Yi Wang Da Jin

一网打尽

特别合作 sina 新浪教育

高中数学教材知识大全

成就考场优胜者　培养校园小博士

[审订] 全国中学课程改革研究组

编写：百位第一线骨干教师

总主编　刘增利

北京万向思维

北京教育出版社

一网打尽

高中数学教材知识大全

主　编：冯秀臣　王　亮
编　者：冯秀臣　王　亮
任宏彬　苏　杰

北京万向思维

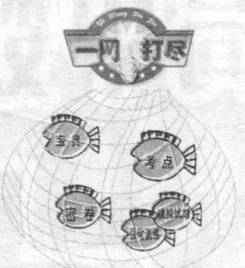
北京教育出版社

总主编寄语

一网打尽

既给鱼 又给渔

猫妈妈养了两只小猫，她给了一只小猫一条大鱼，却教给另一只小猫捕鱼的方法。几天之后，得到大鱼的小猫吃完了鱼，饿得喵喵直叫，学会捕鱼的小猫却得到了一条又一条的鱼。



在人类发展的最近几百年间,科学技术把许多曾经遥不可及的梦想变成了现实。这些成就极大地改变了人类的生存条件和生活状况。数学正是帮助取得这些成就的关键学科之一。中学数学教育的任务,就是要结合社会现实与生活实践,使学生能从数学的视角去认识科学、技术、社会和生活方面的有关问题,并从培养学生科学素养的基本要求出发,给学生提供基本的知识、技能和方法,激发学生的主动性和创新意识,引导和帮助学生在学好数学的同时树立起正确的科学价值观。

基于以上理念,北京万向思维国际教育研究中心与首都多所名牌大学合作,集全国实验区的国家级骨干教师和多所名牌高校的专家学者,根据教育部颁布的新大纲和新课程标准,共同编写审订了《高中数学教材知识大全》。

本书覆盖了中学教材中的全部知识点,并在剖析重点、难点的基础上,根据我国“3+X”的高考模式和要求,也为了体现出学科内的综合和学科间的交叉渗透,精选了历年的高考试题和全国特级教师针对高考动向精编的典型例题进行知识点的详细讲解。

在提供知识的基础上我们力图开阔学生的视野,拓宽学生的知识面,引导学生从多个角度切入思考问题,启迪学生的创新思维,激发学生学习数学的兴趣及对生活中存在的数学事例的发现和探索。

“*预测未来的最好方法就是把它创造出来。*”愿我们的真诚奉献,能帮助莘莘学子创造属于自己的辉煌未来!

刘增利

2004年8月1日

于清华大学

万向思维专家顾问团

王大绩

语文特级教师　享受国务院特殊津贴的专家。北京市教育学会语文教学研究会常务理事，北京市教育科学研究院兼职教研员。光明日报《考试》杂志编委。

多年来悉心研究教学与高考规律，有数篇论文获国家级奖项，录制音像制品数十种，多次在中央电视台、中央人民广播电台、中央教育电视台、北京电视台及新浪网、搜狐网等媒体做高考辅导讲座，每年应邀到全国各省区讲学。

寄语：立志冲击顶峰，探索登山道路，是师生共同的责任；而冲击峰顶，登上峰顶，靠同学自己！

王乐君

英语特级教师　2001至2003届北京市级高级教师职称英语学科评审主任、市级特级教师评审委员。教学35年，熟悉中学和大学各种教材，擅长培养和训练学生用英语思维进行书面表达。经常应邀去全国各地讲学。

寄语：丰富的语言知识和较强的语言技能会使你成为英语高才生。

周誉蔼

物理特级教师　原北京十五中副校长。人民教育出版社特聘编辑，光明日报《考试》杂志编委。长期任北京市物理兼职教研员。参与编写了人教社《高中物理教参》，编写多部学生高考教辅书、高中学生物理辅导书和教师培训教材等。

寄语：联系实际、反复思考、读懂理论、提高能力。

程耀尧

化学特级教师　原北京教育学院丰台分院副院长。参与人民教育出版社《新课程标准高中化学》课本的编写。中国教育学会教育统计与测量分会考试委员会副主任、常委；曾宪梓教师奖获得者；中央广播电视学校十佳教师。著述有：《化学基础》、《化学教育与素质教育》。

寄语：自学自励，自思自勤，做一辈子主动学习的人。

裘伯川

生物特级教师　原北京市教育科学研究院基础教育教学研究中心生物室主任。全国生物专业委员会常务理事兼学术委员会常务副主任；首都师范大学研究生院客座教授。

寄语：既要通过对生物的学习，加深理解，又要主动参与，不断创新全面提高自身的生物科学素养。

王建民

数学特级教师　享受国务院特殊津贴的专家。中国数学奥林匹克高级教练。多次被评为市、区先进工作者、模范教师，被评为海淀区教育战线十佳中共党员。曾任北京市海淀区第七至第十一届人民代表大会代表。

多次在中央人民广播电台、中央电视台、中央教育电视台、北京电视台、新浪网、搜狐网等做高考辅导讲座，每年应邀到全国各省区讲学。

寄语：认真读书，深入思考，崇尚理性精神，领悟数学思想，从数学的学习中，获得可持续发展的数学能力。

徐兆泰

政治特级教师　原北京教科院基础教育教学研究中心政治室主任。参加全国高校招生命题工作14年。组织并编写：《北京市中学思想政治课课堂教学评价标准》、北京市《中华传统美德》实验教材；撰写了《北京市思想政治课的教研工作》等。

寄语：正确理解并全面掌握基本概念、原理和理论知识，是形成能力的前提和基础。分析问题和解决问题的能力是练出来的，只有多运用所学知识去认识事物，才能不断提高自己认识世界和改造世界的能力。

孟广恒

历史特级教师　原北京教科院基础教育教学研究中心历史室主任、全国历史专业委员会常务理事、副秘书长、北京历史教学研究会会长。历史教学著述和论文计200多万字。指导、培养优秀教师多人。

寄语：历史知识的基础性，理解问题的深透性，分析问题的全面性，与有关学科的交互性，再加之学习方法的灵活性，掌握这五性，你就一定会成功。

郭正权

地理特级教师　北京中学地理教研员。曾专职编写中学地理教材。40多年来献身中学地理教育事业，并撰写出版了《中国自然地理常识问答》、《中学地理教材中的名人》、《现代中学地理教学研究》等地理教育专著，发表地理教学论文数十篇。

寄语：紧紧地抓住环境、资源、人口和可持续发展这个主题，密切地联系当地实际，学会分析和思考地理问题的方法，这是学好地理知识的一条必由之路。

万向思维学生顾问团

马亦欣：2002年以山东省理科第七名的高考成绩考入北京大学。现就读于北大元培计划实验班。

座右铭：Tomorrow is another day.

对学弟学妹的希望：把握现在，把握自己，用自己的努力塑造自己的明天。

王　悦：清华大学2002级电子工程系电子科学与技术专业。高中时获得山西省化学、生物、英语竞赛一等奖，物理竞赛二等奖，大一曾担任班级组织委员。

刘雅洁：现就读于北京大学金融系。高中时曾获山西省奥林匹克竞赛物理二等奖、化学二等奖。

2002年高考总分685分（理科），山西省第四名，大同市第一名。

夏　华：1985年生于江西湖口县，2002年毕业于湖口县中学，高考总分为683分，就读于北京大学信息管理与信息系统专业。高二曾参加高考被东南大学少年班录取。

我的理念是：幸运总是只垂青于锲而不舍的人们！

面对困难，让我们抱着平常心、自信心和背水一战的心态为自己的未来和梦想打拼！旗鼓相当勇者胜！成功与辉煌在向勇士们招手！

魏　娜：现就读于北京大学金融系。2002年高考新疆文科状元。中学时曾多次获得省三好学生和优秀班干部称号。

人生格言：自信是远胜一切的人生法宝！

李光明：清华大学2002级工业工程系的学生。高中时担任班长三年，参加了全国奥林匹克物理竞赛与全国高中生数学联赛，取得物理一等奖，数学二等奖的成绩。

黄琳娜：北京大学法学院2003级本科生。

最喜欢的名言是：

能够摄取必要营养的人要比吃的很多的人更健康；同样地，真正的学者往往不是读了很多书的人，而是读了有用的书的人。

——（古希腊）亚里斯提卜

王朝薇：北京大学2002级日语系本科生。在同日本大使的交流活动中担任日文主持，并兼任北大校长的日文翻译。现任北大外国语学院学生会副主席，北大中日青年交流会会长兼团支书，北大广播台专栏节目主编兼任播音、记者。

曾作为中央电视台银河少年电视艺术团的团员在各地演出，并于“全国城市童声合唱节”获得优秀奖。高中时获得北京市优秀学生干部奖，担任北京十五中学学生会文艺部部长、广播台台长，在历次的考试中名列年级前三名。学习之余，受中央电视台、北京广播电台邀请，参与了多期栏目的录制活动。暑期曾代表首都学生远赴澳大利亚进行艺术交流活动，在当地引起巨大轰动。

自己的格言：生命中，没有什么是我的终极目标。生命的线，因不断延长，而永远找不到停滞的那一天。

李　响：就读于清华大学信息学院自动化系，任班长职务，获清华大学新生一等奖学金。

2002年吉林省理科第一名。曾获全国小学生作文竞赛优秀奖、吉林省中小学作文竞赛二等奖、吉林省化学竞赛二等奖、四平市优秀学生干部、吉林省优秀学生干部（高考加10分）等奖励。

来自作者的使用说明

本书在各章中设以下五部分内容：

高考要求

本部分以最新教学大纲为指导，指出本章考点、重点与难点．读者通过对这部分内容的阅读，可以明确学习方向、把握学习重点，做到有的放矢．

知识详解

本部分对考纲要求的所有知识点进行详细讲解，读者通过阅读这部分内容可以夯实基础知识、掌握重点知识、突破难点知识，达到融会贯通之目的．

经典例题

此部分收录了相当数量的经典基础例题，每道例题都有透彻的分析、详细的解题过程和中肯独到的点拨．这些例题覆盖了本章的所有知识点、数学思想和数学方法，每道例题都有很强的典型性和代表性，都蕴涵着某一种解题思路、基本方法、解题技巧或命题方向．读者如能对这些例题进行认真学习，仔细揣摩，相信将会有很大的收获．

数学思想方法

本部分对本章用到的数学思想和数学方法进行系统地总结．针对每一种数学思想和数学方法，配备经典例题进行详细讲解和说明，读者通过对这部分内容的学习，可以进一步巩固基础知识、培养数学素养、提高解题能力．

高考命题探究

本部分以最新高考考纲为指导，通过对近几年高考真题的分析和讲解，使读者感受高考真题风格、把握高考命题思路和趋势、熟悉高考考查方式，让读者做到心中有数．

总之，本书容量大、实用性强；讲解详细、例题经典；体例安排合理、科学，是一本教师和学生不可多得的辅导用书．

《高中数学教材知识大全》编委会

2004年8月1日

CONTENTS 目录

CONTENTS 目录

CONTENTS 目录

CONTENTS 目录

第一章 集合与简易逻辑

一、集 合

高考要求

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念；

2. 了解空集和全集的意义；

3. 了解属于、包含、相等关系的意义；

4. 掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合.

知识详解

1. 集合

某些指定的对象集在一起就成为一个集合. 集合是数学中不加定义的基本概念.

2. 集合的元素

集合中的每个对象叫做这个集合的元素. 集合常用大写的拉丁字母表示，集合中的元素常用小写的拉丁字母表示.

3. 集合的分类

(1)含有有限个元素的集合叫做有限集.

(2)含有无限个元素的集合叫做无限集.

(3)不含任何元素的集合叫做空集.

4. 集合中元素的特性

(1)确定性. 设A是一个给定的集合，x是某一具体对象，则x或者是A的元素，或者不是A的元素，两种情况有且只有一种成立.

(2)互异性. 集合中的元素必须是互异的，就是说，对于一个给定的集合，它的任何两个元素都是不同的，因此，如果把两个集合$\{1,2,3,4\}$，$\{3,4,5,6,7\}$的元素合并在一起构成一个新集合的话，那么新集合只有1,2,3,4,5,6,7这七个元素，构成的集合应写为$\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

(3)无序性. 集合与其中元素的排列次序无关，如集合$\{a,b,c\}$与$\{b,a,c\}$是同一集合.

5. 集合的表示方法

(1)列举法

将集合中的元素一一列举出来，写在括号内表示集合的方法.

使用列举法时，需注意以下几点.

①元素间用分隔号“,”；

②元素不重复；

③元素无顺序；

④对于含较多元素的集合，如果构成该集合的元素有明显规律，可用列举法，但是必须把元素间的规律显示清楚后才能用省略号.

(2)描述法

用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法，它的一般形式是$\{x \mid x$适合的条件$\}$，其中x叫做代表元素.

描述法的语言形式有三种：文字语言，符号语言，图形语言. 如，表示由直线$y=x$上所有的点组成的集合，可用下列三种方法：

①文字语言形式：直线$y=x$上所有的点组成的集合；

②符号语言形式：$\{(x,y) \mid y=x\}$；

③图形语言形式：在平面直角坐标系内画出直线$y=x$(略).

使用描述法时，需要注意以下几点：

①写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表达的元素符号)；

②说明该集合中元素的性质；

③不能出现未被说明的字母；

④多层描述时，应当准确使用“且”、“或”；

⑤所有描述的内容都要写在集合符号内；

⑥用于描述的语句力求简明、准确.

(3)图示法

为了形象地表示集合，我们常常画一条封闭的曲线，用它的内部来表示一个集合. 例如，

图 1－1 表示集合$\{1,2,3,4,5\}$.

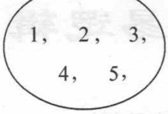


图 1－1

(4)特定集合的表示

为了书写的方便,我们规定常见的数集用特定的字母表示,下面是几种常见的数集表示方法,请牢记.

①全体非负整数的集合通常简称非负整数集(或自然数集),记作 **N**;

②非负整数集内排除 0 的集合,也称正整数集,表示成 $\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}^+$);

③全体整数的集合通常简称为整数集,记作 **Z**;

④全体有理数的集合通常简称为有理数集,记作 **Q**;

⑤全体实数的集合通常简称为实数集,记作 **R**.

6. 元素与集合的关系符号

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$,读作 a 属于集合 A;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A,记作 $a\notin A$,读作 a 不属于集合 A.

注意:①$a\in A$ 与 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素. 根据集合中元素的确定性,可知对任何 a 与 A,$a\in A$ 与 $a\notin A$ 这两种情况有且只有一种成立.

②符号"$\in$"、"$\notin$"是表示元素与集合之间的关系的,不能用来表示集合与集合之间的关系,这一点千万要记牢.

7. 子集的定义

对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,我们就说集合 A 包含于集合 B,或集合 B 包含集合 A,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$). 这时我们也说集合 A 是集合 B 的子集.

注意:①"A 是 B 的子集"的含义是:集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素,即由任意 $x\in A$ 都有 $x\in B$. ②当 A 不是 B 的子集时,我们记作"$A\not\subseteq B$"(或 $B\not\supseteq A$),读作 A 不包含于 B(或 B 不含 A). ③任何一个集合是它本身的子集. 因为对于任何一个集合 A,它的任何一个元素都属于集合 A 本身. 记作 $A\subseteq A$. ④空集是任何集合的子集,即对于任一集合 A,有$\varnothing\subseteq A$. ⑤在子集的定义中,不能理解为子集 A 是 B 中的"部分元素"所组成的集合. 因为若$A=\varnothing$,则 A 中不含任何元素;若 $A=B$,则 A 中含有 B 中的所有元素,但此时集合 A 也是集合 B 的子集.

8. 集合相等

如果集合 A 的任何一个元素,都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B,记作 $A=B$. 读作 A等于 B.

注意:①证明:若 $A\subseteq B$,同时 $B\subseteq A$,则 $A=B$. 因为 $A\subseteq B$,所以 A 的元素都是 B 的元素;又因为 $B\subseteq A$,所以 B 的元素都是 A 的元素,这就是说,集合 A 与集体 B 的元素是完全相同的,因而我们说 A 与 B 是相等的集合. ②上面定义的证明给出我们证明两个集合相等的办法,即欲证 $A=B$,只需证 $A\subseteq B$ 与$B\subseteq A$ 都成立即可.

9. 真子集

如果 $A\subseteq B$,且 $A\neq B$,就说集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$. 它的图形表示如图 1－2.

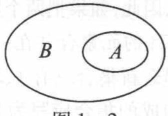


图 1－2

注意:空集是任何非空集合的真子集.

10. 全集

在研究集合与集合之间的关系时,有时这

些集合都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合可以看成一个全集，可用符号 U 表示，也就是说，全集含有我们所要研究的各个集合的全部元素.

注意：全集是相对于所研究问题而言的一个相对概念，它含有与所研究问题有关的各个集合的全部元素，因此，全集因研究问题而异. 例如：在研究数集时，常常把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集. 在立体几何中，三维空间是全集，这时平面是全集的一个子集. 而在平面几何中，整个平面可以看作是一个全集.

11. 补集

设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集（即 $A\subseteq S$），则 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集（或余集），记作 $\complement_S A$，即 $\complement_S A=\{x\mid x\in S,\text{且 } x\notin A\}$.

几个特殊性质：

$\complement_S S=\varnothing$，$\complement_S\varnothing=S$，$\complement_S(\complement_S A)=A$.

12. 交集

一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A，B 的交集. 记作 $A\cap B$，读作："A 交 B".

符号语言表达式为：$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\}$.

文氏图（图示法）表示为（图 1－3）：

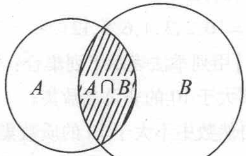


图 1－3

关于定义的理解：对于"$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\}$"，不能仅认识到 $A\cap B$ 中的任何一元素都是 A 与 B 的公共元素，同时还应认识到定义还包含有 A 与 B 的公共元素都属于 $A\cap B$ 的含义，这就是文字定义中"所有"二字的含义，而不是"部分". 还有并不是任何两个集合总有公共元素，当集合 A 与 B 没有公共元素时，不能说 A 与 B 没有交集，而是 $A\cap B=\varnothing$.

13. 交集的运算性质

对于任何两个集合 A，B，有

(1) $(A\cap B)\subseteq A$，$(A\cap B)\subseteq B$；

(2) $A\cap A=A$；

(3) $A\cap\varnothing=\varnothing$；

(4) $A\cap B=B\cap A$.

14. 并集

一般地，由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合，叫做 A，B 的并集. 记作：$A\cup B$，读作："A 并 B".

符号语言表达为：$A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或 } x\in B\}$.

文氏图表示为（阴影部分）（图 1－4）.

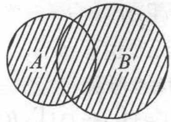


图 1－4

注意：①其中的"或"字的意义，用它连接的并列成分之间不一定是互相排斥的，$x\in A$，或 $x\in B$ 这一条件，包括下列三种情况：$x\in A$，且 $x\notin B$；$x\in B$，且 $x\notin A$；$x\in A$，且 $x\in B$（很明显，适合第三种情况的元素 x 构成的集合就是 $A\cap B$，它不一定是空集）. ②对于 $A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或 } x\in B\}$，不能认为 $A\cup B$ 是由 A 的所有元素和 B 的所有元素直接排在一起所组成集合，因为 A 与 B 可能有公共元素，所以上述的认为，从集合的元素互异性看是错误的.

15. 并集的运算性质

(1) $A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$；

(2) $A\cup A=A$；

(3) $A\cup\varnothing=A$；

(4) $A\cup B=B\cup A$.

16. 用文氏图表示交集、并集、补集的有关关系

如果集合 A 与 B 为全集 U 的子集，利用文氏图表示下面关系：

(1) 如图 1－5 所示，

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

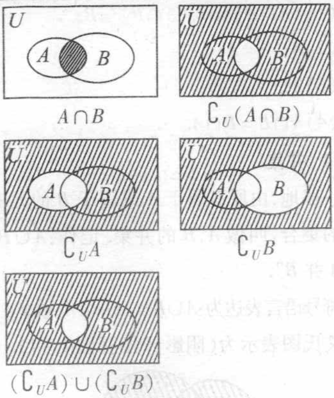


图 1－5

(2) 如图 1－6 所示，

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_UA)\cap(\complement_UB)$.

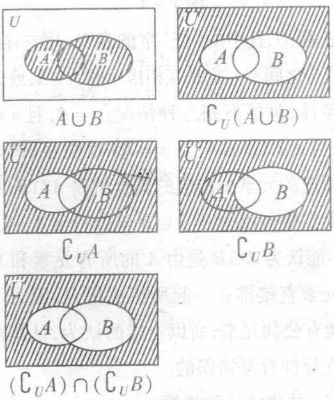


图 1－6

经典例题

【例 1】考查下列每组对象能否构成一个集合？

(1) 著名的数学家；

(2) 某校 2001 年在校的所有高个子同学；

(3) 不超过 20 的非负数；

(4) 方程 $x^2-9=0$ 的实数解；

(5) 直角坐标平面内第一象限的一些点.

解：(1)"著名的数学家"无明确的标准，对于某个人是否"著名"无法客观地判断，因此"著名的数学家"不能构成一个集合，类似地(2)也不能构成集合.

(3) 任何一个实数 x，可以明确地判断是不是"不超过 20 的非负数"，即"$0\leqslant x\leqslant 20$"与"$x>20$ 或 $x<0$"，两者必居其一，且仅居其一，故"不超过 20 的非负数"能构成集全，类似地(4)也能构成集合.

(5)"一些点"无明确的标准，对于某个点是否在"一些点"中无法确定，因此"直角坐标平面内第一象限的一些点"不能构成集合.

点拨：一些对象构成的集合必须具有以下两个特点：一是整体性，二是确定性. 其中"集在一起"一语，说明集合是指某些事物的整体而不是指其中个别的事物，这就是集合的整体性."指定的对象"一语，说明集合是由属于它的元素所完全确定的，一个对象要么是它的一个元素，要么不是它的一个元素，二者必居其一，这就是集合的确定性.

由此可见，只要对象是确定的，看作一个整体，便形成一个集合；否则不然.

【例 2】已知集合 $P=\{0,1,2,3,4\}$，$Q=\{x\mid x=ab,a,b\in P,a\neq b\}$，用列举法求集合 Q.

分析：集合 Q 中的元素是集合 P 中任意两个元素的积，结合元素互异性要求，不同的积有 0，2，3，4，6，8，12.

解：$Q=\{0,2,3,4,6,8,12\}$.

【例 3】用列举法表示下列集合：

(1) 不大于 10 的非负偶数集；

(2) 自然数中不大于 10 的质数集；

(3) $\{x\mid x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b},a,b$ 为非零实数$\}$.

解：(1) 因为不大于 10 是小于或等于 10；非负数是大于或等于 0 的意思，所以不大于 10 的非负偶数集是 $\{0,2,4,6,8,10\}$.

(2) 在自然数中，除 1 外只能被 1 和本身整除的数叫质数，1 既不是质数也不是合数，2 是质数，所以答案为 $\{2,3,5,7\}$.

(3) 关键是根据绝对值的意思化简 $x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}$，当 $a>0,b>0$ 时，$x=2$；当 $a<0,b<0$ 时，

$x=-2$；当 a,b 异号时，$x=0$. 故用列举法表示为 $\{-2,0,2\}$.

点拨：列举法是把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法. 列举时，元素不重复，不计次序，不遗漏，且元素与元素之间用“,”隔开. 其优点是集合中的元素清晰可见，一目了然.

【例4】用描述法表示下列集合：

(1)使 $y=\dfrac{1}{x^2+x-6}$ 有意义的实数 x 的集合；

(2)坐标平面内，不在一、三象限的点的集合；

(3)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象上的所有点的集合；

(4)所有被3除余1的整数.

解：(1) $\{x\mid x\neq 2$ 且 $x\neq -3, x\in\mathbf{R}\}$；

(2)坐标平面内在一、三象限的点的特点是纵、横坐标同号，所以不在一、三象限的点的集合可表示为 $\{(x,y)\mid xy\leqslant 0\}$；

(3) $\{(x,y)\mid y=ax^2+bx+c, x\in\mathbf{R}$，且 $a\neq 0\}$；

(4) $\{x\mid x=3n+1, n\in\mathbf{Z}\}$.

点拨：描述法表示集合时，大括号内可以是文字描述，也可以是数学式子描述. 若用文字描述，要注意文字精练，准确. 如果用数学式子描述，常用模式是 $\{x\mid x\in P\}$，x 为集合的代表元素，竖线为隔开符号，P 为集合中元素所具有的公共属性.

【例5】(1)改用列举法表示下列各集合：

①{自然数中最小的5个完全平方数}；

② $\{x\mid (x-1)^2(x-2)=0\}$；

③ $\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}2x+y=8,\\ x-y=1.\end{cases}\right\}$

(2)改用描述法表示下列各集合：

① $\{2,4,6,8,10,12\}$；

② $\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{4},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{6},\dfrac{5}{7}\right\}$；

③ $\{2,3,4\}$.

解：(1)① $\{0,1,4,9,16\}$；

② $\{1,2\}$；

③ $\{(3,2)\}$.

(2)① $\{x\mid x=2n, n\in\mathbf{N}^*, n\leqslant 6\}$；

② $\left\{x\,\middle|\, x=\dfrac{n}{n+2}, n\in\mathbf{N}^*, n<6\right\}$；

③ $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4, x\in\mathbf{N}\}$，还可以写成 $\{x\mid (x-2)(x-3)(x-4)=0\}$.

点拨：在(1)②中1是方程的二重根，如果把方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的解集写成 $\{1,1,2\}$ 是不可以的，这是因为集合的元素是互异的，同一元素不能重复出现.

在(1)③中集合的代表元素是 (x,y)，故不能写成 $\{3,2\}$，也不能写成 $\{x=3,y=2\}$.

表示集合的两种主要方法是列举法和描述法. 为了更好地掌握集合语言，应注意集合的两种不同表达方式(即普通语言和符号语言)的互译.

【例6】用符号 $\in$ 和 $\notin$ 填空：

(1) 1 __$\in$__ $\mathbf{N}$，0 ____ $\mathbf{N}$，-3 __$\in$__ $\mathbf{Q}$，0.5 __$\notin$__ $\mathbf{Z}$，$\sqrt{2}$ __$\notin$__ $\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}$ __$\in$__ $\mathbf{R}$；

(2) $2\sqrt{3}$ __$\notin$__ $\{x\mid x<\sqrt{11}\}$，$3\sqrt{2}$ __$\in$__ $\{x\mid x>4\}$，$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ __$\in$__ $\{x\mid x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$；

(3) 3 __$\notin$__ $\{x\mid x=n^2+1, n\in\mathbf{N}\}$，5 __$\in$__ $\{x\mid x=n^2+1, n\in\mathbf{N}\}$；

(4) $(1,-1)$ __$\notin$__ $\{y\mid y=x^2\}$，$(-1,1)$ __$\in$__ $\{(x,y)\mid y=x^2\}$.

解：(1) $\in$，$\in$，$\in$，$\notin$，$\notin$，$\in$；

(2) $2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{11}$，

$\therefore 2\sqrt{3}\notin\{x\mid x>\sqrt{11}\}$.

$3\sqrt{2}=\sqrt{18}>\sqrt{16}=4$，

$\therefore 3\sqrt{2}\in\{x\mid x>4\}$.

$\because (\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=7+2\sqrt{10}<(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$，

$\therefore \sqrt{2}+\sqrt{5}\in\{x\mid x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$；

(3)令 $n^2+1=3$，$n=\pm\sqrt{2}\notin\mathbf{N}$；令 $n^2+1=5$，$n=\pm 2, 2\in\mathbf{N}$，

(4) $\notin$，$\in$.

点拨：确定元素是否在集合中，要根据元素

是否满足代表元素所适合的条件来确定，是，使用符号“$\in$”，否则使用“$\notin$”。

【例7】设集合 $A=\{x|6+\sqrt{3}<x\leqslant 10\}$.

(1) A 是有限集还是无限集？

(2) $3+\sqrt{17}$ 是不是集合 A 中的元素？$5\sqrt{3}$ 呢？

解：(1)大于 $6+\sqrt{3}$ 且小于等于 10 的实数有无穷多，也就是说 A 中有无穷多个元素.

$\therefore$ 集合 $A=\{x|6+\sqrt{3}<x\leqslant 10\}$ 是无限集.

(2) $\because (\sqrt{17})^2-(3+\sqrt{3})^2=17-(12+6\sqrt{3})=5-6\sqrt{3}<0$,

$\therefore \sqrt{17}<3+\sqrt{3}$, $\quad\therefore 3+\sqrt{17}<6+\sqrt{13}$,

$\therefore 3+\sqrt{17}\notin A$.

$\because (6+\sqrt{3})-5\sqrt{3}=6-4\sqrt{3}<0$,

$\therefore 6+\sqrt{3}<5\sqrt{3}$，又 $5\sqrt{3}<10$,

$\therefore 6+\sqrt{3}<5\sqrt{3}<10$,

$\therefore 5\sqrt{3}\in A$.

点拨：判断一个对象是不是某个集合中的元素，就是判断这个对象是否具有集合元素所具有的属性. 由于集合多种多样，因此判断方法也多种多样，由题而异.

【例8】数集 A 中：若 $a\in A, a\neq 1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$.

求证：(1)若 $2\in A$，则在 A 中还有另外两个数，求出这两个数；$-1, \frac{1}{2}$

(2)若 $1\notin A$，集合 A 不可能是单元素实数集；

(3)若存在非零实数 $a\neq 1$ 且 $a\in A$，集合 A 中至少有三个不同的元素.

证明：(1) $\because 2\in A, 2\neq 1$, $\therefore \frac{1}{1-2}=-1\in A$.

$\therefore -1\in A$, $\quad$ 又 $-1\neq 1$,

$\therefore \frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$.

$\because \frac{1}{2}\in A, \frac{1}{2}\neq 1$, $\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$.

$\therefore -1, \frac{1}{2}\in A$.

(2)若 A 是单元素的实数集，则 $a=\frac{1}{1-a}$，又 $a^2-a+1=0$ 的方程无实解.

$\therefore a\neq \frac{1}{1-a}$

$\therefore$ 集合 A 不可能是单元素的实数集.

(3) $\because a\in A, a\neq 1$ 且 $a\neq 0$ 时，有 $\frac{1}{1-a}\in A$ 且 $\frac{1}{1-a}\neq 1$. $\therefore$ 有 $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{a-1}{a}\in A$.

$\therefore \frac{a-1}{a}\in A$，且 $\frac{a-1}{a}\neq 1$. $\left(\text{若}\frac{a-1}{a}=1\text{ 则 } a-1=a\text{，即 }-1=0\text{，故}\frac{a-1}{a}\neq 1\right)$

$\therefore \frac{1}{1-\frac{a-1}{a}}=a\in A$.

$\therefore$ 若 $a\in A$，则 $\frac{a-1}{a}\in A, \frac{1}{1-a}\in A$.

又 $\because \frac{1}{1-a}\neq a, a\neq 1$,

$\therefore \frac{1}{1-a}\neq \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{a-1}{a}, \frac{a-1}{a}\neq \frac{1}{1-\frac{a-1}{a}}=a$,

即 A 至少有三个不同元素.

【例9】以下各组是什么关系，用适当的符号表示出来.

①0与$\{0\}$；②0与$\varnothing$；③$\varnothing$与$\{0\}$；④$\{0,1\}$与$\{(0,1)\}$；⑤$\{(b,a)\}$与$\{(a,b)\}$.

分析：首先要分清是元素与集合的关系，还是集合与集合的关系，再分清是什么关系.

解：对于①，$\{0\}$ 是含有单元素 0 的集合，0 与 $\{0\}$ 的关系是“属于与否”的关系，所以 $0\in\{0\}$.

对于②，空集$\varnothing$不含任何元素，所以 $0\notin\varnothing$.

对于③，$\varnothing$与$\{0\}$都是集合，两者的关系是“包含与否”的关系. 空集是任何非空集合的真子集，所以 $\varnothing\subsetneqq\{0\}$.

对于④，$\{0,1\}$ 是含两个元素 0 与 1 的集合，而 $\{(0,1)\}$ 是以“有序数组”为元素的单元