大学数学改革系列教材

线性代数
(理工类简明版)

LINEAR ALGEBRA

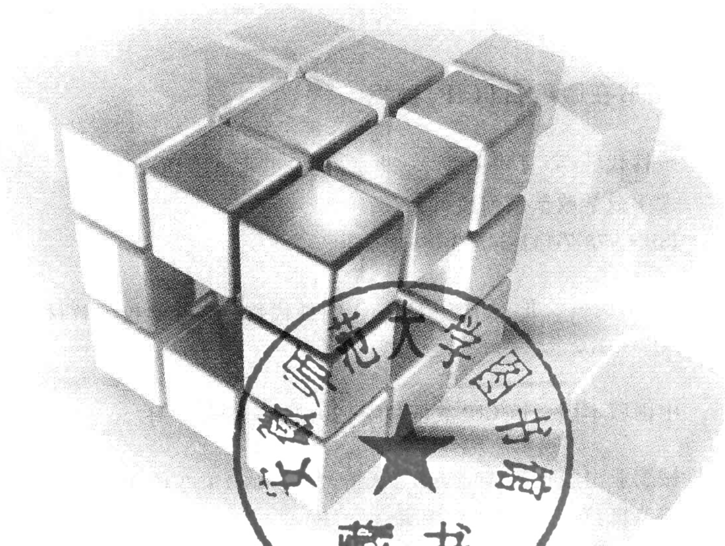
薛有才 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

大学数学改革系列教材

线性代数

（理工类简明版）



主　编　薛有才
副主编　许梅生　陶祥兴

机械工业出版社

本教材包含了线性代数的传统内容:矩阵、线性方程组、行列式、向量与向量空间、矩阵的相似对角化、二次型、线性变换和线性空间. 同时,为了适应科学技术的发展和读者工作、发展的需要,也增加了相关的计算方法、程序设计语言及实验,以帮助读者掌握现代科学计算方法. 本教材中有许多应用型例题与练习题,能够帮助读者了解和学习线性代数方法的应用. 教材中的讨论与研究性题目是特意为提高学生思维与创新能力而安排的. 教材中有 * 号的内容,可供不同学校或不同专业选用.

本书可以满足 32 ~ 45 学时教学的需要,可供高等学校理工类各专业与经管类各专业教学使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/薛有才主编. —北京:机械工业出版社,2012. 1
大学数学改革系列教材
ISBN 978-7-111-34593-0

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①薛…　Ⅲ. ①线性代数 - 高等学校 - 教材
Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 010171 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
策划编辑:郑　玫　责任编辑:郑　玫
版式设计:张世琴　责任校对:张　媛
封面设计:张　静　责任印制:乔　宇
北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)
2012 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
169mm × 239mm · 17. 5 印张 · 337 千字
标准书号:ISBN 978-7-111-34593-0
定价:32. 00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心:(010)88361066	门户网:http://www. cmpbook. com
销售一部:(010)68326294	
销售二部:(010)88379649	教材网:http://www. cmpedu. com
读者购书热线:(010)88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前言

线性代数是高等本科院校理、工、农、医、经济、管理等专业的一门重要基础课程，是现代科学技术的重要理论基础．同时，它也是解决实际问题的重要工具．线性代数理论是计算机离散化处理问题和数值计算的基础．本书是根据国家教育部高等教育本科线性代数课程的基本要求，结合作者多年教授本课程的体会而编写的，并与高中新的数学课程标准较好衔接．其目的是为普通高等学校理工类（少学时）与经管类专业的学生提供一本适用面较宽、容易阅读和学习、能够帮助学生较好地掌握本课程的基本知识、基本方法、基本应用的教材．

教材包含了线性代数的传统内容：矩阵、线性方程组、行列式、向量与向量空间、矩阵的相似对角化、二次型、线性变换和线性空间．同时，为了适应科学技术的发展和读者工作、发展的需要，也增加了相关的计算方法、程序设计语言及实验，以帮助读者掌握现代科学计算方法．本教材中有许多应用型例题与练习题，以帮助读者了解和学习线性代数方法的应用．

本教材具有鲜明的特色：

1. 起点低，坡度适中．本教材从学生熟悉的解线性方程组讲起，尽量采用提出问题、讨论问题、解决问题的方式来展开，以适应学生的思维习惯．

2. 突出应用．本教材从读者熟悉的实例和知识出发，用大家熟悉的语言、知识和思想方法进行自然的扩展来引出这些概念，以帮助读者更好的掌握这些概念．教材中提供了大量的工程实践、电子信息、金融财务等方面的应用实例，为课程提供了应用方法，增加了活力；各种不同类型的习题为培养各种能力而服务．

3. 重视几何模型作用，几何与代数方法相结合．我们知道，几何为代数提供了“背景”或“模型”，代数为几何提供了方法。所以，本教材中提供了大量的几何图形和案例，以帮助读者理解代数概念，同时这也是一种应用．

4. 注重思想方法与创新教育．本教材特别注重思想方法与创新能力的培养．各章中均编排了一些讨论与研究性习题（共6个），供教学中参考．请教师根据教学时间、学生学习的程度等适当进行教学安排。同学与读者应积极的阅读相

关的资料，积极思维与相互讨论。教材中的小字部分与阅读材料是供学有余力的同学阅读与参考的。

5. 现代化的处理方法．本教材突出了矩阵思想与初等变换的方法．例如，在定义和证明中处理的是矩阵的列（向量），而不是矩阵的元素；线性方程组也突出矩阵的处理方法；线性变换的思想贯穿教材始终，等等．

6. 各章中都有小结，一方面是为同学们提供一个复习归纳的材料，另一方面也是对线性代数的一些疑难问题给以解答．其中杂例部分既有常规性的例题，也有一些具有一般性的题目与一些考研题，可以帮助读者复习知识、理清关系、加深理解与进一步提高．

7. 与中学数学课程衔接较好．由于中学课程的变化，所以有部分中学生学习了线性代数的部分内容．本书的内容比较丰富，可以适应于不同学生的需要．

本教材第 1 章由浙江科技学院许梅生编写，第 2、3 章由浙江科技学院薛有才编写，第 4 章由浙江科技学院胡月编写，第 5 章由上海工程技术大学卢柏龙编写，第 6 章由浙江科技学院陶祥兴编写，第 7 章由浙江科技学院申国伦编写．薛有才、许梅生给出了全部习题答案。全书由薛有才策划，由薛有才、许梅生、陶祥兴统稿、审定．本书由浙江科技大学邸维征与中国计量学院罗敏霞教授担任主审．

在教材编写过程中，参考了诸多文献，我们对各位参考文献的作者表示真挚的谢意．

限于作者自身的水平，写作过程常深感言不及义，错误也在所难免，恳请读者不吝赐教，多多指正．

编　者

目录

第1章

n 阶行列式

行列式是由一些数字按一定方式构成的一种运算形式．这个思想早在 1683 ~1693 年就由日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼兹提出．多年以来，行列式主要应用在方程组的讨论中．

1750 年，瑞士数学家克莱姆（Cramer）写了一篇文章，他使用行列式构造 xOy 平面上的某些曲线方程组，而且给出了著名的用行列式解线性方程组的克莱姆法则．1812 年，法国数学家柯西（Cauchy）发表了一篇关于应用行列式计算多面体体积的文章．柯西的工作引起了人们对行列式的极大兴趣，许多数学家投入研究，持续大约 100 多年的时间，基本上形成了完整的行列式理论．

行列式理论由研究线性方程组的解法而产生，近代它又被广泛运用到数学、物理以及工程技术等许多领域．本章我们介绍 n 阶行列式的定义及其性质，n 阶行列式的计算和解线性方程组的克莱姆法则．

1.1 二元一次方程组与二阶行列式

我们来考察一般的二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

方程组（1.1.1）中第一个方程两边乘以 a_{21}，第二个方程两边乘以 a_{11} 得到

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y = a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = a_{11}b_2 \end{cases}$$

上方程组中两个方程相减消去 x，且当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

同理可得

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

这样，方程组的解用它的系数与常数项表示了出来．不难看出，方程组的解的表达具有规则的形式，首先，x，y 的分母都一样，都是由方程组中 x，y 的系数表示出来的一个形式．我们引进一个符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示这个数 $a_{11}a_{22} -$

$a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1.2}$$

并把它称为一个**二阶行列式**（Determinant）. 其中，四个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}称为它的**元素**，横的排为**行**（Row），竖的排为**列**（Column）.

显然，当式（1.1.2）中的两行元素成比例时，其值为零.

有了二阶行列式的概念，x，y 解的分子可写成如下的形式：

$$a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

并记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

注意：由于 D 的元素恰是方程组（1.1.1）中未知数 x，y 的系数，其位置仍按照原来的顺序排列不变，所以把 D 称为方程组（1.1.1）的**系数行列式**，而 D_1 与 D_2 分别是用方程组中的常数列代替 D 中的第一列与第二列. 则方程组（1.1.1）的解就可以写成以下公式（设 $D\neq0$）：

$$x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D} \tag{1.1.3}$$

这就是二元一次方程组解的**克莱姆**（Cramer）**公式**.

例 1.1.1 用行列式解方程组

$$\begin{cases} 3x - y = -1 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\times2-(-1)\times4=10$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\times2-7\times(-1)=5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3\times7-(-1)\times4=25$$

所以

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, y = \frac{D_2}{D} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

例 1.1.2 用二阶行列式来讨论平面内两条不同的直线 L_1 和 L_2 平行与重合的条件.

解 我们知道，两条不同的直线 L_1 和 L_2 平行的充要条件是它们的斜率相

等. 设直线 L_1 和 L_2 的一般方程为

$$L_1: A_1x + B_1y = C_1$$
$$L_1: A_2x + B_2y = C_2$$

设 $B_1 \neq 0$，$B_2 \neq 0$，则直线 L_1 和 L_2 的斜率分别为

$$m_1 = -A_1/B_1,\ m_2 = -A_2/B_2$$

因此，两直线的斜率相等，等价于

$$\frac{-A_1}{B_1} = \frac{-A_2}{B_2} \Leftrightarrow A_1B_2 = A_2B_1 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.1.4}$$

若 L_1 和 L_2 皆垂直于 x 轴，则 $B_1 = 0$，$B_2 = 0$，式（1.1.4）仍成立. 因此式（1.1.4）就是两条直线平行的条件. 如果我们把 L_1 与 L_2 的方程联立，此时，式（1.1.4）就是 $D = 0$. 当两条直线 L_1 和 L_2 重合时，

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

这也就是

$$D = D_1 = D_2 = 0 \tag{1.1.5}$$

当方程（1.1.4）与方程（1.1.5）都不成立时，即两直线既不平行，又不重合，那么它们必然相交于唯一的一点. 这样，我们事实上就得到了方程组（1.1.1）的解的结论：

命题　*方程组（1.1.1）有唯一解的充分必要条件是它的系数行列式 $D \neq 0$；当 $D = D_1 = D_2 = 0$ 时，方程组（1.1.1）有无穷多解；当 $D = 0$，而 D_1 与 D_2 至少有一个不为零时，方程组（1.1.1）无解.*

练习 1.1

1. 计算下列二阶行列式

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x+1 & x^2+2x-1 \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} \ln x & y^2 \\ x & \ln y \end{vmatrix}$

2. 计算行列式

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}$

比较计算结果，想一想，能找出规律么？利用定义证明你的结论.

3. 用二阶行列式解二元一次方程组

（1）$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

1.2 全排列及其逆序数

为了研究 n 阶行列式，我们先来介绍一个预备知识——排列及其逆序数．

定义 1.2.1 由 n 个自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 组成的一个有序数组，称之为 n 个自然数的一个**全排列**，也称为一个 n **级排列**（简称为**排列**）．

例如，由 1，2，3 这三个自然数所组成的不同的排列有 123，132，213，231，312，321，共有 6 种．

一般地，n 个自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的所有不同排列的种数用 P_n 来表示．显然

$$\mathrm{P}_n = n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

在上述 n 个自然数的 $n!$ 种不同排列中，$123\cdots n$ 是唯一的一个按从小到大的次序组成的排列，称为**标准排列**（或**自然排列**）．

定义 1.2.2 一个排列中的两个数，如果排在前面的数大于排在它后面的数，则称这两个数构成一个逆序．一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数．

例如，排列 213 的逆序数是 1，而排列 321 的逆序数是 3.

排列 $i_1 i_2 \cdots i_m$ 的逆序数记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_m)$．

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**．标准排列的逆序数为零，它是偶排列．

下面介绍求排列逆序数的方法．

设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 n 个自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，考察数 p_i（$i = 1, 2, \cdots, n$），如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的数有 t_i 个，则称 t_i 为数 p_i 的逆序数．一个排列的逆序数等于这个排列中所有数的逆序数之和，即

$$\tau(p_1 p_2 \cdots p_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

例 1.2.1 求排列 41325 的逆序数

解 在排列 41325 中，4 排在首位，其逆序数为 0；1 的前面比 1 大的数有一个 4，故其逆序数为 1；3 的前面比 3 大的数是一个数 4，故其逆序数也为 1；2 的前面比 2 大的数有两个：3 和 4，故其逆序数为 2；5 的前面没有比 5 大的数，故其逆序数为 0.

于是排列 41325 的逆序数 $\tau(41325) = 0 + 1 + 1 + 2 + 0 = 4$，它是一个偶排列．

例 1.2.2 求排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数

解 此排列中第一个数 n 的逆序数为 0，第二个数 $n-1$ 的逆序数为 1，第三

个数 $n-2$ 的逆序数为 2，…，第 n 个数 1 的逆序数为 $n-1$，所以此排列的逆序数

$$\tau[n(n-1)\cdots 21]=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列．对于排列所进行的这样一种变换称为**对换**．i，j 两个数的对换记为 (i, j)．

例如，偶排列 41325 中 3 与 5 对换后，得到排列 41523，经计算知，41523 的逆序数为 5，所以偶排列 41325 经过一次对换后变成奇排列 41523.

一般地，我们有以下结论：

定理 1.2.1　*一个排列经一次对换后必改变其奇偶性．*

证明　首先证明被对换的两个数在排列中是相邻的情形．

设有排列 $a_1a_2\cdots a_nabb_1\cdots b_m$，将 a 与 b 对换后变成排列 $a_1a_2\cdots a_nbab_1\cdots b_m$. 显然排列中数 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_m 的逆序数经过对换后并不改变，而数 a 与 b 的逆序数改变为：当 $a>b$ 时，经过对换后 a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1；当 $a<b$ 时，对换后 a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变．所以排列 $a_1a_2\cdots a_nbab_1\cdots b_m$ 与 $a_1a_2\cdots a_nabb_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同．

其次再证一般情形．

在排列 $a_1a_2\cdots a_nab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_k$ 中将 a 与 b 对换后变成排列 $a_1a_2\cdots a_nbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_k$. 这个对换可以通过一系列的相邻数的对换来实现．即首先将 a 作 $m+1$ 次相邻对换变为 $a_1a_2\cdots a_nb_1\cdots b_mbac_1\cdots c_k$，再将 b 作 m 次相邻对换，变为 $a_1a_2\cdots a_nbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_k$. 前面已经证明，经过一次相邻数的对换，排列改变奇偶性．现在经过 $2m+1$ 次的相邻对换，排列 $a_1a_2\cdots a_nab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_k$ 变成 $a_1a_2\cdots a_nbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_k$，它们有不同的奇偶性．**证毕**

从上面的叙述和实例中，大家可以想到，任何一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经若干次对换后可变为标准排列 $12\cdots n$，且有

推论　*奇排列调成标准排列的对换次数为奇数；偶排列调成标准排列的对换次数为偶数．*

进一步地，任意两个排列 $i_1i_2\cdots i_m$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都可以通过一系列的对换互化．

练习 1.2

1. 求下列各排列的逆序数

(1) 21453　　(2) 134782695

(3) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$　　(4) $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$

2. 证明：任一排列都可经对换化为一个标准排列．

1.3　n 阶行列式的定义

在 1.1 节中，我们介绍了二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

类似地，对于九个数 $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 排成的三行三列的式子我们定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.3.1}$$

称为**三阶行列式**．三阶行列式右端的六项可按图 1.3.1 所示方法得到

图中右边两列是把三阶行列式前两列向右平移得到的，我们称从左上角到右下角的对角线为**主对角线**，从右上角到左下角的对角线为**次对角线**．与主对角线平行的三条实线上的三个数的乘积取正号，与次对角线平行的三条虚线上的三个数的乘积取负号．

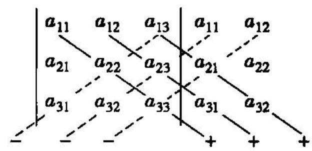


图 1.3.1

与二元一次方程组相类似，对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

若其系数行列式 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

用消元法可以求得方程组的解为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中 $D_j(j = 1, 2, 3)$ 是由常数项 b_1，b_2，b_3 代替 D 中第 j 列得到的三阶行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_2 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

下面我们通过研究三阶行列式的结构，来推出 n 阶行列式的定义．容易看出三阶行列式(1.3.1)的右端有以下几个特点：

第一，式(1.3.1)右端每一项都是三个数的乘积，这三个数位于三阶行列式中不同的行、不同的列．因此式(1.3.1)右端任意项除符号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，

这里第一个下标(称为行标)排成标准排列，而第二个下标(称为列标)排成 $p_1p_2p_3$，它是1, 2, 3 这三个数的某个排列．这样不同的排列有6 种，对应式(1.3.1)右端的六项．

第二，式(1.3.1)右端各项符号与列标排列对照：

带正号的三项列标排列为：123，231，312

带负号的三项列标排列为：321，213，132

经计算知，前三个排列为偶排列，后三个排列为奇排列．因此式(1.3.1)右端各项的符号可以用$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$表示，其中 $\tau(p_1p_2p_3)$为列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数．

从而三阶行列式可以写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

由此我们给出 n 阶行列式的定义．

定义 1.3.1　由 n^2 个数排成的 n 行 n 列的式子，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**，其中 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$是 D 中第 i 行第 j 列的数(称为**元素**)，i 称为**行标**，j 称为**列标**．其值为所有不同行不同列的 n 个元素的乘积，并冠以符号$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$的代数和．即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.3.2}$$

其中$\sum$表示对 1, 2, …, n 这 n 个数的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和，这个代数和共有 $n!$ 项．n 阶行列式 D，也可简记作 $\det(a_{ij})$或 $|a_{ij}|$．特别地，当 $n=1$ 时，我们规定一阶行列式 $|a|=a$.

注意，不要把行列式符号与绝对值记号相混淆．

注　在行列式的定义式(1.3.2)中，每一项相乘的 n 个元素的行标固定取 n 级标准排列．由于数的乘法是可以交换的，故这 n 个元素相乘的次序是可以改变的，所以 n 阶行列式中通项一般可写为

$$(-1)^{\tau}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.3.3}$$

其中 i_1, i_2, …, i_n 和 j_1, j_2, …, j_n 是两个 n 级排列．下面主要讨论该项的逆序

数 τ 如何确定.

由于排列 i_1, i_2, …, i_n 可经若干次对换变为标准排列 1, 2, …, n, 因此, 可通过对换式(1.3.3)中元素的位置使

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} = a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

由于每对换式(1.3.3)中的两个元素的位置, 对应的行标的排列与列标的排列均作了一次对换, 因而它们的逆序之和的奇偶性不变. 于是有

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} = (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)} = (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$$

而 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$ 正是行列式展开式中项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号, 从而有

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

这表明行列式中项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$. 由以上分析, 可知, n 阶行列式有以下表达形式:

① 设 i_1, i_2, …, i_n 是取定的行标的某个排列, 则

$$D = |a_{ij}|_n = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.3.4}$$

特别地, 取 i_1, i_2, …, i_n 为标准排列 1, 2, …, n 时, (1.3.4)即为行列式定义中的(1.3.2).

② 设 j_1, j_2, …, j_n 是取定的列标的某个 n 级排列, 则

$$D = |a_{ij}|_n = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.3.5}$$

特别地, 取 j_1, j_2, …, j_n 为标准排列 1, 2, …, n 时, 有

$$D = |a_{ij}|_n = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)\tau^{(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1.3.6}$$

这些结论说明了行列式中行与列的地位是平等的. 从而今后我们在研究行列式的性质时, 如果某个结论对于行列式的行是成立的, 则它对于行列式的列也是成立的.

例 1.3.1 我们称如下形式的行列式为上三角行列式, 证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1.3.7}$$

证 因为当 $i>j$ 时, $a_{ij}=0$, 故 D 中所有可能不为零的元素 a_{ip_i} 的下标应满足 $p_i\geqslant i(i=1, 2, \cdots, n)$, 即有 $p_1\geqslant 1$, $p_2\geqslant 2$, …, $p_n\geqslant n$.

在列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中, 能满足上述条件的排列只有一个标准排列 $123\cdots n$. 所以 D 中可能不为零的项只有一项 $(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, 又此项的符号 $(-1)^{\tau} = (-1)^0 = 1$, 所以

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

所以，形如式(1.3.7)的**上三角形行列式的值等于其主对角线上元素的乘积**.

例 1.3.2　证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

证　与例 1.3.1 类似，D 中可能不为零的元素 a_{ip_i} 的下标应满足 $p_n \leqslant 1$，$p_{n-1} \leqslant 2$，…，$p_2 \leqslant n-1$，$p_1 \leqslant n$. 在 $p_1p_2\cdots p_n$ 的所有排列中，能够满足上述条件的排列只能有一个 $n(n-1)\cdots 21$，又此排列的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$，所以

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

由上二例，显然对于对角行列式有

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

所以，**主对角形行列式的值等于其对角线上元素的乘积，副对角形行列式的值等于其副对角线上元素与符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$的乘积.**

例 1.3.3　设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & \boldsymbol{O} & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

令　$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

证明　$D = D_1D_2$

证　令 $D = |d_{ij}|$，其中 $d_{ij} = a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, k)$，$d_{k+i,k+j} = b_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 考察 D 的一般项$(-1)^t d_{1r_1}d_{2r_2}\cdots d_{kr_k}d_{k+1,r_{k+1}}\cdots d_{k+n,r_{k+n}}$，由于当 $i \leqslant k$，$j > k$ 时，$d_{ij} = 0$，因此列指标 r_1，r_2，…，r_k 只有在 1，2，…，k 中选取时，该项才可能不为零. 而当 r_1，r_2，…，r_k 在 1，2，…，k 中选取时，后 n 个列指标

r_{k+1}，r_{k+2}，…，r_{k+n}只能在$k+1$，$k+2$，…，$k+n$中选取．从而D中可能不为零的项可以记作$(-1)^l a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n}$．其中$p_i=r_i$，$q_i=r_{k+i}-k$，$l$为排列$p_1\cdots p_k(k+q_1)(k+q_2)\cdots(k+q_n)$的逆序数．令$t$，$s$分别表示排列$p_1\cdots p_k$及$q_1\cdots q_n$的逆序数，则有$l=t+s$. 从而

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1\cdots p_k}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^{t+s}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n} \\ &= \left(\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}\right)\left(\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^s b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n}\right) \\ &= D_1D_2 \end{aligned}$$

练习 1.3

1. 写出四阶行列式中含有因子$a_{11}a_{23}$的项．
2. 决定六阶行列式中下列各项的符号

(1) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$　　(2) $a_{51}a_{32}a_{43}a_{14}a_{65}a_{26}$

3. 用行列式定义计算下列各行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4. 计算下列各行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 12 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

1.4　行列式的性质

利用行列式的定义，求n阶行列式值的计算量非常大，因此直接计算非常困难．在1.3节中看到一个三角形行列式的值等于其对角线上元素的乘积．那么，有没有方法能使一个n阶行列式化为一个三角形行列式呢？或者我们可以