

普通高等教育“十二五”精品规划研究生系列教材

# 土的本构关系

陈晓平 杨光华 杨雪强 编著

Constitutive Relation of  
Soils



中国水利水电出版社  
[www.waterpub.com.cn](http://www.waterpub.com.cn)

普通高等教育“十二五”精品规划研究生系列教材

# 土的本构关系

陈晓平 杨光华 杨雪强 编著



中国水利水电出版社  
www.waterpub.com.cn

## 内 容 提 要

本书基于土力学学科中理论与实际的发展和结合,从土的本构关系的理论基础和专业背景出发,简要介绍了相关的力学知识土的基本特性,详细介绍了土的经典模型,适当介绍了作者在此领域的有关研究成果。全书共分9章,包括:应力分析和应变分析、土的应力—应变特性、塑性增量理论、广义位势理论、土的弹性模型、剑桥黏土模型、莱特-邓肯模型与莱特-金模型、多重势面弹塑性模型、土的流变模型。

本书可作为高等院校土木工程类及相关专业的研究生教学用书,也可作为相关专业的研究人员、工程技术人员的参考用书。

### 图书在版编目(CIP)数据

土的本构关系 / 陈晓平, 杨光华, 杨雪强编著. --  
北京: 中国水利水电出版社, 2011. 10  
普通高等教育“十二五”精品规划研究生系列教材  
ISBN 978-7-5084-9025-0

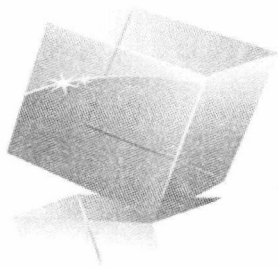
I. ①土… II. ①陈… ②杨… ③杨… III. ①土力学  
—研究生—教材 IV. ①TU43

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第195222号

书 名	普通高等教育“十二五”精品规划研究生系列教材 <b>土的本构关系</b>
作 者	陈晓平 杨光华 杨雪强 编著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn
经 售	电话: (010) 68367658 (发行部) 北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
刷 格	三河市鑫金马印装有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 11.25印张 267千字
版 次	2011年10月第1版 2011年10月第1次印刷
印 数	0001—3000册
定 价	<b>25.00</b> 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究



# 前言

土的本构关系指土的应力应变关系，包括应力应变关系的数学表达式（本构模型）、应力应变规律（本构规律）以及模型参数的物理意义和确定方法。土的本构关系是土力学学科的重要组成部分，也是岩土工程专业及相关专业的研究生必须认真学习和掌握的一门重要课程或重要内容。

由于土的本构关系的复杂性，过去在许多土工问题的设计或计算中都不涉及土的本构关系，只考虑土的抗剪强度，如地基承载力问题、挡土墙问题等，这是因为在分析这一类问题时都假设土体是理想的刚塑体，即对土的应力应变关系作了人为的规定，正是这一规定使得土的应力应变关系可以不出现在相关的计算和分析中。但是如果深入进行研究并更加合理地解决相关问题时，土的应力应变关系却是不能回避的问题。因为作为一种自然历史的产物，对于不同的外荷载条件其本构响应是有很大差别的。在解决岩土工程问题时不仅需要了解土体的物理力学属性，同时也需要掌握土体的力学本构关系，只有将土的非线性变形纳入土的力学特性中，才可能得到土体的实际应力应变状态。现代计算技术和试验技术使得土体的本构特性的研究获得了极大的发展，学者们通过建立不同条件下的应力应变关系来反映土体在加载条件下的真实响应，各种各样本构模型的出现和完善，使得土的本构关系研究逐渐成为土力学学科中发展最快、成果最多的领域之一，也是土力学学科从传统土力学走向现代土力学的标志之一。

但是，一个不争的事实是，虽然被提出的土的本构模型很多，获得广泛共识的模型和得到广泛应用的模型却不多。除了建模所依据的理论、模型参数确定的难易程度等方面的争议以外，一个最重要的原因就是对于土体这种天然材料来说，没有可能存在具有真正意义上的统一模型和模型参数。所以，土的本构关系的授课是岩土工程专业及相关专业研究生培养中最难的课程之一。

本书作者承担土的本构关系的教学工作已经多年，基于研究生教学需要

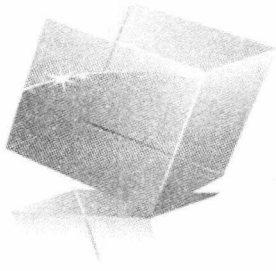
在本书编著中注重了理论的完整和实际应用的结合，注重了从复杂到简单的过程。本书从介绍相关知识和理论开始，然后介绍一些经典的本构模型，再介绍作者的有关研究成果。在各类模型介绍中尽量做到深入浅出，并对模型进行适当的评述，同时给出模型参数的物理意义和确定方法。

全书共分9章，内容包括：应力分析和应变分析、土的应力—应变特性、塑性增量理论、广义位势理论、土的弹性模型、剑桥黏土模型、莱特-邓肯模型与莱特-金模型、多重势面弹塑性模型、土的流变模型。各章作者如下：第1章、第5章、第6章、第9章由暨南大学陈晓平编写；第2章由广东工业大学杨雪强、暨南大学陈晓平编写；第3章由暨南大学陈晓平、广东省水利水电科学研究所杨光华编写；第4章、第8章由广东省水利水电科学研究所杨光华编写；第7章由广东工业大学杨雪强编写。全书由陈晓平统稿，本书得到暨南大学研究生教材基金资助。

限于水平，书中难免谬误和不当之处，敬请读者批评和不吝赐教。

编者

2011年4月



# 目 录

---

## 前言

<b>第 1 章 应力分析和应变分析</b> .....	1
1.1 应力分析 .....	1
1.2 应变分析 .....	5
<b>第 2 章 土的应力—应变特性</b> .....	10
2.1 非线性 .....	10
2.2 结构性 .....	15
2.3 剪胀性 .....	21
2.4 流变性 .....	31
<b>第 3 章 塑性增量理论</b> .....	35
3.1 破坏准则 .....	35
3.2 屈服准则 .....	37
3.3 硬化定律 .....	40
3.4 塑性公设 .....	44
3.5 流动规则 .....	47
3.6 弹塑性应力—应变的普遍关系 .....	49
<b>第 4 章 广义位势理论</b> .....	52
4.1 多重势面理论 .....	52
4.2 单一势面理论及与广义位势理论的关系 .....	55
4.3 传统理论与广义位势理论 .....	56
<b>第 5 章 土的弹性模型</b> .....	61
5.1 各向同性线性弹性模型 .....	61
5.2 横观各向同性线性弹性模型 .....	64
5.3 Duncan 双曲线模型 .....	66
5.4 $K-G$ 模型 .....	74
5.5 非线性弹性理论模型 .....	79

<b>第 6 章 剑桥黏土模型</b> .....	82
6.1 物态边界面 .....	82
6.2 屈服面方程 .....	85
6.3 修正剑桥模型 .....	88
6.4 椭圆-双曲线型双屈服面模型 .....	90
<b>第 7 章 莱特-邓肯模型与莱特-金模型</b> .....	93
7.1 莱特-邓肯模型 .....	93
7.2 修正莱特-邓肯模型 .....	96
7.3 莱特-金 (Lade - Kim) 封闭的单屈服面模型 .....	104
<b>第 8 章 多重势面弹塑性模型</b> .....	115
8.1 应力空间简化多重势面弹塑性模型 .....	115
8.2 应变空间简化多重势面弹塑性模型 .....	124
8.3 土体应变空间多重势面数值弹塑性模型 .....	133
<b>第 9 章 土的流变模型</b> .....	148
9.1 元件模型 .....	148
9.2 修正元件模型 .....	154
9.3 蠕变-固结模型 .....	160
9.4 应力—应变—时间固结模型 .....	166
<b>参考文献</b> .....	171

# 第 1 章 应力分析和应变分析

## 1.1 应力分析

### 1.1.1 应力张量及其不变量

#### 1. 应力张量

在  $oxyz$  直角坐标系中, 土体中任意一点的应力状态均可由 9 个应力分量表示, 即:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$$

上述应力分量的大小不仅与物体的受力情况有关, 同时也与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  坐标轴的方向有关。

根据连续介质力学的基本概念, 当某些量的变化依赖坐标轴的选择, 且在坐标轴变换时其变化存在一定的规律性, 则这些量便可构成一个数学上的整体, 称之为张量。

土中一点的应力状态是由应力分量所确定的物理量, 而应力分量具有张量的性质, 所以 9 个应力分量的总体被称为应力张量, 表示土中一点的应力状态。

应力张量可以用符号  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) 表示:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

式中:  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$  为应力的法向分量;  $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx}$ 、 $\tau_{xz}$  为应力的切向分量。

选取正应力方向以压为正, 式 (1-1) 所描述的土中一点的应力状态如图 1-1 所示。

若采用张量下标标记 1、2、3, 式 (1-1) 又可表示为:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

根据剪应力的互等性, 土中一点的应力张量为对称张量, 即只有 6 个分量是独立的:  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ 、 $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zx}$ 。

#### 2. 应力张量的不变量

根据应力张量的定义, 应力张量的各个分量都依赖于坐标轴的选择, 当坐标变换时, 应力分量便随之按一定规律改变。

已知一点的 9 个应力分量, 则可以求得过该点的任意倾斜面上的应力。在应力点处取

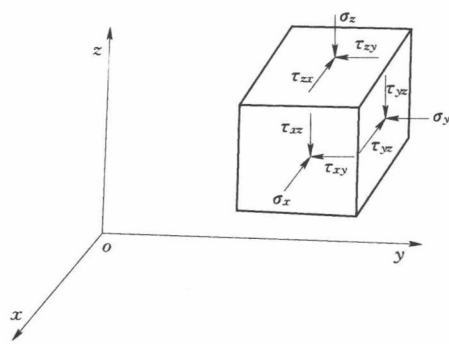


图 1-1 一点的应力分量



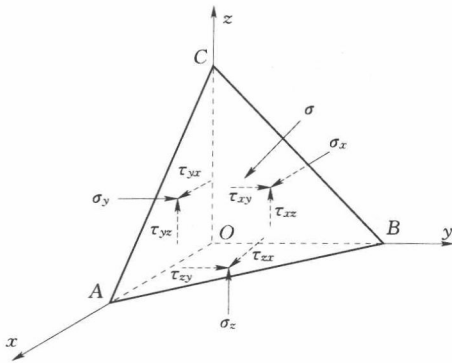


图 1-2 作用在斜四面体上的应力

一个如图 1-2 所示的微小斜面体，主应力面 ABC 上只有法向应力而无剪应力作用，BOC、COA 和 AOB 面上作用有式 (1-1) 所示的 9 个应力分量。

根据力的平衡条件，图 1-2 所示斜四面体在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向的合力为 0。根据所选定的主应力斜面，当斜面法线的方向余弦用  $l$ 、 $m$ 、 $n$  表示时，有：

$$\left. \begin{aligned} \sum x=0 & (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0 \\ \sum y=0 & \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0 \\ \sum z=0 & \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

以  $l$ 、 $m$ 、 $n$  为未知数，式 (1-3) 有非零解的条件为：

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1-4)$$

或

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (1-5)$$

式 (1-5) 所示的三次方程被称为应力状态的特征方程，三个实根即为主应力  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。由于  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  所作用的主平面互相垂直，其法线构成了主应力张量的主轴，与原来的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  选择无关。所以方程中的系数  $I$  具有以下性质：当坐标轴  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的方向改变时，应力张量的各个分量  $\sigma_{ij}$  随之改变，但主应力的数值不改变，即方程的根不变，因此该式的系数  $I$  也不变。

所以，式 (1-5) 中  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  是标量，不随坐标变换而变化，被称为第一、第二、第三应力不变量，表达式如下：

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (1-6)$$

若取坐标轴与应力主轴重合，则应力张量中的剪应力分量等于零，而正应力分量就是主应力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ ，式 (1-6) 可表示为：

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \quad (1-7)$$

式 (1-7) 更显示了  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  的数值与坐标轴的方向无关，这种不变性对于研究各



向同性材料是很有用的。

### 1.1.2 应力偏量及其不变量

#### 1. 应力偏量

应力张量  $\sigma_{ij}$  可以分解为球应力张量和偏应力张量，也称应力球张量和应力偏量。

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

式中： $\sigma_m$  为三个正应力的平均值，称为平均应力。

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

应力球张量可表示为：

$$\sigma_m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_m \delta_{ij} \quad (1-9)$$

式中  $\delta_{ij}$  为克罗内克 (Kronecker) 因子，具有下述特点：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (1-10)$$

应力偏量可表示为：

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

应力球张量表示各向等压的应力状态，即静水压力状态。应力偏量描述纯剪切状态，其值等于从原应力张量中扣除静水压力部分。

有些材料（如金属材料）具有应力球张量仅与弹性体积改变有关、应力偏量才与塑性变形有关的特性，而岩土材料的塑性变形既与应力偏量有关，也与应力球张量有关，考虑交叉影响正是岩土塑性理论的特点。

#### 2. 应力偏量的不变量

应力偏量也是二阶对称张量，其主轴与应力主轴方向一致。 $S_i$  满足的三次代数方程式为：

$$S^3 - J_1 S^2 - J_2 S - J_3 = 0 \quad (1-12)$$

式中： $J_1$ 、 $J_2$ 、 $J_3$  分别为应力偏量的第一、第二、第三不变量。

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= S_x + S_y + S_z = 0 \\ J_2 &= -(S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \\ J_3 &= S_x S_y S_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - S_x \tau_{zy}^2 - S_y \tau_{xz}^2 - S_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$



如果选取应力主轴为坐标轴，则应力张量的剪应力分量为零。同样地，应力偏量的剪应力分量也为零，仅有主分量  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ 。

以  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  表示的应力偏量的不变量为：

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= S_1 + S_2 + S_3 = 0 \\ J_2 &= S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ J_3 &= S_1 S_2 S_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

应力偏量的不变量既具有不变性又扣除了静水压力的影响，所以在岩土力学中比应力张量的不变量更有用，特别是应力偏量的第二不变量  $J_2$ 。

### 1.1.3 八面体应力

将坐标原点与所研究的点重合，并取坐标轴 1, 2, 3 ( $x, y, z$ ) 与应力主方向一致。在坐标系中可作 8 个对坐标平面同样倾斜的斜微分面 (等斜面)，如图 1-3 所示。其法线的三个方向余弦相等，即：

$$n_x = n_y = n_z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1-15)$$

为研究等斜面上的应力，从物体内一点附近取出等斜面与三个应力主面所组成的四面体为考察对象，受力情况如图 1-4 所示。

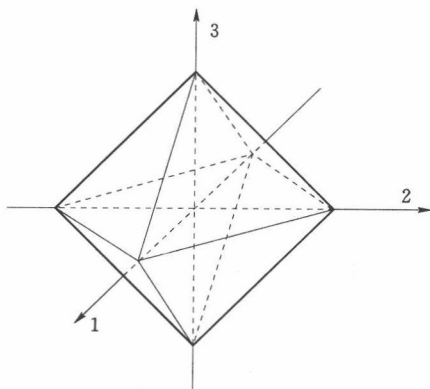


图 1-3 正八面体

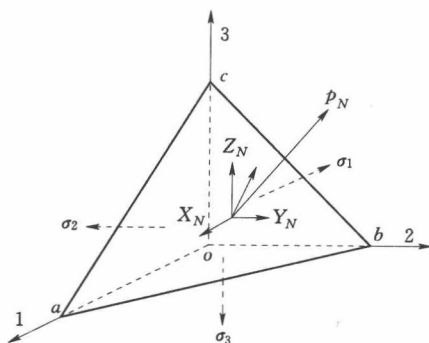


图 1-4 等斜面上的应力

令等斜面上的三角形  $abc$  面积为  $dA$ ，则在三个应力主面上的三个三角形的面积都等于  $dA/\sqrt{3}$ 。设等斜面上的和应力为  $P_N$ ，在 1、2、3 方向的分量分别为  $X_N$ 、 $Y_N$  和  $Z_N$ ，则根据 1 方向的平衡条件有：

$$X_N dA = \sigma_1 \frac{dA}{\sqrt{3}}$$

或

$$X_N = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}$$



同理

$$Y_N = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, Z_N = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$$

由此得和应力为:

$$P_N = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \quad (1-16)$$

将式(1-15)所示的方向余弦分别代入微分面上法向应力  $\sigma_n$  的表达式  $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$  和剪应力的表达式  $\tau_n = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - \sigma_n^2}$ , 可得等斜面正应力

$$\sigma_N = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3} = \sigma_m \quad (1-17)$$

等斜面剪应力

$$\tau_N = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \quad (1-18)$$

所以, 等斜面正应力等于主应力的平均值, 与应力张量第一不变量  $I_1$  有关; 等斜面剪应力与应力偏量的第二不变量  $J_2$  有关。

由于在土体内任意一点附近都可以作出图 1-3 所示的由等斜面形成的封闭的正八面体, 所以  $\sigma_N$  和  $\tau_N$  也称为八面体正应力和剪应力, 在土力学中常用平均主应力  $p$  与广义剪应力  $q$  表示, 是另外两个应力不变量:

$$p = \sigma_N = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (1-19)$$

$$q = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1-20)$$

式(1-20)中  $q$  也被称为应力强度或等效应力, 与坐标轴方向无关, 与应力球张量无关, 并不代表某一具体平面上的剪应力。

## 1.2 应变分析

### 1.2.1 应变张量及应变偏量

#### 1. 应变张量

一点的应变状态和应力状态一样也可以用 9 个分量来表示:  $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$ 、 $\epsilon_z$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{yx}$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{yz}$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{zy}$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{zx}$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{xz}$ 。应变分量同样与坐标轴方向有关, 由应变分量组成的张量即为应变张量, 记为  $\epsilon_{ij}$ :

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (1-21)$$



由于其对称性, 应变分量只有 6 个独立分量:  $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$ 、 $\epsilon_z$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{yz}$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{zx}$ 。

若以  $u$ 、 $v$ 、 $w$  表示  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向的位移, 在小变形条件下, 应变分量与位移有下述关系:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

上述  $\frac{1}{2}\gamma_{ij}$  称为工程应变, 与张量应变  $\epsilon_{ij}$  有  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$  的关系。引入  $\frac{1}{2}$  的目的是为了符合张量的定义, 使应变分量在坐标变换时能与应力分量具有指定的对应。如将坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  变换到新坐标  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  时, 新坐标  $X$  轴在初始坐标上的方向余弦分别为  $l$ 、 $m$ 、 $n$ ,  $X$  方向的正应力为

$$\sigma_X = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl$$

与之对应的正应变为

$$\epsilon_X = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl$$

比较上述表达可知  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$  对应于  $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$ 、 $\epsilon_z$ , 而  $2\tau_{xy}$ 、 $2\tau_{yz}$ 、 $2\tau_{zx}$  却对应  $\gamma_{xy}$ 、 $\gamma_{yz}$ 、 $\gamma_{zx}$ , 即  $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zx}$  对应  $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{yz}$ 、 $\frac{1}{2}\gamma_{zx}$ 。

将  $u$ 、 $v$ 、 $w$  分别记为  $u_1$ 、 $u_2$ 、 $u_3$ , 则有

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_{1,1} \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (u_{2,1} + u_{1,2}) \end{aligned}$$

所以, 应变张量与位移的关系可以写成:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1-23)$$

式中角标 “,” 代表微商。

对于一点的应变状态来说, 上述表达式共有 9 个, 其中  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ , 所以应变张量也是一个二阶的对称张量。

## 2. 应变球张量与应变偏张量

应变张量同样可以分解为两个分张量: 球形应变张量和偏斜应变张量, 也称应变球张量和应变偏张量, 即:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z - \epsilon_m \end{bmatrix} \quad (1-24)$$



式(1-24)中,  $\epsilon_m = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$ , 为平均应变; 右边第一项为应变球张量, 表示各方向有相同的正应变, 代表体积应变部分; 第二项为应变偏量, 代表形状应变部分, 其中三个正应变之和等于零, 表明体积改变等于零。

应变球张量可表示为:

$$\epsilon_m \delta_i = \begin{bmatrix} \epsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_m \end{bmatrix} \quad (1-25)$$

应变偏量可用符号  $e_{ij}$  表示为:

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_z \end{bmatrix} \quad (1-26)$$

### 1.2.2 应变张量不变量

当坐标轴  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向与应变主轴方向重合时, 剪应变分量为零, 式(1-21)所示的应变张量可以写为:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

正应变分量  $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$ 、 $\epsilon_3$  称为主应变, 主应变的差值  $\gamma_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3$ ,  $\gamma_2 = \epsilon_3 - \epsilon_1$ ,  $\gamma_3 = \epsilon_1 - \epsilon_2$  称为主剪应变。

与应力张量类似, 应变张量有三个与主应变有关的不变量:

$$\left. \begin{aligned} I_{1\epsilon} &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ I_{2\epsilon} &= \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1 \\ I_{3\epsilon} &= \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z + \frac{1}{4}[\gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - (\epsilon_x \gamma_{yz}^2 + \epsilon_y \gamma_{zx}^2 + \epsilon_z \gamma_{xy}^2)] = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

同样, 应变偏量和应力偏量一样, 也有相应的不变量。应变偏量的第一、第二和第三不变量分别为:

$$\left. \begin{aligned} J_{1\epsilon} &= e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_1 + e_2 + e_3 = 0 \\ J_{2\epsilon} &= \frac{1}{6}[(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] \\ &= \frac{1}{6}[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2] \\ &= e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 \\ J_{3\epsilon} &= e_x e_y e_z + 2e_{xy} e_{yz} e_{zx} - e_x e_{yz}^2 - e_y e_{zx}^2 - e_z e_{xy}^2 = e_1 e_2 e_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

式中:  $e_{ij}$  为式(1-26)所示的应变偏量。



## 1. 八面体面上的应变

与式 (1-17) 和式 (1-18) 所示的八面体正应力和剪应力对应, 八面体面上的正应变和剪应变分别为:

$$\epsilon_8 = \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = \epsilon_m \quad (1-30)$$

$$\begin{aligned} \gamma_8 &= 2 \sqrt{\frac{1}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) - \frac{1}{9}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sqrt{J_{2\epsilon}} \end{aligned} \quad (1-31)$$

## 2. 广义剪应变和纯剪应变

广义剪应变  $\bar{\gamma}$  也被称为等效应变或应变强度, 定义为:

$$\bar{\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

如用主应变表示, 有:

$$\bar{\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_{2\epsilon}} \quad (1-32)$$

纯剪应变  $\gamma_s$  又称剪应变强度, 定义为:

$$\gamma_s = 2 \sqrt{J_{2\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2]} \quad (1-33)$$

## 1.2.3 应变率张量

设土中一点变形时沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的位移速度分量为位移对时间  $t$  的全导数  $v_x = \frac{du_x}{dt}$ ,  $v_y = \frac{du_y}{dt}$ ,  $v_z = \frac{du_z}{dt}$ , 则应变率分量 (应变速度分量) 可表示为:

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \eta_{xy} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \xi_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \eta_{yz} &= \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \xi_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \eta_{zx} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1-34)$$

所以, 土中一点的应变率张量  $\xi_{ij}$  为:

$$\xi_{ij} = \left\{ \begin{array}{ccc} \xi_x & \frac{1}{2} \eta_{xy} & \frac{1}{2} \eta_{xz} \\ \frac{1}{2} \eta_{yx} & \xi_y & \frac{1}{2} \eta_{yz} \\ \frac{1}{2} \eta_{zx} & \frac{1}{2} \eta_{zy} & \xi_z \end{array} \right\} \quad (1-35)$$



或 
$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{du_j}{dt} \right) \quad (1-36)$$

在有限变形条件下，一般有  $\xi_{ij} \neq \frac{d}{dt} \epsilon_{ij}$ ，则根据应变速度分量的定义，有：

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{du_x}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \dot{\epsilon}_x \\ \xi_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{du_y}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = \dot{\epsilon}_y \\ \xi_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{du_z}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \dot{\epsilon}_z \\ \eta_{xy} &= \dot{\gamma}_{xy} \\ \eta_{yz} &= \dot{\gamma}_{yz} \\ \eta_{zx} &= \dot{\gamma}_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

在小变形情况下，式中  $\xi_x$ 、 $\xi_y$ 、 $\xi_z$  为线应变速度； $\eta_{xy}$ 、 $\eta_{yz}$ 、 $\eta_{zx}$  为剪应变速度。前者表示单元体沿坐标方向相对伸长的线速度，后者表示原先是直角的角度成为偏斜角度的角速度。

所以，在小变形条件下，一点的应变率张量也可以表示为：

$$\xi_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} \quad (1-38)$$

应该指出，在一般情况下，应变率的主方向与应变主方向并不重合。

应变率张量也有第一不变量、第二不变量和第三不变量，同样可以分解为应变率球张量和应变率偏张量两部分，应变率偏张量也有相应的不变量。



## 第 2 章 土的应力—应变特性

### 2.1 非线性

土体形成于天然沉积作用，作为松散矿物颗粒的集合体，宏观变形特性的主要控制因素并不是颗粒本身的变形，而是粒间孔隙和颗粒位置的变化。所以土体的应力—应变关系通常表现为非线性，在相同应力增量下产生的应变增量与多种因素有关。

#### 2.1.1 土的压硬性—围压的影响

土的变形模量随围压而提高的现象称为土的压硬性，如图 2-1 所示。

由于土是由松散的颗粒组成，所以围压提供的约束对于土强度与变形模量的提高是非常重要的。土在三轴试验中初始模量  $E_i$  与围压  $\sigma_3$  之间的关系可用下式表达

$$E_i = K p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (2-1)$$

式中： $K$ 、 $n$  为试验常数； $p_a$  为大气压。

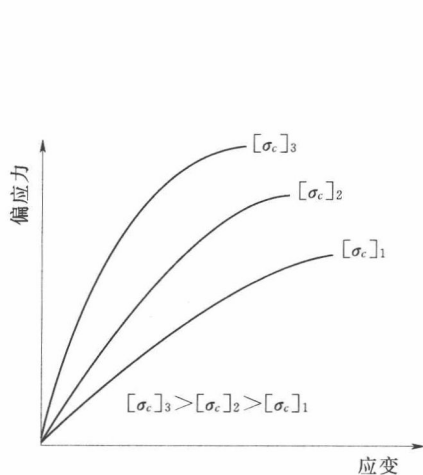


图 2-1 围压对固结排水土样的应力与应变关系的影响

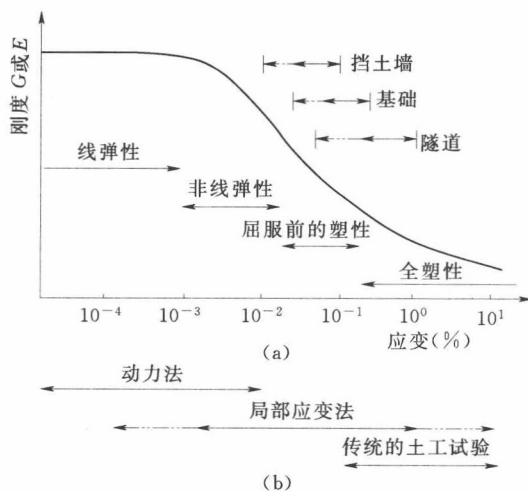


图 2-2 土体刚度衰减曲线 (引自 Atkinson, 2000)  
(a) 现场典型的应变范围；(b) 典型应变范围对应的测试技术

式 (2-1) 是由 Janbu (1963) 提出的，被许多本构模型所采用。

#### 2.1.2 土的剪应力水平的影响

土体的应力与应变关系通常表现为非线性，土体的切线或割线模量随剪应力水平的提高或剪应变的增加呈现出逐步减小的趋势，如图 2-2 所示。