21世纪高职高专规划教材——公共基础课系列

微积分基础及应用

尹江艳　主编

清华大学出版社

21世纪高职高专规划教材——公共基础课系列

微积分基础及应用

尹江艳　主编

清华大学出版社
北京

内容简介

全书共分为6章，内容包括预备知识(复数和函数)、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分和定积分及其应用。本书每章前有教学目标(包括知识目标、能力目标及本章重点)，每章都配有丰富的例题、习题及复习题，并尽可能地增加一些与专业相关的应用型题目，书后还附有参考答案及学习型任务单，目的是着重强化教师的"教"与学生的"学"的有机结合。本书在内容编排上力求做到深入浅出，通俗易懂，直观精练，注重技能，突出实用性、应用性和工具性的特点。

本书可作为高职高专院校各专业(特别是电类专业)高等数学课程的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分基础及应用/尹江艳主编．—北京：清华大学出版社，2011.8
(21世纪高职高专规划教材．公共基础课系列)
ISBN 978-7-302-25989-3

Ⅰ．①微… Ⅱ．①尹… Ⅲ．①微积分—高等职业教育—教材 Ⅳ．①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第126205号

责任编辑：朱怀永
责任校对：袁　芳
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京嘉实印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185×260　　印　张：8.75　　字　数：178千字
版　次：2011年8月第1版　　印　次：2011年8月第1次印刷
印　数：1～3000
定　价：19.00元

产品编号：042879-01

前　言

FOREWORD

随着高职高专教育教学改革的不断深入发展，高等职业院校的教材改革也势在必行。为了适应新的职业教育人才培养的要求，提升高等职业技术人才的综合职业能力和职业素养，力求学生在有限的时间里掌握必备的基础理论知识、具体运算方法以及解决实际问题的应用能力，本着公共基础课为专业课服务的原则，编者通过深入细致的调查研究以及总结多年来对高等数学的教学经验，编写了这本《微积分基础及应用》。

本教材以高职高专教育高等数学课程教学基本要求为依据，以“应用”为目的，“必需、够用”为度的原则，既考虑到人才培养的应用性，又使学生具有一定的可持续发展能力。

全书共分为6章。内容包括：第1章预备知识、第2章极限与连续、第3章导数与微分、第4章导数的应用、第5章不定积分、第6章定积分及其应用。本书每节后配有习题，每章后配有复习题，为了更好地体现教师的“教”与学生的“学”的有机融合，我们还特意在书后附有每节的学习型任务单，有利于帮助学生更好地掌握所学知识。建议学时数为58～66学时(教师可根据本校的实际特点及情况进行选择)。具体学时分配如下：

章　节	学时分配	机动
第1章　预备知识	6	
第2章　极限与连续	12	2
第3章　导数与微分	10	2
第4章　导数的应用	8	2
第5章　不定积分	10	
第6章　定积分及其应用	12	2
总学时	66学时	

本书由尹江艳老师担任主编，任路平、刘颖、徐莹、郭宝宇、李占林、宋雅丽老师担任副主编，参加编写的还有王丽丽、王莹、张丹、李靖、杨斌、初胜安等老师。

本教材是针对高职高专高等数学教学改革的大胆尝试，由于编者水平有限，书中有不妥之处，敬请广大读者和同行批评指正。

编　者

2011年4月

微积分——数学大树的树干

微积分(Calculus)是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支。微积分是建立在实数、函数和极限的基础上的,微积分最重要的思想就是利用“微元”与“无限逼近”,好像对于一个始终在变化的事物,常规方法不好研究,但通过微元分割成大量的一小块,每个一小块就可以视为常量处理,最终加起来就行。

微积分学是微分学和积分学的总称。它是一种数学思想,“无限细分”就是微分,“无限求和”就是积分。无限就是极限,极限的思想是微积分的基础,它是用一种运动的思想看待问题。比如,子弹飞出枪膛的瞬间速度就是微分的概念,子弹每个瞬间所飞行的路程之和就是积分的概念。如果将整个数学比做一棵大树,那么初等数学是树的根,名目繁多的数学分支是树枝,而树干的主要部分就是微积分。微积分堪称是人类智慧最伟大的成就之一。

极限和微积分的概念可以追溯到古代。17 世纪后半叶,牛顿和莱布尼茨分别独立地建立了微积分学。他们建立微积分的出发点是直观的无穷小量,理论基础是不牢固的。直到 19 世纪,柯西和维尔斯特拉斯建立了极限理论,康托尔等建立了严格的实数理论,这门学科才得以严密化。

微积分是与实际应用联系着而发展起来的,它在天文学、力学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学和社会科学及应用科学等多个分支中,有越来越广泛的应用。特别是计算机的发明更有助于这些应用的不断发展。

微分和积分的思想早在古代就已经产生了。公元前 3 世纪,古希腊的阿基米德在研究解决抛物弓形的面积、球和球冠面积、螺线下面积和旋转双曲体的体积的问题中,就隐含着近代积分学的思想。作为微分学基础的极限理论来说,早在古代已有比较清楚的论述。比如我国的庄周所著的《庄子》一书的“天下篇”中,记有“一尺之棰,日取其半,万世不竭”。三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细,所失弥小,割之又割,以至于不可割,则与圆周和体而无所失矣。”这些都是朴素的、也是很典型的极限概念。

到了 17 世纪,有许多科学问题需要解决,这些问题也就成了促使微积分产生的因素。归结起来,大约有四种主要类型的问题:第一类问题是研究运动的时候直接出现的,也就是求即时速度的问题;第二类问题是求曲线的切线问题;第三类问题是求函数的最大值和最小值问题;第四类问题是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的力。

17 世纪许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述几类问题做了大量的研究工作,如法国的费尔玛、笛卡儿、罗伯瓦、笛沙格;英国的巴罗、瓦里士;德国的开普勒;

意大利的卡瓦列利等人都提出许多很有建树的理论，为微积分的创立作出了贡献。

17 世纪下半叶，在前人工作的基础上，英国大科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作，虽然这只是十分初步的工作。他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起，一个是切线问题（微分学的中心问题），一个是求积问题（积分学的中心问题）。

牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量，因此这门学科早期也称为无穷小分析，这正是现在数学中分析学这一大分支名称的来源。牛顿研究微积分侧重于从运动学来考虑，莱布尼茨却是侧重于从几何学来考虑。

牛顿在 1671 年撰写了《流数法和无穷级数》，这本书直到 1736 年才出版。他在这本书里指出，变量是由点、线、面的连续运动产生的，否定了以前自己认为的变量是无穷小元素的静止集合。他把连续变量叫做流动量，把这些流动量的导数叫做流数。牛顿在流数术中所提出的中心问题是：已知连续运动的路径，求给定时刻的速度（微分法）；已知运动的速度求给定时间内经过的路程（积分法）。

德国的莱布尼茨是一个博才多学的学者，1684 年，他发表了现在世界上认为是最早的微积分文献，这篇文章有一个很长而且很古怪的名字《一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》。就是这样一篇说理也颇含糊的文章，却有着划时代的意义，文章中已含有现代的微分符号和基本微分法则。1686 年，莱布尼茨发表了第一篇积分学的文献。他是历史上最伟大的符号学者之一，他所创设的微积分符号远远优于牛顿的符号，这对微积分的发展有极大的影响。现在我们使用的微积分通用符号就是当时莱布尼茨精心选用的。

微积分学的创立，极大地推动了数学的发展，过去很多初等数学束手无策的问题，运用微积分，往往迎刃而解，显示出微积分学的非凡威力。历史的事实是，牛顿和莱布尼茨总结了前人的工作，各自独立完成了这项空前的盛业。牛顿约早 10 年开始，而莱布尼茨约早 3 年公布。但由于狭隘的民主偏见，竟引起了绵延一百多年的所谓发明优先权的争端。结果使英国的微积分发展推迟了若干年。直到 19 世纪初，法国科学学院的科学家以柯西为首，对微积分的理论进行了认真研究，建立了极限理论，后来又经过德国数学家维尔斯特拉斯进一步的严格化，使极限理论成为微积分的坚定基础，才使微积分进一步地发展起来。

微积分的历史，17 世纪是始创，18 世纪是充实和发扬，19 世纪则是回顾、推广和改革，并以崭新的姿态进入下一个世纪。

目 录
CONTENTS

第 1 章
预备知识

高等数学是高职高专各专业必修的一门重要基础课,其核心内容是微积分。为了更好地服务专业,做好初等数学与高等数学的衔接,本章将进一步巩固和深化一些重要的初等数学知识。

本章主要介绍复数的有关知识,并在已有初等函数知识的基础上,进一步深化三角函数、复合函数的相关知识。

教学目标

【知识目标】

1. 了解复数的概念及复数的表示形式,了解复数系的构成。
2. 加深理解函数的概念,理解复合函数。
3. 了解 5 种基本初等函数,了解电类专业常用的一些函数。

【能力目标】

1. 能熟练进行复数的代数形式的四则运算,进行三角形式、指数形式和极坐标形式的乘除运算。
2. 能求实系数一元二次方程的复数解。
3. 能熟练求解函数的定义域和函数值。
4. 会画分段函数的图像和正弦型曲线,能根据图像分析函数特性。
5. 能准确掌握复合函数的分解过程,能建立一些简单的函数模型。

【本章重点】

1. 复数的概念及运算。
2. 函数的概念与性质(尤其是分段函数及正弦型函数)。
3. 复合函数的概念及分解过程。
4. 函数模型的应用。

1-1 复　　数

一、复数的有关概念

对于代数方程 $x^2=-1$,引入一个新数 i,规定:$\mathrm{i}^2=-1$,并且 i 与实数可以按实数的四则运算法则进行运算,这个新数 i 称为**虚数单位**。

i 与实数 b 相乘得到形式为 $b\mathrm{i}$ 的数，若 $b\neq 0$，则称 $b\mathrm{i}$ 为**纯虚数**；若 $b=0$，则规定 $0\cdot\mathrm{i}=0$。

如果 a,b 都是实数，那么形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数称为**复数**；a 称为复数的**实部**，b 称为复数的**虚部**。$a+b\mathrm{i}$ 形式称为复数的代数形式。

通常把复数构成的集合 $\{z\mid z=a+b\mathrm{i},a\in R,b\in R\}$ 记为 C，即

$$C=\{z\mid z=a+b\mathrm{i},a\in R,b\in R\}$$

显然，实数集 R 是复数集 C 的真子集，即 $R\subset C$。

如果两个复数，实部相等，虚部互为相反数，则称两个复数互为**共轭复数**。如复数 $z=a+b\mathrm{i}$，它的共轭复数记作 $\bar{z}$，即 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$。

如果两个复数 $a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 相等，则两个复数的实部相等、虚部相等，即

$$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow a=c,\quad b=d$$

应注意，两个复数如果不全是实数，它们之间就不能比较大小。

二、复数的几何表示法

若规定，直角坐标平面内的横轴 x 为实轴（单位是 1），纵轴 y（不包含原点）为虚轴（单位是 i），则复数 $a+b\mathrm{i}$ 就可用这样的坐标平面上的点 $M(a,b)$ 来表示，如图 1-1 所示，因为复数 $a+b\mathrm{i}$ 与点 $M(a,b)$ 是一一对应的。又因为点 $M(a,b)$ 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 也是一一对应关系，所以复数 $a+b\mathrm{i}$ 也可用向量 $\overrightarrow{OM}$ 来表示。

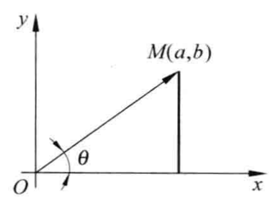

图 1-1

以后把表示复数的平面称为**复平面**。复平面内向量的模（即长度）称为复数的**模**或绝对值，即 $r=|\overrightarrow{OM}|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$，向量 $\overrightarrow{OM}$ 的正方向与 x 轴的正方向的夹角 θ 称为复数的**辐角**。若 θ 是复数 z 的一个辐角，则 $\theta+2k\pi(k\in z)$ 都是复数 z 的辐角，我们把满足 $0\leqslant\theta<2\pi$（或 $0^\circ\leqslant\theta<360^\circ$）的辐角 θ 的值称为辐角的主值。

$$\tan\theta=\frac{b}{a}\quad(a\neq 0)$$

注意：求辐角 θ 的主值应结合点 $M(a,b)$ 所在象限，但复数零的辐角是不确定的。

三、复数的其他表示形式

如图 1-1 所示，由三角函数的定义知道 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，所以

$$a+b\mathrm{i}=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

称 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 形式为复数的**三角形式**，$re^{\mathrm{i}\theta}$ 形式为复数的**指数形式**，$r\angle\theta$ 形式为复数的**极坐标形式**。对于指数形式，辐角 θ 的单位只能采用弧度制。可见，模和辐角也能唯一确定一个复数。

复数的任意两种形式之间都能相互转化，即

$$z=a+b\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=re^{\mathrm{i}\theta}=r\angle\theta$$

【例 1-1】 在复平面内作出下列复数的点和向量，求出它们的模和辐角主值，并写出它们的其他三种形式。

(1) $1-\mathrm{i}$　　(2) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$

解：(1) $1-\mathrm{i}$ 的点和向量如图 1-2 所示，$r=|1-\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，$\tan\theta=\dfrac{-1}{1}=-1$，$\theta$ 在第四象限，所以辐角主值 $\theta=\dfrac{7\pi}{4}$，则

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}=\sqrt{2}\angle\frac{7\pi}{4}$$

(2) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的点和向量如图 1-3 所示，$r=|-1+\sqrt{3}\mathrm{i}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$，$\theta$ 在第二象限，所以辐角主值 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，则

$$-1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=2\angle\frac{2\pi}{3}$$

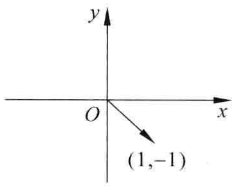

图　1-2

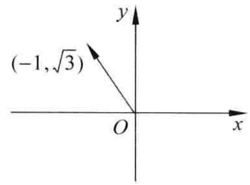

图　1-3

四、复数的运算

1. 复数代数形式的四则运算

设复数 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$。

(1) 复数的加减运算

$$z_1\pm z_2=(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}$$

(2) 复数的乘法运算

$$z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$$

(3) 复数的除法运算

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$$

【例 1-2】　计算 $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^8$。

解：$\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^8=\left[\dfrac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\right]^8=\left(\dfrac{2\mathrm{i}}{2}\right)^8=(\mathrm{i}^2)^4=1$

2. 复数三角形式、指数形式和极坐标形式的乘除运算

设复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$。

(1) 复数的乘法运算

三角形式表示

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1\cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)]\\&=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

指数形式表示

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

极坐标形式表示

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\angle\theta_1 \cdot r_2\angle\theta_2 = r_1 \cdot r_2\angle(\theta_1+\theta_2)$$

(2) 复数的除法运算

三角形式表示

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

指数形式表示

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

极坐标形式表示

$$\frac{z_1}{z_2} = r_1\angle\theta_1 \div r_2\angle\theta_2 = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1-\theta_2)$$

【例 1-3】 计算$(\sqrt{3}+i)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$。

解:因为$|\sqrt{3}+i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$,$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\theta$在第一象限,所以辐角$\theta=\frac{\pi}{6}$,即

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$原式= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)= 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$= 6\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)= 3\sqrt{2}(1+i)$$

【例 1-4】 计算$\dfrac{2\sqrt{3}\angle\frac{5\pi}{6}}{2\angle\frac{3\pi}{4}\times 2\angle\frac{7\pi}{12}}$。

解:$$原式=\frac{2\sqrt{3}\angle\frac{5\pi}{6}}{2\times 2\angle\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{12}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}\angle\left[\frac{5\pi}{6}-\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{12}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\angle\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

五、复数在电学中的应用

复数是研究交流电路的重要工具,电压、电流等参量都可用复平面内的向量表示。

设复数 $z=re^{j(\omega t+\varphi)}$,则 $z=r\cos(\omega t+\varphi)+jr\sin(\omega t+\varphi)$。

显然复数的虚部是正弦型函数,也就是说一个正弦量可以用复数的虚部部分来表示。例如,电流 $i=I_m\sin(\omega t+\varphi)$可表示为复数

$$I = I_m\cos(\omega t+\varphi) + jI_m(\sin\omega t+\varphi)$$

的虚部，电压 $u=U_m\sin(\omega t+\varphi)$ 可表示为复数 $U=U_m\cos(\omega t+\varphi)+jU_m(\sin\omega t+\varphi)$ 的虚部。

而 $I_m(\cos\varphi+j\sin\varphi)$ 是包含了电流的幅值 I_m 和初相位 φ 的复数，在电学上将这个复数叫做电流的相量，正弦电流的相量记为 $\dot{I}$，即

$$\dot{I}=I_m(\cos\varphi+j\sin\varphi)=I_m e^{j\varphi}$$

同样，正弦电压 $u=U_m\sin(\omega t+\varphi)$ 的相量记为 $\dot{U}$，即 $\dot{U}=U_m e^{j\varphi}$。

相量表示法是把繁琐的三角运算用简单的几何关系来代替。由于采用相量法运算时必须首先作出相量图，因此若用复数表示相量，可用复数的代数运算代替相量的几何关系，从而进一步简化了正弦量的合成。在复杂交流电的计算中，都采用复数计算。

【例 1-5】 已知两个正弦交流电的电流分别是 $i_1=\sqrt{3}\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$，$i_2=\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{6}\right)$，求 $i=i_1+i_2$ 的表达式。

解： i_1，i_2 的相量分别是 $\dot{I}_1=\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{3}}$，$\dot{I}_2=e^{-j\frac{\pi}{6}}$。

$i=i_1+i_2$ 的相量为 $\dot{I}$，则

$$\begin{aligned}\dot{I}&=\dot{I}_1+\dot{I}_2=\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{3}}+e^{-j\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+j\sin\frac{\pi}{3}\right)+\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+j\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\\&=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}+j\left(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=\sqrt{3}+j=2e^{j\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

故

$$i=i_1+i_2=2\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$$

习题 1-1

1. 实数 m 取何值时，复数 $(m^2-3m+2)+(m^2-5m-6)i$ 是实数？是纯虚数？还是虚数？

2. 在复平面内作出下列复数的点和向量，求出它们的模和辐角主值，并写出它们的其他三种形式。

(1) $-2+2i$　　　(2) $-1-\sqrt{3}i$

3. 计算下列各式的值，并把结果化为代数形式。

(1) $[2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)]^5$　　　(2) $(\sqrt{3}-i)^9$

(3) $4e^{i\frac{4\pi}{3}}\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$　　　(4) $\dfrac{-4i}{2\angle 120^\circ}$

(5) $\dfrac{2\sqrt{3}\angle 45^\circ}{\sqrt{3}\angle(-15^\circ)}$　　　(6) $\dfrac{4\sqrt{3}\angle\frac{5\pi}{6}}{\sqrt{3}\angle\frac{3\pi}{4}\times 2\angle\frac{7\pi}{12}}$

4. 在复数范围内解方程 $x^2-2x+10=0$。

5. 已知 $u_1=\sqrt{2}\sin(\omega t+60°)$，$u_2=\sin(\omega t-45°)$，求：

(1) 相量 $\dot{U}_1$，$\dot{U}_2$　　(2) u_1+u_2

1-2 函　　数

一、函数概念

引例 1 【汽车租赁】一汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为每天的基本租金 140 元加每公里收费 2 元，租用一辆该种汽车一天，行车 x 公里的租车费为

$$y=140+2x(\text{元})$$

其中，x 的取值范围是数集 $D=\{x|x\geqslant 0\}$，对于每一个 $x\in D$，按照此对应关系，都有唯一确定的 y 与之相对应。

定义 1 设 x，y 是两个变量，D 是给定的一个数集，若对于 D 中的每一个 x 值，根据某一对应关系 f，变量 y 都有唯一确定的数值与它相对应，那么，我们就称变量 y 是变量 x 在数集 D 上的函数，记作

$$y=f(x)\quad x\in D$$

式中，x 称为自变量，y 称为因变量，自变量 x 的变化范围 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域。

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$。当自变量 x 取遍 D 中的一切数值时，与它相对应的所有 y 值的集合 M 称为函数 $y=f(x)$ 的值域。

从函数的定义可知，函数的定义域和对应关系称为**函数的两个要素**。

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定。如果讨论的是纯数学问题，则往往取使函数表达式有意义的所有实数的集合作为该函数的定义域。

【例 1-6】 求 $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域。

解：要使函数有意义，应满足 $\begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$，所以函数的定义域为 $(-2,2)\cup(2,+\infty)$。

函数 y 与自变量 x 的对应规律，大多可用一个解析式表示。但有时会遇到一个函数在自变量的不同取值范围内用不同的解析式表示，这种函数被称为分段函数。

引例 2 【个人所得税】我国于 1993 年 10 月 3 日颁布的《中华人民共和国个人所得税法》中规定国家征收个人所得税是分段计算的：月收入超过 800 元应纳税所得额（即个人所得税的起征点），随着人民生活水平的提高，从 2006 年 1 月 1 日起，个人所得税的起征点由 800 元上调为 1600 元，从 2008 年 3 月 1 日起，个人所得税的起征点又由 1600 元改为 2000 元，税率见表 1-1。

如某单位的所有人月收入都不超过 7000 元，按 2008 年 3 月 1 日颁布的《中华人民共和国个人所得税法》建立该单位员工月收入与纳税金额的函数关系式。

表 1-1　个人所得税税率

级　数	全月应纳税所得额	税率/%
1	不超过 500 元的部分	5
2	超过 500 元至 2000 元部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元部分	15
4	超过 5000 元至 20 000 元部分	20
⋮	⋮	⋮
9	超过 100 000 元部分	45

解：设某人月收入为 x 元，应缴纳所得税为 y 元，月收入与纳税金额的函数关系式为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2000\\ 0.05(x-2000), & 2000<x\leqslant 2500\\ 0.1(x-2500)+500\times 0.05, & 2500<x\leqslant 4000\\ 0.15(x-4000)+1500\times 0.1+500\times 0.05, & 4000<x\leqslant 7000\end{cases}$$

二、基本初等函数

6 种基本初等函数见表 1-2。

表 1-2　基本初等函数表

函　　数	解析表达式
常函数	$y=C$（C 为常数）
幂函数	$y=x^a$（a 为常数）
指数函数	$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，a 为常数）
对数函数	$y=\log_a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，a 为常数）
三角函数	$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$
反三角函数	$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$

三、复合函数、初等函数

1. 复合函数

定义 2　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分包含在函数 $f(u)$ 的定义域内，则由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的函数称为函数 y 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 x 是自变量，u 是中间变量。

【例 1-7】　设 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=x^2+1$，求 $f[\varphi(x)]$。

解：$f[\varphi(x)]=\sqrt{u}=\sqrt{x^2+1}$

【例 1-8】 求下列函数的复合过程。

(1) $y=\arcsin(\ln x)$　　(2) $y=\sqrt[3]{\arctan\cos 2^{2x}}$

解：(1) 函数 $y=\arcsin(\ln x)$是由 $y=\arcsin u, u=\ln x$ 复合而成。

(2) 函数 $y=\sqrt[3]{\arctan\cos 2^{2x}}$是由 $y=\sqrt[3]{u}, u=\arctan v, v=\cos w, w=2^m, m=2x$ 复合而成。

注意：

(1) 复合函数可以由两个或两个以上的函数复合而成。

(2) 不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数。例如，$y=\arcsin u, u=x^2+2$ 就不能复合成一个函数，为什么？思考一下。

2. 初等函数

定义 3 由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成，并能用一个数学式子表示的函数称为初等函数。

例如，函数 $y=1+\sqrt{x}, y=x\ln x, y=e^{\sin 3x}$等都是初等函数。

注意：分段函数不一定是初等函数。例如，分段函数 $y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ 1+x, & x<0\end{cases}$就不是初等函数，而分段函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$却是初等函数，为什么？请思考。

四、三角函数在电学中的应用举例

在电类专业的课程中常会用正弦型函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$来描述交流电流或交流电压。在电学中最简单的是简谐交流电，其电流的大小和方向随时间而变化，满足

$$i=I_m\sin(\omega t+\varphi)\quad (I_m>0, \omega>0, -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi)$$

的函数关系，其中 I_m 是电流强度的最大值，称为振幅（或幅值）；ω 称为角频率，表示电流变化的快慢（单位是“弧度/秒”）；$T=\frac{2\pi}{\omega}$称为交流电的变化周期，表示交流电完成一次周期性变化所需要的时间（单位是“秒”）；单位时间内交流电完成周期性变化的次数称为频率，用 $f\left(f=\frac{1}{T}\right)$表示（单位是“赫［兹］”，记作 Hz）；$\varphi$ 称为初相位，$\omega t+\varphi$ 称为相位。

幅值、频率和初相位是简谐交流电的三个要素，它们从 3 个不同侧面描述了交流电的物理特征。

【例 1-9】 已知正弦电流 $i=10\sin\left(100t+\frac{\pi}{3}\right)$，求它的幅值、周期、频率、初相位及角频率。

解：幅值　$I_m=10$

周期　$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{100}=\frac{\pi}{50}$