

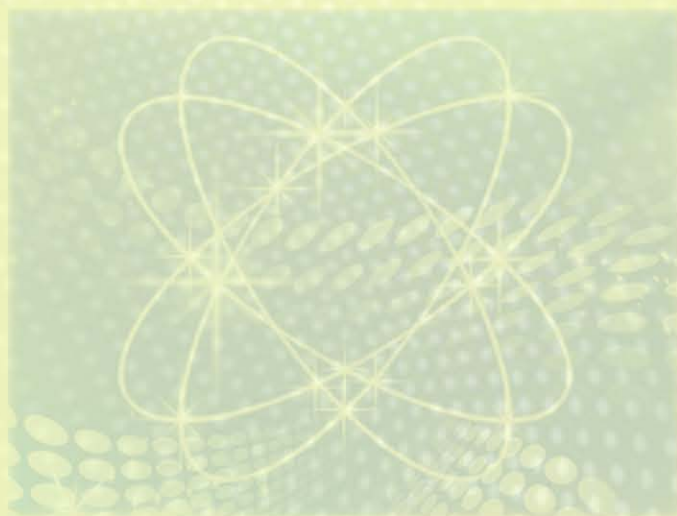
高等数学

典型例题解析与习题精解

(与同济第六版教材配套使用)

下 册

主编 徐 峰 范红玲 付夕联



西北工业大学出版

高等数学

典型例题解析与习题精解

(与同济第六版教材配套使用)

下 册

主 编	徐 峰	范红玲	付夕联	
副主编	商妮娜	梁家君	刘宣江	刘同波
编 委	徐 峰	范红玲	付夕联	商妮娜
	梁家君	刘宣江	刘同波	吕成军
	王效义	毕玉昌	张 劲	林雅宁
	巩本学	巩本学	郑 滨	

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是按照高等学校工科数学课程教学指导委员会颁布的教学大纲“高等数学教学基本要求”编写. 内容结构主要参考了同济大学数学系编《高等数学》(第六版)的章节顺序. 本书共十二章, 内容按节编写, 每节分为释疑解惑、典型例题解析、课后习题精解. 而每一章都有单元测试与提高及其解答. 上、下册最后还分别给出了两套模拟测试题, 其题型与平时学生考试题完全一致, 本书可与《高等数学》(第六版)配套使用, 也可独立使用.

本书可作为高等数学课程教学、学习和应试的辅导书, 也可供考研人员及相关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型例题解析与习题精解/付夕联, 范红玲, 徐峰主编. —西安: 西北工业大学出版社, 2010. 8

ISBN 978-7-5612-2861-6

I. ①高… II. ①付… ②范… ③徐… III. ①高等数学—解题 IV. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 158356 号

出版发行: 西北工业大学出版社

通信地址: 西安市友谊西路 127 号 邮编: 710072

电 话: (029)88493844 88491757

网 址: www.nwpup.com

印刷者: 陕西丰源印务有限公司

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张: 43.125

字 数: 1556 千字

版 次: 2010 年 9 月第 1 版 2010 年 9 月第 1 次印刷

定 价: 65.00 元(¥29.00)

前 言

高等数学是理工科院校开设的一门重要的基础课程,也是硕士研究生入学考试的必考科目。《高等数学》教材的版本较多,国内经典教材——同济大学数学系主编的《高等数学》具有体系完整、结构严谨、层次清晰和深入浅出的特点,成为多所院校的本科使用教材,我们根据多年的教学经验,在对教学大纲、课程内容以及近几年研究生入学考试的特点进行深入分析的基础上,依据同济大学数学系主编的《高等数学》第六版的内容和章节顺序,编写了本书。本书旨在帮助、指导广大读者更深入地理解课本中的基本概念、基本原理,熟练掌握解题的基本思想方法,提高应试能力和数学基本素质。

本书共分为十二章,章节的划分与标题和同济大学数学系主编的《高等数学》第六版的内容及章节顺序完全一致,每一节包括如下几部分内容:

一、释疑解惑

对本节的基本概念、重要原理及公式有选择地作出更深入、更全面地阐释;揭示出概念与概念之间应有的联系与区别;针对读者在学习本节内容常常问及的一些带有共同性的、又有较大意义的问题,给予准确的解答和详尽的剖析;对一些应用较广泛的命题或公式进行了适当的推广。

二、典型例题解析

在教材原有例题和课后习题的基础上,精选一部分典型例题,以便开拓学生视野,巩固所学知识,掌握解题的基本方法和技巧;另外根据近几年研究生入学考试的特点,针对体现基本方法和重要思想的原理、命题或公式,举出了一些有一定难度的题目,其中有许多题目都是历年来研究生考试的真题,对有些题目的解答做出了分析和总结,以供学有余力的学生阅读参考。

三、课后习题解答

对本节的课后习题一一作出详细解答,以供教师和学业生参考。

另外每章都有单元测试与提高及其解答,单元测试与提高较全面地反映出本章的知识点,有填空题、选择题、简单的解答题、综合题、讨论题和证明题等;上、下册最后还分别出了两套模拟测试题,其题型与平时学生考试题型完全一致,对广大读者参加期中测验和期末考试有重要的参考价值。

本书的编写力求突出以下几个特点:

(1)注重对基本概念、基本原理、基本思想方法的理解与掌握,消除因对这些基础知识理解上的欠缺而导致解题过程中的失误;强调了知识与知识、方法与方法之间的联系与区别,有助于读者在联系中去巩固、深化知识,从而在头脑中形成清晰、稳固的认知结构。

(2)所选取的典型例题以及一些单元测试中的题目具有开放性、可推广性、一题多解的特

点,这些题目有的要应用多个知识点,具有较强的综合性,由此激活学生的思维,开阔学生的思路,使学生能对考点知识融合贯通,提高其应试能力。

(3)问题是数学的心脏,知识是数学的载体,方法是数学的行为,思想则是数学的灵魂。本书在注重基础知识的同时,正是通过精选的例题和单元测试题的解答过程,对使用的方法进行总结,以方法对问题进行归类,避免了传统的题海战术。

本书注意博采众家之长,查阅了多部教学参考书和研究生入学考试指导丛书,汲取了丰富的养分,在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于本书编者水平所限,疏漏与错误在所难免,敬请广大读者提出宝贵意见。

编 者

2010 年 5 月

目 录

第八章 空间解析几何与向量代数 1

第一节 向量及其线性运算 1

一、释疑解惑 1

二、典型例题解析 1

三、课后习题解答 4

第二节 数量积 向量积 混合积 6

一、释疑解惑 6

二、典型例题解析 7

三、课后习题解答 10

第三节 曲面及其方程 13

一、释疑解惑 13

二、典型例题解析 13

三、课后习题解答 15

第四节 空间曲线及其方程 17

一、释疑解惑 17

二、典型例题解析 18

三、课后习题解答 19

第五节 平面及其方程 21

一、释疑解惑 21

二、典型例题解析 22

三、课后习题解答 24

第六节 空间直线及其方程 26

一、释疑解惑 26

二、典型例题解析 28

三、课后习题解答 32

单元测试与提高 40

单元测试与提高答案 41

第九章 多元函数微分法及其应用 47

第一节 多元函数的基本概念 47

一、释疑解惑 47

二、典型例题解析 48

三、课后习题解答 51

第二节 偏导数 54

一、释疑解惑 54

二、典型例题解析 55

三、课后习题解答 58

第三节 全微分 60

一、释疑解惑 60

二、典型例题解析 61

三、课后习题解答 64

第四节 多元复合函数的求导法则 67

一、释疑解惑 67

二、典型例题解析 68

三、课后习题解答 73

第五节 隐函数的求导公式 76

一、释疑解惑 76

二、典型例题解析 78

三、课后习题解答 82

第六节 多元函数微分学的几何应用 86

一、释疑解惑 86

二、典型例题解析 87

三、课后习题解答 90

第七节 方向导数和梯度 95

一、释疑解惑 95

二、典型例题解析 96

三、课后习题解答 98

第八节 多元函数的极值及其求法 101

一、释疑解惑 101

二、典型例题解析 103

三、课后习题解答 107

单元测试与提高 117

单元测试与提高答案 121

第十章 重积分 131

第一节 二重积分的概念与性质

..... 131

一、释疑解惑 131

二、典型例题解析 132

三、课后习题解答 134

第二节 二重积分的计算法 136

一、释疑解惑 136

二、典型例题解析 138

三、课后习题解答 148

第三节 三重积分 160

一、释疑解惑 160

二、典型例题解析 161

三、课后习题解答 168

第四节 重积分的应用 172

一、释疑解惑 172

二、典型例题解析 173

三、课后习题解答 177

单元测试与提高 190

单元测试与提高答案 192

第十一章 曲线积分与曲面积分 196

第一节 对弧长的曲线积分 196

一、释疑解惑 196

二、典型例题解析 197

三、课后习题解答 199

第二节 对坐标的曲线积分 202

一、释疑解惑 202

二、典型例题解析 203

三、课后习题解答 205

第三节 格林公式及其应用 208

一、释疑解惑 208

二、典型例题解析 210

三、课后习题解答 217

第四节 对面积的曲面积分 222

一、释疑解惑 222

二、典型例题解析 223

三、课后习题解答 225

第五节 对坐标的曲面积分 228

一、释疑解惑 228

二、典型例题解析 230

三、课后习题解答 232

第六、七节 高斯公式和斯托克斯公式

..... 235

一、释疑解惑 235

二、典型例题解析 236

三、课后习题解答 238

单元测试与提高 246

单元测试与提高答案 248

第十二章 无穷级数 253

第一节 常数项级数及其性质 253

一、释疑解惑 253

二、典型例题解析 254

三、课后习题解答 255

第二节 常数项级数的审敛法 257

一、释疑解惑 257

二、典型例题解析 259

三、课后习题解答 260

第三节 幂级数 263

一、释疑解惑 263

二、典型例题解析 264

三、课后习题解答 266

第四节 函数展开成幂级数 267

一、释疑解惑 267

二、典型例题解析 267

三、课后习题解答 268

第五节 函数的幂级数展开式的应用

..... 271

一、释疑解惑 271

二、典型例题解析 271

三、课后习题解答 272

第七节 傅里叶级数 276

一、释疑解惑 276

二、典型例题解析	277	单元测试与提高答案	294
三、课后习题解答	279		
第八节 一般周期函数的傅里叶级数		模拟试题一	299
.....	282	模拟试题一参考答案	300
一、释疑解惑	282	模拟试题二	302
二、典型例题解析	283	模拟试题二参考答案	303
三、课后习题解答	285		
单元测试与提高	292		

第八章 空间解析几何与向量代数

第一节 向量及其线性运算

GAODENGSHUXUE

一、释疑解惑

1. 如何确定一个向量?

答 确定一个向量通常有两种方法:一是依据向量具有大小和方向的特性,分别求出它的大小(模) $|a|$ 和方向 a° (或求出方向角),即可确定 $a = |a| a^\circ$;二是求出向量 a 的三个坐标 a_x, a_y, a_z ,即可写出 $a = (a_x, a_y, a_z)$.

2. 向量的分量与向量在坐标轴上的投影、投影向量有何区别和联系?

答 设向量 a 的坐标表示为 (a_x, a_y, a_z) ,则其坐标 a_x, a_y, a_z 就是 a 在三条坐标轴上的投影,即 $a_x = \text{Prj}_x a, a_y = \text{Prj}_y a, a_z = \text{Prj}_z a$.

投影和投影向量则是两个不同的概念.上述向量 a 在三条坐标轴上的投影向量分别为:

$$a_x i, \quad a_y j, \quad a_z k$$

3. 确定向量的坐标有哪些方法?

答 根据所给定的条件来确定向量的坐标,一般有以下几种常用方法:

- (1) 如果已知向量 a 的按基本单位向量的分解式为 $a = xi + yj + zk$,则 $a = (a_x, a_y, a_z)$;
- (2) 如果已知向量 a 的起点坐标 $A(x_1, y_1, z_1)$ 及终点坐标 $B(x_2, y_2, z_2)$,则 $a = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$;
- (3) 如果已知向量 a 的模 $|a|$ 及方向角 α, β, γ ,则 $a = (|a| \cos \alpha, |a| \cos \beta, |a| \cos \gamma)$;
- (4) 如果向量 a 与 $b = (x, y, z)$ 平行,可以设 $a = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$,其中 λ 的值要由 a 的模来确定。

4. 设 a, b 为非零向量,则 a, b 在什么条件下,下列式子成立?

- (1) $|a + b| = |a - b|$;
- (2) $|a + b| > |a - b|$;
- (3) $|a + b| < |a - b|$.

答 以 a, b 为边作平行四边形,则 $|a + b|, |a - b|$ 表示该平行四边形两条对角线的长度.通过观察可知:当 a 与 b 之间的夹角为直角时,有 $|a + b| = |a - b|$;当 a 与 b 之间的夹角为锐角时,有 $|a + b| > |a - b|$;当 a 与 b 之间的夹角为钝角时,有 $|a + b| < |a - b|$.

二、典型例题解析

例 8.1 用向量法证明:连结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证 设 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 的中点分别为 M, N (见图 8.1),那么

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

所以 $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$, 且 $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}|$.

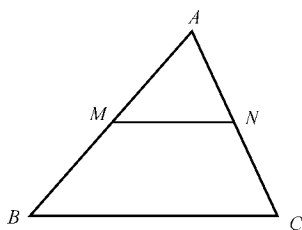


图 8.1

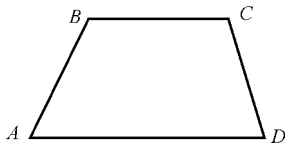


图 8.2

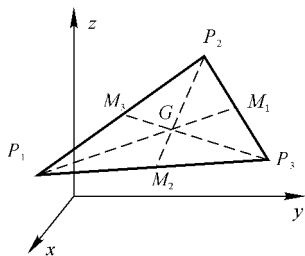


图 8.3

例 8.2 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = -4\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = -5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, 证明 $ABCD$ 为梯形.

分析 要证四边形为梯形, 只需找出一组对边平行且不相等.

证 由条件可知 (见图 8.2)

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) + (-4\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (-5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) = -8\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = 2\overrightarrow{BC}$$

所以边 AD 与边 BC 平行且长度是 BC 长度的两倍, 即证四边形 $ABCD$ 为梯形.

注 由以上两例可见, 用向量运算可以比较简洁地解决一些几何问题.

例 8.3 已知三角形三顶点为 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, 3$), 求 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心 (即三角形三中线的公共点) 的坐标.

解 如图 8.3 所示, 设 $\triangle P_1P_2P_3$ 的三中线为 P_iM_i ($i = 1, 2, 3$), 其中顶点 P_i 的对边上的中点为 M_i ($i = 1, 2, 3$), 三中线的公共点为 $G(x, y, z)$, 因此有

$$\overrightarrow{P_1G} = 2\overrightarrow{GM_1}$$

即重心 G 把中线分成定比 $\lambda = 2$.

因为 M_1 是 P_2P_3 的中点, 则有 $M_1\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$ 再由定比分点公式可得

$$x = \frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_2+x_3}{2}}{1+2} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

所以 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心坐标为

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

例 8.4 已知线段 AB 被点 $C(2, 0, 1)$ 和 $D(5, -2, 0)$ 三等分, 试求线段端点 A 与 B 的坐标.

分析 由题意点 C 为线段 AD 的中点, D 为线段 CB 的中点, 用中点坐标公式即可求解.

解 设点 $A(x_1, y_1, z_1)$, 点 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则有

$$2 = \frac{x_1+5}{2}, \quad 0 = \frac{y_1-2}{2}, \quad 2 = \frac{z_1+0}{2}$$

$$5 = \frac{2+x_2}{2}, \quad -2 = \frac{0+y_2}{2}, \quad 0 = \frac{2+z_2}{2}$$

分别解得

$$x_1 = -1, \quad y_1 = 2, \quad z_1 = 4$$

$$x_2 = 8, \quad y_2 = -4, \quad z_2 = -2$$

即线段端点坐标为 $A(-1, 2, 4)$ 和 $B(8, -4, -2)$.

例 8.5 已知空间三点 $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -4)$, $C(-1, 1, 2)$, 求点 D , 使 A, B, C, D 为顶点的四边形为

平行四边形.

分析 本题点 D 的位置有多种情形,在围成四边形时可以是 $ABDC$, $ABCD$ 或者 $ADBC$.

解 设 $D(x, y, z)$

(1) 若围成四边形 $ABDC$, 令 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, 即有

$$(-2, 3, -6) = (x_1 + 1, y - 1, z - 2)$$

得 $x = -3, y = 4, z = -4$, D 点坐标为 $(-3, 4, -4)$;

(2) 若围成四边形 $ABCD$, 令 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 即有

$$(-2, 3, -6) = (-1 - x, 1 - y, 2 - z)$$

得 $x = 1, y = -2, z = 8$, D 点坐标为 $(1, -2, 8)$;

(3) 若围成四边形 $ADBC$, 令 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$, 即有

$$(x - 3, y + 1, z - 2) = (2, 1, -6)$$

得 $x = 5, y = 0, z = -4$, D 点坐标为 $(5, 0, -4)$.

例 8.6 从点 $A(3, -1, 7)$ 沿向量 $a = (8, 9, -12)$ 方向取长为 34 的线段 $\overrightarrow{AB}$, 求点 B 的坐标.

解 设 $B(x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{AB} = 34a^\circ$, 其中 a° 是与 a 同向的单位向量, 且 $a^\circ = \frac{1}{|a|}a$.

因为 $|a| = \sqrt{8^2 + 9^2 + (-12)^2} = 17$, 所以

$$a^\circ = \frac{1}{17}(8, 9, -12)$$

$$\overrightarrow{AB} = 34 \times \frac{1}{17}(8, 9, -12) = (16, 18, -24)$$

容易解得 B 点坐标为 $x = 19, y = 17, z = -17$, 即 $B(19, 17, -17)$.

例 8.7 已知 $\overrightarrow{AB} = (-3, 0, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (5, -2, -14)$, 求 $\angle BAC$ 角平分线上的单位向量.

分析 分别在 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 上取与它们同向的单位向量 $\overrightarrow{AB}^\circ$ 与 $\overrightarrow{AC}^\circ$, 则它们的和向量 $\overrightarrow{AB}^\circ + \overrightarrow{AC}^\circ$ 在 $\angle BAC$ 角平分线上.

解

$$\overrightarrow{AB}^\circ = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{AC}^\circ = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{15}, -\frac{14}{5}\right)$$

记

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}^\circ + \overrightarrow{AC}^\circ = \left(-\frac{4}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{2}{15}\right)$$

则所求 $\angle BAC$ 角平分线上的单位向量为

$$\pm \frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -1, -1) = \mp \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

例 8.8 已知向量 a 的模为 2, 且与 x 轴和 y 轴的正向成等角, 与 z 轴正向的夹角是它们的两倍, 求向量 a .

解 设向量 a 的方向角为 α, β, γ , 则 $\alpha = \beta, \gamma = 2\alpha$, 且

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

即

$$2\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha = 1$$

解得 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$.

于是 $a^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 或 $(0, 0, -1)$, 又因为 $|a| = 2$, 故所求向量为 $a = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ 或 $(0, 0, -2)$.

三、课后习题解答

习题 8-1 解答

1. 设 $u = a - b + 2c$, $v = -a + 3b - c$. 试用 a, b, c 表示 $2u - 3v$.

解 $2u - 3v = 2(a - b + 2c) - 3(-a + 3b - c) = 5a - 11b + 7c$

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明它是平行四边形.

证明 如图 8.4 所示, 设四边形 $ABCD$ 中 AC 交 BD 于点 O , 且 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$, 因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$, 所以 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (同理, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$). 故四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

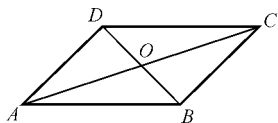


图 8.4

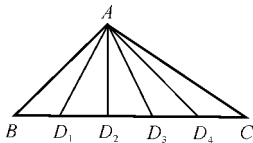


图 8.5

3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分, 设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4 , 再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB} = c$, $\overrightarrow{BC} = a$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$, $\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

解 如图 8.5 所示, $\overrightarrow{AB} = c$, $\overrightarrow{BC} = a$.

$$\overrightarrow{D_1A} = \overrightarrow{D_1B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{5}a - c$$

$$\overrightarrow{D_2A} = \overrightarrow{D_2B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{5}a - c$$

$$\overrightarrow{D_3A} = \overrightarrow{D_3B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}a - c$$

$$\overrightarrow{D_4A} = \overrightarrow{D_4B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{4}{5}a - c$$

4. 已知两点 $M_1(0, 1, 2)$ 和 $M_2(1, -1, 0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (1 - 0, -1 - 1, 0 - 2) = (1, -2, -2)$

$$-2\overrightarrow{M_1M_2} = -2(1, -2, -2) = (-2, 4, 4)$$

5. 求平行于向量 $a = (6, 7, -6)$ 的单位向量.

解 $|a| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = 11$, 平行于向量 a 的单位向量为

$$\frac{a}{11} = \frac{1}{11}(6, 7, -6) = \left(\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11}\right)$$

或者

$$-\frac{a}{11} = -\frac{1}{11}(6, 7, -6) = \left(-\frac{6}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{6}{11}\right)$$

6. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1, -2, 3); B(2, 3, -4); C(2, -3, -4); D(-2, -3, 1)$$

解 A 点在第 4 卦限, B 点在第 5 卦限, C 点在第 8 卦限, D 点在第 3 卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:

$$A(3, 4, 0); B(0, 4, 3); C(3, 0, 0); D(0, -1, 0)$$

解 设点 M 的坐标为 (x, y, z) , 若点 M 在 yOz 面上, 则 $x = 0$; 若点 M 在 zOx 面上, 则 $y = 0$; 若点 M 在 xOy 面上, 则 $z = 0$. 若点 M 在 x 轴上, 则 $y = z = 0$; 若点 M 在 y 轴上, 则 $z = x = 0$; 若点 M 在 z 轴上, 则 $x = y = 0$.

点 A 在 xOy 面上, 点 B 在 yOz 面上, 点 C 在 x 轴上, 点 D 在 y 轴上.

8. 求点 (a, b, c) 关于(1) 各坐标面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 关于 xOy , yOz , zOx 面的对称点的坐标分别为 $(a, b, -c)$, $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$;

(2) 关于 x, y, z 轴的对称点的坐标分别为 $(a, -b, -c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a, -b, c)$;

(3) 关于坐标原点的对称点的坐标为 $(-a, -b, -c)$.

9. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

解 xOy 面: $(x_0, y_0, 0)$; yOz 面: $(0, y_0, z_0)$; zOx 面: $(x_0, 0, z_0)$;
 x 轴: $(x_0, 0, 0)$, y 轴: $(0, y_0, 0)$, z 轴: $(0, 0, z_0)$. 如图 8.6 所示.

10. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面, 问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

解 过 P_0 且平行于 z 轴直线上的点有相同的横坐标 x_0 和相同的纵坐标 y_0 ; 过 P_0 且平行于 xOy 平面上的点具有相同的竖坐标 z_0 .

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上, 其底面的中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴和 y 轴上, 求它各顶点的坐标.

解 各顶点的坐标分别为: $(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0)$, $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0)$, $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a)$, $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a)$, $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a)$.

12. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

解 点 M 到 x 轴的距离: $r_x = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

点 M 到 y 轴的距离: $r_y = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

点 M 到 z 轴的距离: $r_z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

13. 在 yOz 面上, 求与三点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

解 在 yOz 面上, 设点 $P(0, y, z)$ 与 A, B, C 三点等距离, 即

$$|\overrightarrow{PA}|^2 = |\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PC}|^2$$

$$\begin{cases} 3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \\ 4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

解方程组, 得 $y = 1, z = -2$. 故所求点为 $(0, 1, -2)$.

14. 试证明以三点 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$, $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明 因为 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-10)^2 + (4-1)^2 + (3-6)^2} = 7\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$$

从而, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$. 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(3-4)^2 + (0-\sqrt{2})^2 + (2-1)^2} = 2$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, -\sqrt{2}, 1) = 2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{所以} \quad \cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{2}$$

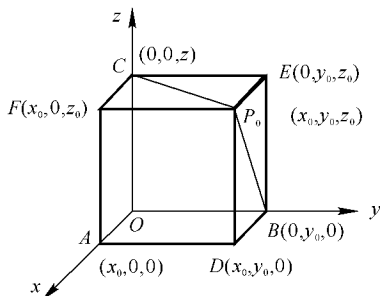


图 8.6

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi, \quad \beta = \frac{3}{4}\pi, \quad \gamma = \frac{\pi}{3}$$

16. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos\alpha = 0$; (2) $\cos\beta = 1$; (3) $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1) 当 $\cos\alpha = 0$ 时, 向量与 x 轴垂直, 平行于 yOz 面;

(2) 当 $\cos\beta = 1$ 时, $\beta = 0$, 则向量与 y 轴正向一致, 垂直于 zOx 面;

(3) 当 $\cos\alpha = \cos\beta = 0$ 时, 则 $\cos^2\gamma = 1$. 故 $\gamma = 0$ 或 π , 此时向量平行于 z 轴, 垂直于 xOy 面.

17. 设向量 r 的模是 4, 它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$, 求 r 在 u 轴上的投影.

解 $\text{Prj}_u r = |r| \cos(r, u) = 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2$

18. 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影依次为 4, -4 和 7. 求这向量的起点 A 的坐标.

解 设起点 A 的坐标为 (x, y, z) , 则

$$\overrightarrow{AB} = (2-x, -1-y, 7-z)$$

由题意, 得

$$2-x=4, \quad -1-y=-4, \quad 7-z=7$$

所以

$$x=-2, \quad y=3, \quad z=0$$

故起点 A 为 $(-2, 3, 0)$.

19. 设 $m = 3i + 5j + 8k$, $n = 2i - 4j - 7k$ 和 $p = 5i + j - 4k$. 求向量 $a = 4m + 3n - p$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 $a = 4(3i + 5j + 8k) + 3(2i - 4j - 7k) - (5i + j - 4k) = 13i + 7j + 15k$

所以 a 在 x 轴上的投影为 13, 在 y 轴上的分向量为 $7j$.

第二节 数量积 向量积 * 混合积

GAODENGSHUXUE

一、释疑解惑

1. 若 a 和 b 都是单位向量, 那么 $a \times b$ 是单位向量吗?

答 不一定. 因为 $|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\theta$, 其中 θ 是向量 a 与 b 之间的夹角. 即使 $|a| = |b| = 1$, 只要 $\sin\theta \neq 1$, $a \times b$ 就不会是单位向量. 所以当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 a 与 b 垂直时 $a \times b$ 是单位向量; 当 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, 即 a 与 b 不垂直时, $a \times b$ 不是单位向量.

2. 非零向量 a, b 是否一定使下式成立?

$$(a \cdot b)a = |a|^2 b$$

答 不一定. 因为 $a \cdot b$ 是一个常数, 从而 $(a \cdot b)a$ 是平行于 a 的向量; 而 $|a|^2 b$ 是平行于 b 的向量, 仅当 $a = \lambda b$, 其中 λ 为常数, 上式才可能成立.

3. 如果非零向量 a, b, c 使下面等式成立:

$$a \cdot b = a \cdot c$$

那么是否一定有 $b = c$?

答 不一定. 当 $a \neq 0$ 时, 由

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow |a| \text{Prj}_a b = |a| \text{Prj}_a c \Rightarrow \text{Prj}_a b = \text{Prj}_a c$$

但不一定 $b = c$. 如图 8.7 所示, 可见 $b \neq c$.

类似地, 若 $a \times b = a \times c$, 同理不能推出 $b = c$, 如图 8.8 所示.

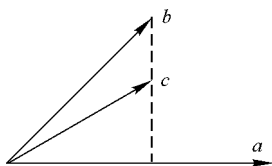


图 8.7

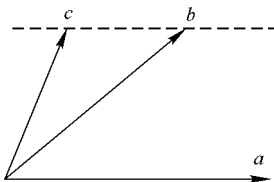


图 8.8

综上所述,向量的数量积、向量积一般情况下都不满足消去律.

4. 下列各式正确吗?

$$(1) a \cdot a \cdot a = a^3;$$

$$(2) a \neq 0 \text{ 时}, \frac{a}{a} = 1;$$

$$(3) (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2;$$

$$(4) (a+b) \times (a-b) = a \times a - b \times b = 0$$

答 以上各式都不正确,其原因都是把实数运算法则生搬硬套到向量运算上.

(1) 式两端都是没有意义的.

(2) 式左端没有意义,因为向量没有除法.

(3) 式错误套用了实数乘法的结合律,但向量的数量积运算不适合.只有当 $a \parallel b$ 时, (3) 式才能成立.

(4) 式错误套用了实数的平方差公式,而向量积虽满足分配律,却不满足交换律.

5. 对任意向量 a, b, c , 是否总有 $a-b, b-c, c-a$ 共面?

分析 用向量共面的充分必要条件讨论.

答 a, b, c 共面 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的实 λ, u, v , 使得 $\lambda a + ub + vc = 0$.

因为 $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$, 此时

$$\lambda = u = v = 1$$

所以三向量 $a-b, b-c, c-a$ 共面.

二、典型例题解析

例 8.9 向量 a, b, c 两两垂直, 且 $|a| = 2, |b| = 1, |c| = 2$, 则 $(a+b+c)$ 与 a 的夹角是_____.

分析 考虑向量之间的夹角余弦计算.

解 设 $a+b+c$ 与 a 的夹角为 θ , 则有

$$\cos \theta = \frac{(a+b+c) \cdot a}{|a+b+c| \cdot |a|} = \frac{a \cdot a}{|a+b+c| \cdot |a|}$$

其中 $a \cdot a = |a|^2 = 4$.

$$|a+b+c|^2 = (a+b+c) \cdot (a+b+c) = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 9$$

所以 $\cos \theta = \frac{2}{3}$, 所求夹角为 $\arccos \frac{2}{3}$.

例 8.10 设 $(a \times b) \cdot c = 2$, 则 $[(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a) =$ _____.

分析 用运算律计算.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= (a \times b + a \times c + b \times c) \cdot (c+a) = (a \times b) \cdot c + (b+c) \cdot a = \\ &= 2(a \times b) \cdot c = 4 \end{aligned}$$

例 8.11 设 $a \cdot b = 3, a \times b = (1, 1, 1)$, 试求 a 与 b 的夹角 θ .

分析 由数量积、向量积的定义式求解 θ .

解 由

$$\begin{aligned} a \cdot b &= |a| |b| \cos \theta = 3 \\ |a \times b| &= |a| |b| \sin \theta = \sqrt{3} \end{aligned}$$

两式相除可得

$$\cot \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

例 8.12 已知 a, b, c 均为单位向量, 且满足 $a + b + c = 0$, 求 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$.

解 解法一 $0 = (a + b + c) \cdot (a + b + c) = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$

所以
$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{3}{2}$$

解法二 如图 8.9 所示, 在等边 $\triangle ABC$ 中, 令 $\overrightarrow{BC} = a, \overrightarrow{CA} = b, \overrightarrow{AB} = c$. 边长为 1, 则 $a + b + c = 0$. 且

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

同理
$$b \cdot c = c \cdot a = -\frac{1}{2}$$

所以
$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{3}{2}$$

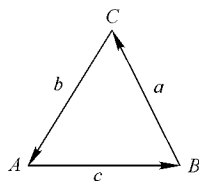


图 8.9

注 对涉及求向量的数量积问题, 常用以下两种方法:

(1) 已知向量的模与它们的夹角时, 直接由定义式 $a \cdot b = |a| |b| \cos(a, b)$ 进行计算.

(2) 当给出几个向量之和为零向量的条件时, 常利用它们自身作数量积, 得到一个简单的方程, 从而求解所要求的数量积.

例 8.13 向量 p 垂直于向量 $a = (1, -2, 3)$ 和 $b = (2, 3, -1)$, 并满足 $p \cdot (2i - j + k) = 4$, 求 p .

解 解法一 由于向量 p 垂直于 a, b , 则 p 平行于 $a \times b$, 而

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -7i + 7j + 7k$$

因此设 $p = \lambda(-7, 7, 7) = 7\lambda(-1, 1, 1)$. 由于 $p \cdot (2i - j + k) = 4$, 所以 $-14\lambda = 4$, 得 $\lambda = -\frac{2}{7}$.

所以
$$p = (2, -2, -2)$$

解法二 设 $p = (x, y, z)$, 依题意有

$$p \cdot a = 0 \Rightarrow \text{即 } x - 2y + 3z = 0$$

$$p \cdot b = 0 \Rightarrow \text{即 } 2x + 3y - z = 0$$

$$p(2i - j + k) = 4 \Rightarrow \text{即 } 2x - y + z = 4$$

解得
$$x = 2, y = 2, z = -2$$

所以
$$p = (2, -2, -2)$$

注 我们常会遇到讨论两向量的平行、垂直、三向量的共面等问题. 设 a, b, c 均为非零向量, 则可用下列方法讨论.

1. 讨论两向量平行(或共线):

(1) 讨论两向量是否可表示为 $a = \lambda b$, 若满足 $a = \lambda b$, 则 $a \parallel b$;

(2) 讨论两向量对应坐标是否成比例, 若 $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, 则 $a \parallel b$;

(3) 检查两向量的向量积, 若 $a \times b = 0$, 则 $a \parallel b$.

以上三点反之也成立.

2. 讨论两向量垂直:

(1) 讨论两向量的数量积, 若 $a \cdot b = 0$, 即 $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$, 则 $a \perp b$;

(2) 讨论其中一向量与第三个向量的向量积, 若有 $a \times c = b$, 则 $a \perp b$ 且 $c \perp b$. 反之亦成立.

3. 讨论三向量共面(或四点共面):

(1) 讨论三向量的混合积, 若 $[abc] = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

则 a, b, c 共面, 反之亦然.

(2) 讨论其中一向量可由其余两向量线性表示, 若存在实数 λ, u , 使 $c = \lambda a + ub$, 则三向量 a, b, c 共面.

例 8.14 设向量 a, b, c 满足 $a \times b + b \times c + c \times a = 0$, 试证 a, b, c 共面.

证 由 $a \times b + b \times c + c \times a = 0$ 两边与 c 作数量积, 得

$$[abc] + [bcc] + [cac] = 0$$

但 $[bcc] = [cac] = 0$, 因而 $[abc] = 0$, a, b, c 共面.

例 8.15 试证: $A(1, 1, -1), B(-2, -2, 2), C(1, -1, 2)$ 及点 $D(0, 0, 0)$ 四点共面.

证 $\overrightarrow{DA} = (1, 1, -1), \overrightarrow{DB} = (-2, -2, -2), \overrightarrow{DC} = (1, -1, 2)$

$$(\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{DC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

故 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ 共面, 从而 A, B, C, D 四点共面.

例 8.16 设 $a = (1, -1, 1), b = (3, -4, 5), c = a + \lambda b$, 问 λ 为何值时, $|c|$ 最小? 并证明: 当 $|c|$ 最小时, $c \perp b$.

解 $|c|^2 = (a + \lambda b) \cdot (a + \lambda b) = |b|^2 \lambda^2 + 2(a \cdot b)\lambda + |a|^2 = 50\lambda^2 + 24\lambda + 3$

当 $\lambda = -\frac{6}{25}$ 时, $|c|$ 最小.

此时 $c \cdot b = (a + \lambda b) \cdot b = a \cdot b + \lambda |b|^2 = 0$

所以

$$c \perp b$$

例 8.17 设向量 a 与 b 不共线, 问 λ 为何值时, 向量 $p = \lambda a + 5b$ 与 $q = 3a - b$ 共线?

解 要使向量 p 与 q 共线, 则需找到实数 u , 使 $p = uq$, 即 $\lambda a + 5b = 3ua - ub$.

化简为 $(\lambda - 3u)a + (5 + u)b = 0$

因为 a 与 b 不共线, 所以

$$\lambda - 3u = 0, \quad 5 + u = 0$$

解得

$$u = -5, \quad \lambda = -15$$

例 8.18 设向量 $p = 2a + b, q = ma + b$, 其中 $|a| = 1, |b| = 2$, 且 $a \perp b$, 问:

(1) m 为何值时, $p \perp q$; (2) m 为何值时, 以 p 与 q 为邻边的平行四边形面积为 6.

解 (1) 令 $p \cdot q = (2a + b) \cdot (ma + b) = 2m|a|^2 + |b|^2 = 2m + 4 = 0$

得 $m = -2$ 时,

$$p \perp q$$

(2) 因为 $p \times q = (2a + b) \times (ma + b) = (2 - m)(a \times b)$

所以以 p 与 q 为邻边的平行四边形面积为

$$s = |p \times q| = |2 - m| |a \times b| = |2 - m| |a| |b| \sin(a, b) = 2|2 - m|$$

令 $2|2 - m| = 6$, 则得 $m = -1$ 或 5 .

注 利用向量的乘积运算可以解决一些几何上的求面积、求体积等问题.

例 8.19 已知空间三点 $A(1, 2, 3), B(2, -1, 5), C(3, 2, -5)$, 试求 (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高.

解 (1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\square ABDC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$, 如图 8.10 所示.

而

$$\overrightarrow{AB} = (1, -3, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (2, 0, 8)$$