \tag{1}$$

其中 c 是 $f(x)$ 的首项系数,$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_m(x)$ 是不同的首项系数为1的不可约多项式,$r_1,r_2,\cdots,r_m$ 是正整数.这种分解式(1) 称为 $f(x)$ 的标准分解式.

2. 不可约多项式的判定方法

1) 反证法

为了证明 $f(x)$ 在有数理域上不可约,可以假设

$f(x) = q_1(x+s_1)q_2(x+s_2)\cdots q_t(x+s_t),s_1,s_2\cdots s_t \in Q$

再证明无法找到有理数 $s_1, s_2, \cdots, s_t$ 使得上式成立.

2) Eisenstein 判别法

设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

是一个次数 n 大于零的整系数多项式. 如果存在一个素数 p,使得满足:

1° $p \nmid a_n$;

2° $p \mid a_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$;

3° $p^2 \nmid a_0$.

那么,$f(x)$ 在有理数域上不可约.

有时直接用Eisenstein判别法无法判断 $f(x)$ 是否在 Q 上不可约,我们可以通过不定元 x 用 $Q(x)$ 中的元素 $x+b$ 代入,得到另一个多项式 $g(x) = f(x+b)$. 对 $g(x)$ 可能用Eisenstein判别法就能判断它不可约. 如果 $g(x)$ 在 Q 上不可约,则 $f(x)$ 在 Q 上也不约.

3) 利用根的存在性判别

对于一次或二次整系数多项式 $f(x)$,如果它可约,则它一定有一次因式,从而它必有有理根. 我们可以先求出这个整系数多项式的全部有理根,据此判断它是否可约.

3. 求解判别式 $D(f)$

由于 $D(f) = \prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (c_i - c_j)^2 \mid B \mid\mid B' \mid = \mid BB' \mid$

其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{bmatrix}$,

于是 $D(f)=\begin{vmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n}c_i & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}c_i^{n-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{n}c_i & \sum\limits_{i=1}^{n}c_i^2 & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}c_i^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n}c_i^{n-1} & \sum\limits_{i=1}^{n}c_i^n & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}c_i^{2n-2} \end{vmatrix}$.

利用牛顿公式,可以用 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的系数来表示 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的前$(2n-2)$次幂和,再将结果代入上式即可求得判别式 $D(f)$.

【重要定理、公式及结论】

1. 多项式的运算法则

$\forall f,g,h\in K[x]$,有

1° 加法交换律,即 $f+g=g+f$;

2° 加法结合律,即$(f+g)+h=f+(g+h)$;

3° 零多项式具有性质:$0+f=f+0=f$;

4° 设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$,定义 $-f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}(-a_i)x^i$,则

$$f+(-f)=(-f)+f=0$$

称 $-f$ 是 f 的负元素;

5° 乘法交换律,即 $fg=gf$;

6° 乘法结合律,即$(fg)h=f(gh)$;

7° 零次多项式 1 具有性质:$1f=f1=f$;

8° 乘法对于加法的分配律 :

$$f(g+h)=fg+fh,$$

$$(g+h)f = gf + hf.$$

多项式的减法定义如下：

$$f - g \xlongequal{\text{def}} f + (-g).$$

2. 带余除法定理

对于 $K[x]$中任意两个多项式 $f(x)$与 $g(x)$，其中 $g(x) \neq 0$，在 $K[x]$中存在唯一的一对多项式 $h(x)$，$r(x)$，使得

$$f(x) = h(x)g(x) + r(x),\ \deg r(x) < \deg g(x).$$

3. 辗转相除法

对于 $K[x]$中任意两个多项式 $f(x)$与 $g(x)$，存在它们的一个最大公因式 $d(x)$，并且 $d(x)$可以表示成 $f(x)$与 $g(x)$的一个组合，即有 $K[x]$中多项式 $u(x)$与 $v(x)$，使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

4. 互素的充要条件及性质

1）充要条件

$K[x]$中两个多项式 $f(x)$与 $g(x)$互素的充分必要条件是有 $K[x]$中的多项式 $u(x)$，$v(x)$，使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

2）性质及结论

1° 在 $K[x]$中，如果

$$f(x) \mid g(x)h(x),\text{且}(f(x),g(x)) = 1,$$

则
$$f(x) \mid h(x);$$

2° 在 $K[x]$中，如果

$$f(x) \mid h(x),g(x) \mid h(x),\text{且}(f(x),g(x)) = 1,$$

则
$$f(x)g(x) \mid h(x);$$

3° 在 $K[x]$中，如果

$$(f(x),h(x)) = 1,(g(x),h(x)) = 1,$$

则
$$(f(x)g(x),h(x)) = 1.$$

5. 不可约多项式的性质

1° $K[x]$中不可约多项式 $p(x)$与任一多项式 $f(x)$的关系只有两种可能：或者 $p(x)\mid f(x)$，或者 $p(x)$与 $f(x)$互素；

2° 在 $K[x]$中，如果 $p(x)$不可约，且 $p(x)\mid f(x)g(x)$，则

$$p(x)\mid f(x)\text{或 } p(x)\mid g(x);$$

3° $K[x]$中，$p(x)$不可约当且仅当 $p(x)$不能分解成两个次数较 $p(x)$的次数低的多项式的乘积.

6. 唯一因式分解定理

$K[x]$中每一个次数大于零的多项式 $f(x)$都能唯一地分解成数域 K 上有限多个不可约多项式的乘积. 所谓唯一性是指，如果 $f(x)$有两个这样的分解式：

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

则一定有 $s=t$，且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x)\sim q_i(x),\quad i=1,2,\cdots,s.$$

7. 重因式的性质

1° 在 $K[x]$中，如果不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的一个 $k(k\geqslant 1)$重因式，则 $p(x)$是 $f(x)$的导数 $f'(x)$的一个 $k-1$ 重因式. 特别地，多项式 $f(x)$的单因式不是 $f(x)$的导数 $f'(x)$的因式；

2° 在 $K[x]$中，不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的重因式的充分必要条件为 $p(x)$是 $f(x)$与 $f'(x)$的公因式；

3° $K[x]$中次数大于零的多项式 $f(x)$没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$与它的导数 $f'(x)$互素；

4° 设数域 F 包含数域 K，对于 $f(x)\in K[x]$，$f(x)$在 $K[x]$中没有重因式的充分必要条件是把 $f(x)$看成 $F(x)$中的多项式时，$f(x)$在 $F[x]$中没有重因式. 即，$f(x)$有无重因式不会随数域的扩大而改变.

8. 余数定理

在 $K[x]$中，用一次多项式 $x-a$ 去除多项式 $f(x)$，所得的余

式是 K 中的一个数，这个数等于 $f(a)$.

9. 多项式根的性质

1° $K[x]$中，$x-a$ 整除 $f(x)$当且仅当 a 是 $f(x)$在 K 中的一个根，即：

$K[x]$中的多项式 $f(x)$有一次因式的充分必要条件是 $f(x)$在 K 中有根；

2° $K[x]$中的 n 次$(n\geqslant 0)$多项式在 K 中至多有 n 个根（重根按重数计算）；

3° 设 $K[x]$中两个多项式 $f(x)$与 $g(x)$的次数都不超过 n. 如果 K 中有 $n+1$ 个不同元素 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$，使得 $f(a_i)=g(a_i)$，$i=1,2,\cdots,n+1$，则 $f(x)=g(x)$.

10. 代数基本定理

每个次数大于零的复系数多项式在复数域中至少有一个根.

11. Vieta 公式

设 $f(x)$ 是 $K[x]$ 中首项系数为 1 的 n 次$(n\geqslant 1)$ 多项式，把 $f(x)$ 看成复系数多项式，则 $f(x)$ 有 n 个复根 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，根与系数有如下关系：

$$a_{n-1}=-(c_1+c_2+\cdots+c_n),$$

$$\cdots,$$

$$a_{n-k}=(-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k},$$

$$\cdots,$$

$$a_0=(-1)^n c_1c_2\cdots c_n.$$

12. 实系数多项式因式分解定理及性质

1) 定理

（实系数多项式唯一因式分解定理）每个次数大于零的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与判别式小于零的二次因式的乘积，其标准分解式为：

$f(x)=a(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_s)^{r_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{k_t}$.

2) 性质

1° 设 $f(x)$是实系数多项式，如果 c 是 $f(x)$的一个复根，则 c 的共轭复数 $\bar{c}$ 也是 $f(x)$的一个复根；

2° 实数域上的不可约多项式都是一次多项式或判别式小于零的二次多项式.

13. 有理系数多项式的性质

1° 两个本原多项式 $g(x)$与 $h(x)$在 $Q[x]$中相伴当且仅当

$$g(x)=\pm h(x);$$

2° 高斯(Guass)引理　两个本原多项式的乘积还是本原多项式；

3° 如果一个次数大于 0 的整系数式项式 $f(x)$在 Q 上可约，则它可以分解成两个次数比它低的整系数多项式的乘积；

4° 如果$\dfrac{q}{p}$是一个次数大于零的整系数多项式 $f(x)$的有理根，并且$(p,q)=1$，那么$\dfrac{f(1)}{p-q}$,$\dfrac{f(1)}{p+q}$都是整数.

14. 对称多项式基本定理

对于 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$中任意一个对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，都存在 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$中唯一的一个多项式 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n).$$

15. 用初等对称多项式表示对称多项式

设 n 元对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$按字典顺序排列法的首项是 $ax_1^{l_1}ax_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$，$a\neq 0$. 令 $\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a\sigma_1^{l_1-l_2}=a\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_{n-1}^{l_{n-1}-l_n}\sigma_n^{l_n}$，则 $f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n]$的首项“小于”$f$ 的首项(即 f 的首项的幂指数组大于 f_1 的首项的幂指数组).

16. 复数域中重根的判别

1° $f(x)\in K[x]$在复数域中有重根的充分必要条件为：

$$D(f)=0$$

2° 牛顿(Newton)公式　当$1\leqslant k\leqslant n$时，幂和s_k能表示为：

$$s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\sigma_2 s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k k\sigma_k=0;$$

当$k>n$时，

$$s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\sigma_2 s_{k-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}s_{k-n+1}+(-1)^n\sigma_n s_{k-n}=0.$$

【典型例题解析】

一、一元多项式的基本概念

1. 设n级矩阵$B=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$，令$A=aI+B$，其中$a\neq0$. 证明：$A$可逆，并且求$A^{-1}$.

【知识点窍】 一元多项式环的通用性质.

【逻辑推理】 通过不定元x用环R中任一元素t代入，就可以得到环R中有关加法与乘法的等式. 再利用矩阵有关性质，即可证明并且求出A^{-1}.

【解题过程】 由B的定义可知$B^n=0$，在$R[x]$中直接计算可得

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})=1-x^n. \qquad (1)$$

因为$R[B]$可看成是R的交扩环，所以在式(1)中x用$-\frac{1}{a}B$代入得