最优化方法

王开荣　主编

科学出版社

最优化方法

主　编　王开荣
副主编　刘琼芳　肖　剑

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书介绍最优化的基本概念、常用算法及有关的理论分析和应用，全书包括7部分内容，分别是绪论、线性规划、非线性规划、多目标规划、动态规划、现代优化方法和MATLAB在优化中的应用. 书中的部分例题和案例用MATLAB软件做了演示计算，各章给出了典型例题并配有一定数量的习题，书后给出了部分习题答案或提示. 便于读者加深对书中内容的理解.

本书可作为理工科大学数学类本科少学时和工科硕士研究生的最优化课程教科书，还可作为理工科本科生和工程技术人员的学习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

最优化方法/王开荣主编. —北京：科学出版社，2012
ISBN 978-7-03-035325-2

Ⅰ.①最… Ⅱ.①王… Ⅲ.①最优化算法-研究生-教材 Ⅳ.①O242.23

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第191468号

责任编辑：胡云志 任俊红 唐保军／责任校对：林青梅
责任印制：阎 磊／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年8月第 一 版 开本：720×1000 B5
2012年8月第一次印刷 印张：17 1/4
字数：338 000

定价：38.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

以最优化原理和方法为基础的优化设计广泛应用于机械、电子、化工、建筑等工业部门和管理决策部门. 最优化方法是高校数学类本科生和工科硕士研究生的一门重要课程，本书是作者们在多年教学实践的基础上总结、整合而成的.

本书介绍最优化方法的研究对象、特点以及最优化方法模型的建立和模型的分析、求解、应用，主要是线性规划和非线性规划问题的模型、求解及其应用；简单介绍多目标规划和动态规划问题. 教材中对于基本的理论和主要的定理都给出简单证明，为读者理解优化原理、训练思维和扩大应用奠定基础. 在介绍每一种规划模型前都以实际问题引入，在讲清概念和理论后，对各种算法都有详细的推导过程，并且配有例题，参照例题的解法用 MATLAB 软件进行计算分析.

本书编写时特别注重课程体系的完整性、应用性和内容的可读性. 为此，在系统介绍基本概念与基础理论时，省略了一些烦琐艰深的证明和推导过程，侧重于算法的叙述和算例分析. 行文时注重通俗易懂，对专业术语尽量作通俗的解释，以增强本书的可读性.

本书的出版得到了重庆大学数学与统计学院、重庆大学研究生院的大力支持，科学出版社的龚剑波和任俊红也给予了帮助，在此表示衷心的感谢. 鉴于作者的水平，诚盼同行和读者对书中问题和不足之处进行批评和指正，以期修订时得以改进和提高.

王开荣

2012 年 2 月于重庆大学

目　　录

三、非线性规划

四、多目标规划

五、动 态 规 划

六、现代优化方法

七、MATLAB 在优化中的应用

一、绪　　论

最优化方法，也称为运筹学方法，运用数学方法研究各种系统的优化途径及方案，为决策者提供科学决策的依据. 其主要研究对象是各种有组织系统的管理问题及生产经营活动.

最优化方法的目的在于针对所研究的系统，求得一个合理运用人力、物力和财力的最佳方案，发挥和提高系统的效能及效益，最终达到系统的最优目标. 随着科学技术的日益进步和生产经营的日益发展，最优化方法已成为现代管理科学的重要理论基础和不可或缺的方法. 在公共管理、经济管理、国防、科学研究等领域中发挥着越来越重要的作用. 掌握最优化思想并善于对遇到的问题进行优化处理是各类管理人员和科技人员必须具备的基本素质，也是培养创新人才必须具有的重要素质.

1. 最优化的数学意义

从数学意义上来说，最优化方法是一种求极值的方法，即在一定的条件下，使系统的目标函数达到极值——最大值或最小值. 从经济意义上来说，最优化方法是在一定的资源条件下，使经济效果(如产值、利润等)达到最大，或者在完成规定的生产或经济任务下，使投入的资源最少.

2. 最优化的发展简史

公元前 500 年，古希腊在建筑设计中发现门窗长宽的最佳比例为 1 : 0.618，称其为黄金分割比，至今仍在优选法中得到广泛应用. 在微积分出现以前，就已经有许多学者开始研究用数学方法解决最优化问题了，如 Archimedes 证明了在给定周长条件下，圆所包围的面积最大，这就是欧洲古代城堡几乎都建成圆形的原因. 但是最优化方法真正成为科学方法是在 17 世纪以后. 17 世纪，Newton 和 Leibnitz 在他们所创建的微积分中提出了求解具有多个自变量实值函数的最大值和最小值的方法，后来又进一步讨论具有未知函数的函数极值，从而形成变分法. 第二次世界大战前后，由于军事上的需要、科学技术和生产的迅速发展，许多实际的最优化问题已经无法用古典方法来解决，这就促进了近代最优化方法的产生和发展. 近代最优化方法的形成和发展过程中最重要的事件有以前苏联 Kantorovich 和美国 Dantzig 为代表的线性规划、以美国 Kuhn 和 Tucker 为代表的非线性规划和以美国 Bellman 为代表的动态规划等. 这些方法后来都形成体系，成为近代很活跃的学

科，对促进运筹学、管理科学、控制论和系统工程等学科的发展起了重要作用.

3. 最优化的步骤

用最优化方法解决实际应用问题，一般有以下 5 个步骤：

(1) 提出最优化问题，并收集有关资料和数据；

(2) 建立数学模型，确定变量，列出目标函数和约束条件；

(3) 分析模型，选择合适的最优化算法；

(4) 求解，编制程序或用现成的工具软件利用计算机求最优解；

(5) 最优解的检验和具体实施.

这 5 个步骤相互支持，也相互制约，反复交叉进行.

4. 最优化模型的基本要素

最优化模型一般包括变量、约束条件和目标函数三个要素.

(1) 变量. 变量指最优化问题中待确定的某些量，可用 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示.

(2) 约束条件. 约束条件指在求最优解时对变量的某些限制，包括技术上、资源上和时间上的约束等，列出的约束条件越接近实际系统，所求得的解就越接近实际最优解.

(3) 目标函数. 最优化有一定的评价标准，目标函数就是这种标准的数学描述，一般用 $f(\boldsymbol{x})$来表示，即 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，要求目标函数为最大时写成 max，最小时写成 min；目标函数可以是系统功能的函数或费用的函数，在满足规定的约束条件下达到最大或最小.

5. 最优化方法

不同类型的最优化问题可以有不同的优化方法，即使同一类型的问题也可有多种优化方法，有些方法可用于不同类型的优化模型. 本书将介绍求解最优化问题的解析法、直接法和数值计算法.

(1) 解析法. 该方法适用于目标函数和约束条件有明显解析表达式的情形. 基本思想是由最优必要条件得到一组方程或不等式，再求解方程或不等式得到问题的解，一般是用求导数的方法或变分法求出必要条件.

(2) 直接法. 当目标函数较为复杂或者不能用解析函数描述时，可采用直接搜索的方法迭代搜索到问题的解，该方法常根据经验或试验得到所需结果.

(3) 数值计算法. 该方法也是直接法，是以梯度法为基础，解析与数值计算相结合的方法.

根据函数的解析性质，还可以对各种方法作进一步分类. 例如，目标函数和约

束条件函数都是线性的就称为线性规划；当目标或约束中有非线性函数时就称为非线性规划；当目标函数是二次的而约束是线性时，则称为二次规划；目标函数具有多项式形式时，称为几何规划.

6. 最优解的概念

最优化问题的解称为最优解. 如果只考查约束集合中某一局部范围内的优劣情况，则称为局部最优解. 如果是考查整个约束集合中的情况，则称为全局最优解或整体最优解. 不同的优化问题，其最优解就有不同的含义，而且还有专用名称. 例如，在对策论和数理经济模型中称其为平衡解；在控制问题中称其为最优控制或极值控制；在多目标决策问题中称其为非劣解（又称为 Pareto 最优解或有效解）. 在解决实际问题时，理想的最优解不易求得，或需要付出较大的代价，因此，对解只要求能满足一定的条件，不一定过分强调最优. 20 世纪 50 年代初，在运筹学发展的早期，就有人提出次优化的概念及相应的次优解. 究其原因，一方面是因为最优化模型的建立本身就只是一种近似，实际问题中的某些因素，特别是那些非定量因素，难以在一个模型中考虑周全. 另一方面，还缺乏一些求解较为复杂模型的有效方法. 1961 年，H. A. Simon 进一步提出满意解的概念，只要决策者对解满意即可.

7. 最优化方法的应用

最优化问题广泛存在于国民经济的工农业、能源、交通等许多部门以及信息科学、环境科学与军事等领域，一般分为最优设计、最优计划、最优管理和最优控制等.

（1）最优设计. 工程设计中如何选择设计参数，使设计方案既能满足设计要求，又能降低成本. 从各种设计参数的优选到最佳结构形状的选取等，结合其他科学方法使许多优化设计问题得以解决. 例如，电力设计、机械设计、建筑设计等已广泛应用最优化方法；电子线路的最优设计，配方配比的优选在化工、橡胶、塑料等工业部门都得到成功的应用，并向计算机辅助搜索最佳配方、配比方向发展.

（2）最优计划. 国民经济或部门经济的计划，直至企业的发展规划和年度生产计划，尤其是农业规划、种植计划、能源规划和其他资源、环境和生态规划的制订，都已开始应用优化方法，特别是帮助决策部门进行各种优化决策. 合理分配有限资源，既能满足各个方面的基本要求，又能获得好的经济效益；选择计划方案以提高产值和利润；原料配比问题中确定各种成分的比例，以提高质量降低成本；城建规划中安排工厂、机关、学校、商店、医院、住户和其他单位的合理布局，以方便群众并有利于城市各行各业的发展；农田规划中安排各种农作物的合理布局，保持高产稳产，发挥地区优势.

（3）最优管理. 在日常生产计划的制订、调度和运行中都会应用优化方法. 随

着管理信息系统和决策支持系统的建立和使用,使最优管理得到迅速的发展.

(4) 最优控制.最优控制主要用于对各种控制系统的优化.例如,导弹系统的最优控制能保证用最少的燃料完成飞行任务,用最短的时间达到目标;飞机、船舶、电力系统等的最优控制,化工、冶金等工厂的最佳工况的控制.计算机和优化方法的发展使最优控制的对象从对机械、电气、化工等硬系统的控制转向对生态、环境以至社会经济系统的控制.

二、线性规划

人们在生产实践和经营管理中，常会遇到如何安排有限的资源，如人力、资金、原材料等，使产量最大或利润最高的问题；也会遇到对给定的任务，如何统筹安排，使资源消耗达到最低. 这种在生产、经营活动中从计划与组织的角度来考查最大或最小目标函数的问题，就是线性规划（linear programming）问题. 线性规划是最优化方法中理论完整、方法成熟、应用广泛的一个分支，它本身在实际问题中有许多直接应用，而且为某些非线性规划问题的解法起到间接的作用.

第 1 章　线性规划与单纯形方法

1.1　线性规划问题举例

例 1.1(生产计划问题)　设生产 A,B,C 三种产品,每吨利润分别 2 万元、3 万元、1 万元,生产单位产品所需的工时和原材料如表 1.1 所示.

表 1.1

资源	产品		
	A	B	C
所需工时	1	2	2
所需原材料	1	4	7

若所能利用的劳动力总工时是固定的 4 个单位,供应的原材料每天不超过 9t,试制订生产计划,使三种产品的总利润最大.

解　设 x_1,x_2,x_3 分别为产品 A,B,C 的产量,由题意,劳动力约束条件为$x_1+2x_2+2x_3\leqslant 4$,原材料约束条件为 $x_1+4x_2+7x_3\leqslant 9$,故生产计划问题的数学模型为

$$\max\ z=2x_1+3x_2+x_3$$

$$\text{s. t.}\quad\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3\leqslant 4\\ x_1+4x_2+7x_3\leqslant 9\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

例 1.2(用料最省问题)　有一批长为 7.4m 的钢管,需要切断成 2.9m 的 100 根,2.1m 的 200 根,1.5m 的 300 根,问应如何下料,才能使用料最省?

解　7.4m 钢管的可能分割方式如表 1.2 所示.

表 1.2

加工方式	1	2	3	4	5	6	7	8	需求量
2.9m	1	2		1		1			100
2.1m			2	2	1	1	3		200
1.5m	3	1	2		3	1		4	300
用料长度	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6	6.5	6.3	6	
废料长度	0	0.1	0.2	0.3	0.8	0.9	1.1	1.4	

设用于各种切割方式的钢管分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_8$ 根，则用料问题的数学模型为

$$\min \quad 0x_1+0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5+0.9x_6+1.1x_7+1.4x_8$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{cases} x_1+2x_2+x_4+x_6\geqslant 100 \\ 2x_3+2x_4+x_5+x_6+3x_7\geqslant 200 \\ 3x_1+x_2+2x_3+3x_5+x_6+4x_8\geqslant 300 \\ x_1,x_2,\cdots,x_8\geqslant 0 \text{ 且为整数.} \end{cases}$$

从以上两个例题可知，线性规划问题具有以下特征：

(1) 用一组决策变量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示某一方案，在一般情形下，决策变量有非负限制；

(2) 目标函数和约束条件函数都是线性函数；

(3) 目标函数实现最大化或最小化；

(4) 约束条件是线性等式或线性不等式.

1.2 线性规划问题的标准形及解的概念

1.2.1 线性规划问题的标准形

线性规划问题的目标函数有最大、最小的形式，约束条件有“$\leqslant$”、“$\geqslant$”、“$=$”的形式，这给讨论问题带来了不便. 因此，本书规定线性规划问题的标准形(standard form)为

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

称 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为价值系数，$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 为资源限制量，$a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为第 i 个产品对第 j 种资源的单位消耗量. 线性规划问题的标准形也可以有以下的表述形式：

(1) 缩写形式：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j\geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

(2) 向量形式：

$$\max z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{p}_j x_j=\boldsymbol{b} \\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$.

(3) 矩阵形式：

$$\max z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}\geqslant 0 \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为约束方程组的系数矩阵.

以后介绍线性规划问题的一些基本概念和求解方法都是针对线性规划标准形而得的. 对非标准形的线性规划问题，可施展适当的变换将其转化为标准形.

(1) 若目标函数为 $\min z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$，则令 $z'=-z$ 便有 $\max z'=-c_1x_1-c_2x_2-\cdots-c_nx_n$；

(2) 不等式约束 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i$，增加松弛变量 $x_{n+i}\geqslant 0$ 便有

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+x_{n+i}=b_i$$

不等式约束 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i$，增加剩余变量(也称为松弛变量) $x_{n+i}\geqslant 0$ 便有

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n-x_{n+i}=b_i$$

(3) 对无非负要求的自由变量 x_i，令 $x_i=x_i'-x_i''$，其中 $x_i'\geqslant 0$，$x_i''\geqslant 0$，由 x_i'，x_i'' 的大小来确定 x_i 的正负.

例 1.3 将下列线性规划问题化为标准形：

$$\min z=x_1-2x_2+3x_3$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{cases} x_1-x_2+x_3\leqslant 3 \\ 2x_1-x_2+3x_3\geqslant 5 \\ x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1,x_3\geqslant 0,x_2\ \text{为自由变量} \end{cases}$$

解 原问题化为标准形式为

$$\max z' = -x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - 3x_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - x_2' + x_2'' + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2' + x_2'' + 3x_3 - x_5 = 5 \\ x_1 + x_2' - x_2'' + x_3 = 4 \\ x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.2.2 线性规划问题解的概念

(1) **可行解**(feasible solution). 若 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{x}\geqslant 0$,则称 $\boldsymbol{x}$ 为线性规划问题(1.1)的可行解. 称 $D=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant 0\}$ 为线性规划问题(1.1)的可行域. 可行解是可行域内的点,有时也称为可行点.

(2) **最优解**(optimal solution). 满足(1.1)的解称为最优解.

(3) **最优值**(optimal value). 若 $\boldsymbol{x}$ 是(1.1)的最优解,则称 $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 为(1.1)的最优值.

(4) **基**(basis). 设(1.1)约束方程组的系数矩阵是 $m\times n$ 矩阵,其秩为 $r(\boldsymbol{A})=m$,若 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中的 m 阶非奇异子矩阵,则称 $\boldsymbol{B}$ 为(1.1)的一个基矩阵,简称为基.

(5) **基变量**(basic variable). 基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量 $\boldsymbol{p}_j$ 称为基向量,所对应的决策变量称为基变量.

不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 个列向量线性无关(其他情形类似),即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})$,称 $\boldsymbol{N}$ 为非基矩阵,约束等式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可表示为

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}$$

故有 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N$. 若取非基变量 $\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$,则有 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$.

(6) **基解**(basic solution). 称 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ 为线性规划问题(1.1)的基解.

(7) **基可行解**(basic feasible solution). 若 $\boldsymbol{x}$ 是线性规划问题(1.1)的基解且 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$,则称 $\boldsymbol{x}$ 为(1,1)的基可行解.

线性规划的基可行解的个数是有限的,其个数不超过 C_n^m.

(8) **退化**(degenerate). 若基可行解 $\boldsymbol{x}$ 中存在值为 0 的基变量,则称此基可行解 $\boldsymbol{x}$ 为退化的基可行解;若基变量都是严格大于 0 的,则称 $\boldsymbol{x}$ 为非退化的基可行解.

(9) **非退化**(non-degenerate). 若(1.1)的所有基可行解都是非退化的,则称(1.1)为非退化的线性规划问题.