走向新世纪中学生文库

初中数学奥林匹克题库

北京数学奥林匹克学校

阮国杰　黄海波　编著

CHU ZHONG SHU XUE AO LIN PI KE TI KU

走向新世纪中

主编　蓝　天

初中数学奥林匹克题库

北京数学奥林匹克学校教练

阮国杰　黄海波　编著

华夏出版社

1994年·北京

（京）新登字 045 号

初中数学奥林匹克题库

北京数学奥林匹克学校教练

阮国杰　黄海波　编著

华 夏 出 版 社 出 版 发 行

（北京东直门外香河园北里 4 号）

新 华 书 店 经 销

机械工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本 16.25 印张 374 千字

1994 年 7 月北京第 1 版 1994 年 7 月北京第 1 次印刷

印数 1－12000 册

ISBN 7－5080－0410－8/G・441

定价：10.00 元

前　言

随着初中数学竞赛活动广泛深入地开展，越来越多的教师和学生感到，需要一本集中外初中数学竞赛题精华于一册的书。为了帮助初中学生更坚实地打好数学基础，发展数学思维，提高分析问题和解决问题的能力，并为广大师生开展数学课外活动和参加各种类型的数学竞赛提供方便，由北京数学奥林匹克学校教练编写了《初中数学奥林匹克题库》一书。

全书 1500 多道题是对大量优秀竞赛题目分门别类，精选出来的。本书所选择的数与式、方程与方程组、不等式、应用题、指数与对数、函数、三角函数、三角形与四边形、面积、相似形、圆等章节不仅与现行教材基本同步，而且比课内知识更具灵活性和综合性，经常演练这些题目，对于拓宽解题思路，提高解题能力大有益处。

题库由于受篇幅所限，对不同类型，不同风格的题目重在精选，具有触类旁通，举一反三的作用。

题库中所有题目均给出了答案或提示，对一些较难的题目给出了解答。解答既注重运用基础知识与基本方法来解，更注重灵活运用知识和使用特殊方法来解。

在本书成书的过程中得到刘未、刘雪芬两位同志的大力支持；数学奥林匹克学校学生孙迪、刘铎、陈驰、李笑、阚卓威等同学为本书提供了大量的题目；在此一并表示感谢。

本书如有错误之处，敬请读者提出宝贵意见。

目　录

一　数与式

1. 计算$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})\cdots(1+\frac{1}{3^{2^{10}}})$。

2. 计算

$$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}。$$

3. 计算 $7^{-\frac{2}{\log_6 7}}$。

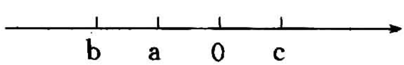
4. 计算 $\lg^3 2+\lg^3 5+3\lg 2\lg 5$。

5. 计算 $\lg tg1°+\lg tg2°+\cdots+\lg tg89°$。

6. 计算 $\cos^2 1°+\cos^2 2°+\cos^2 3°+\cdots+\cos^2 89°$。

7. 计算$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n\text{个}1}-\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}2}}$

8. 已知 a、b、c 在数轴上的位置如下：



代数式 $\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}+|b+c|$的值等于(　)。

(A)$2c-a$　　(B)$2a-2b$　　(C)$-a$　　(D)a

9. 设 $f(x)=ax^7+bx^3+cx-5$，其中 a. b. c 为常数，已知 $f(-7)=7$，则 $f(7)$等于(　)。

(A)-17　(B)-7　(C)14　(D)21

(E)不能唯一确定

10. 若 a、b、c 均为实数，且使$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，那么(　)。

(A)a、b、c 必定同号。

(B)a、b、c 中必有两个相等。

(C)a、b、c 中必有两个互为相反数。

(D)以上结论都不对。

11. 当多项式 x^3-2 除以多项式 x^2-2 时，其余项为：

(A)2　(B)-2　(C)$-2X-2$　(D)$2x+2$　(E)$2x-2$

12. 已知实数 a、b、c 满足 $a+b+c=0$，$abc=8$，那么$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的值是(　)。

(A)正数　(B)零　(C)负数　(D)正、负不能确定

13. 计算

$$\left.1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cdots\cdots \atop 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}}}\right\}\text{共 1991 层}$$

14. 使代数式$\frac{|x-|x||}{x}$的值为正整数的数 x 是(　)。

(A)正数　(B)负数　(C)非零的数　(D)不存在

15. a、b、c 中至少有两个互为相反数，可表示为(　)。

(A)$a+b+c=0$　(B)$a^2=b^2=c^2$

(C)$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=0$

(D) $(a+b)(b+c)(c+a)=0$

16. 已知 a、b 互为相反数，c、d 互为倒数，m 的绝对值等于 2，p 是数轴上原点表示的数，那么 $p^{2000}-cd+\frac{a+b}{abcd}+m^2$ 的值为(　)。

(A)2　(B)3　(C)4　(D)不确定

17. 在式子 a^2+b^2，a^2-b^2，$-a^2-b^2$，$(a-b)^2$，a^2+1，a^3+1，$-a^2-1$，a^3-b，a^4+b^6 中，$a\neq b$，如果用非零的任意有理数代替式子中的字母，其结果既能得到正值，也能得到负值的共有(　)个。

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

18. 如果 $a<b$，那么 $\sqrt{-(x+a)^3(x+b)}$ 等于(　)。

(A) $(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$

(B) $(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$

(C) $-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$

(D) $-(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$

19. 如果 $x^2-3x+9=0$，那么 x^3 的值是(　)。

(A) -27　(B) 27　(C) ± 27　(D) ± 1

20. 在实数范围内，设

$$x=\left(\frac{\sqrt{(a-2)(|a|-1)}+\sqrt{(a-2)(1-|a|)}}{1+\frac{1}{1-a}}+\frac{5a+1}{1-a}\right)^{1988}$$

则 x 的个位数字是(　)。

(A)1　(B)2　(C)4　(D)6

21. 要使不等式 $\cdots\cdots a^7<a^5<a^3<a<a^2<a^4<a^6<\cdots\cdots$ 成立，有理数 a 的数值范围是(　)。

(A) $0<a<1$　(B) $a>1$　(C) $-1<a<0$　(D) $a<-1$

22. 把 x^5，$x+\frac{1}{x}$，$1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$ 相乘，其积是一个多项式，该多

项式的次数是(　)。

(A)2　(B)3　(C)6　(D)7　(E)8

23. 不相等的有理数 a,b,c 在数轴上的对应点分别为 A、B、C,如果 $|a-b|+|b-c|=|a-c|$,那么 B 点(　)。

(A)在 A、C 点的右边

(B)在 A、C 点的左边

(C)在 A、C 点之间

(D)以上三种位置都有可能

24. 若 $xy=a,xz=b,yz=c$,且这些量均不为零,则 $x^2+y^2+z^2$ 等于(　)。

(A)$\frac{ab+ac+bc}{abc}$　(B)$\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

(C)$\frac{(a+b+c)^2}{abc}$　(D)$\frac{(ab+bc+ac)^2}{abc}$

(E)$\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$

25. 已知 a、b、c 都不等于零,且 $x=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$,根据 a、b、c 的不同取值,x 有(　)。

(A)唯一确定的值　(B)3 种不同的值　(C)4 种不同的值

(D)8 种不同的值

26. 若 $x=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$,则 x 的值一定是(　)。

(A)$\frac{1}{2}$　(B)-1　(C)$\frac{1}{2}$或-1　(D)$\frac{3}{2}$

27. 已知被除式是关于 x 的四次多项式,其中不含 x^3 项和 x 项,除式是 $2x^2-3x-1$,商式是 ax^2+bx+1,余式不含 x 项,那么系数 a、b 的值是(　)。

(A)$a=2,b=3$　(B)$a=2,b=-2$

(C)$a=-2,b=3$　　(D)$a=-2,b=-3$

28. 当 $a<b<c,x<y<z$,下列四个代数式

甲:$ax+by+cz$　　乙:$ax+cy+bz$　　丙:$bx+ay+cz$

丁:$bx+cy+az$ 中间,值最大的一个是(　)。

(A)必定是甲　(B)必定是乙　(C)必定是丙

(D)必定是丁

29. x 的三进制表达式是 12112211122211112222,那么 x 的九进制表达式中,左边的第一个数字是(　)。

(A)5　(B)4　(C)3　(D)2

30. x、y 为两个正数,$x:y=a:b$,其中 $0<a<b$。如果 $x+y=c$,则 x 与 y 中较小的一个为(　)。

(A)$\frac{ac}{b}$　(B)$\frac{bc-ac}{b}$　(C)$\frac{ac}{a+b}$　(D)$\frac{bc}{a+b}$

(E)$\frac{ac}{b-a}$

31. 从和式$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$中,必须除去哪些项,使得余下的项的和等于 1。(　)

(A)$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{8}$　(B)$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{12}$　(C)$\frac{1}{8}$和$\frac{1}{12}$　(D)$\frac{1}{6}$和$\frac{1}{10}$

(E)$\frac{1}{8}$和$\frac{1}{10}$

32. $x^2y-y^2z+zx^2-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$ 因式分解后的结果是(　)。

(A)$(y-z)(x+y)(x-z)$

(B)$(y-z)(x-y)(x+z)$

(C)$(y+z)(x-y)(x+z)$

(D)$(y+z)(x+y)(x-z)$

33. 把式子 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$根号外的字母移入根号内,则原式等于

( )。

(A) $\sqrt{-a}$ (B) $\sqrt{a}$ (C) $-\sqrt{-a}$ (D) $-\sqrt{a}$

34. 某工厂去年的生产总值比前年增加了 p%，则前年的生产总值比去年减少百分之( )。

(A) p (B) $\frac{100}{p}$ (C) $100-p$ (D) $\frac{100P}{100+p}$

35. 三个质数 p、q 和 r，满足 $p+q=r$ 以及 $1<p<q$，则 p 等于( )。

(A) 2 (B) 3 (C) 7 (D) 13 (E) 17

36. $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 等于( )。

(A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (B) $4-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-5$

(D) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3})$

(E) $\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})$

37. 乘积 $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{9^2})(1-\frac{1}{10^2})$ 等于( )。

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{11}{20}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{7}{10}$

38. 若 $S=(1+2^{-\frac{1}{32}})(1+2^{-\frac{1}{16}})(1+2^{-\frac{1}{8}})(1+2^{-\frac{1}{4}})(1+2^{-\frac{1}{2}})$，则 S 等于( )。

(A) $\frac{1}{2}(1+2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$ (B) $(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$

(C) $1-2^{-\frac{1}{32}}$ (D) $\frac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$

39. $5-\sqrt{3}$ 的整数部分为 x，小数部分为 y，则 $2x^3-(y^3+\frac{1}{y^3})$ 的值为( )。

(A)2　　(B)-2　　(C)$2+\sqrt{3}$　　(D)$2+3\sqrt{3}$

40. 求满足$\sqrt{\frac{21}{4}+3\sqrt{3}}=x+\sqrt{y}$的有序有理数对$(x,y)$。

41. 设$p(x)=x^2+bx+c$，b 和 c 是整数，若 $p(x)$既是 x^4+6x^2+25 的因子，也是 $3x^4+4x^2+28x+5$ 的一个因式，那么$p(1)$的值是(　)。

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)4

42. 已知 $x^2+4y^2+9z^2=x^3+2y^3+3z^3=x^4+y^4+z^4$，则$(2x-1)^2+(2y-2)^2+(2z-3)^2$ 等于________。

43. 已知 a、b、c 为非零实数，且 $a^2+b^2+c^2=1$，$a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})+3=0$，则 $a+b+c$ 的值为________。

44. 设 $a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$，则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值为____。

45. 若 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$，则分式$\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$等于________。

46. 设 $x=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，$y=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$(n 为自然数)，则当 $n=$________时，代数式 $9x^2+123xy+19y^2$ 的值为 1985。

47. 若$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，则$\frac{2x+3xy-2y}{x-y-2xy}$的值为________。

48. 如果 $x<0$，$y<0$ 且 $3x-2y=\sqrt{xy}$，求$\frac{y}{x}$的值。

49. 已知 $x=\sqrt[3]{2(\sqrt{3}+1)}-\sqrt[3]{2(\sqrt{3}-1)}$，试求 x^3+6x 的值。

50. 分解因式 $2a^2-5ab-3b^2+a+11b-6$。

51. 在实数范围内把下面多项式分解因式：

$(x^2-1)(x+3)(x+5)-20=$__________。

52. 分解因式：$x^4+1987x^2+1986x+1987=$__________。

53. 分解因式：$x^3+x^2y-xy^2-xz^2+yz^3-y^3=$__________。

54. 分解因式：$(1-a^2)(1-b^2)-4ab$。

55. 分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-120$

56. 分解因式：a^4+a^3+a+1。

57. 分解因式：$2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+1)(x^2+6x+1)+2(x^2+1)^2$

58. 已知$|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$，且$u=|x+y|+|y+1|+|2y-x-4|$，则u的最大值与最小值之和为____。

59. 已知$x(x\neq 0,\pm 1)$和1两个数，如果只允许用加法、减法、1作被除数的除法三种运算(可以使用括号)，经过六步算出x^2，那么计算的表达式是__________。

60. 设a、b、c、d都是正整数，且$a^5=b^4$，$c^3=d^2$，$c-a=19$，则$d-b$等于__________。

61. 设100个实数$a_1,a_2\cdots\cdots a_n,\cdots\cdots a_{100}$，满足$(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}+1=0(2\leqslant n\leqslant 100)$，并且已知$a_{100}=199$，则$a_1+a_2+\cdots a_{100}=$__________。

62. 若$x-by=y-ax=bx+ay=1$，且$ab\neq 1$，则$a^2+b^2+ab+a+b=$________。

63. 如果$x+\frac{1}{x}=3$，则$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=$________。

64. 已知$y_1=2x$，$y_2=\frac{2}{y_1}$，$y_3=\frac{2}{y_2}$，……，$y_{1986}=\frac{2}{y_{1985}}$则$y_1\cdot y_{1986}=$________。

65. 已知$x+\frac{1}{x}=a$，则$x^6+\frac{1}{x^6}=$________。

66. 若$(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则$a_0-$

$a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=$ ________。

67. 若 $a+b+c=0$，且 $\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}=0$，求 $\frac{bc+b-c}{b^2c^2}+\frac{ca+c-a}{c^2a^2}+\frac{ab+a-b}{a^2b^2}$ 的值。

68. 设 $y=|x-1|+|x-3|+\sqrt{4x^2+4x+1}$，试求使 y 值恒等于常数时，x 的取值范围。

69. 已知 $a+b+c=0$，试求 $\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}$ 的值。

70. 已知 $x=\sqrt[3]{2(\sqrt{3}+1)}-\sqrt[3]{2(\sqrt{3}-1)}$，试求 x^3+6x 的值。

71. 若 x、y 为实数，且 $y=\sqrt{\frac{2x+1}{4x-3}}+\sqrt{\frac{2x+1}{3-4x}}+1$，求 $x+xy+x^2y$ 的值。

72. 已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=a$，求 $\frac{x^2+1}{x}$ 的值。

73. 设 $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，求 $\frac{x^3+x+1}{x^5}$ 的值。

74. 有一无穷小数 $A=0.a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1}a_{n+2}\cdots$，其中 $a_k(k=1,2,\cdots)$ 是 $0,1,2,\cdots 9$ 中的一个数，且 a_1 为奇数，a_2 为偶数，a_3 等于 a_1+a_2 的个位数，a_4 等于 a_2+a_3 的个位数…，a_{n+2} 等于 a_n+a_{n+1} 的个位数，证明：A 是一个有理数。

75. 对自然数 n 作 x 的二次方程 $x^2+(2n+1)x+n^2=0$，设它的两根为 α_n 和 β_n，求下式的值：

$$\frac{1}{(\alpha_3+1)(\beta_3+1)}+\frac{1}{(\alpha_4+1)(\beta_4+1)}+\frac{1}{(\alpha_{20}+1)(\beta_{20}+1)}。$$

76. 假设 $x_1=97$，当 $n>1$ 时，$x_n=\frac{n}{x_{n-1}}$，计算乘积 $x_2\cdots\cdots x_8$。

77. 试求下面表达式的最大值：$|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots|-$

$x_{2002}|$，其中 $x_1,x_2\cdots x_{2002}$是由 1 到 2002 的不同自然数。

78. 若变数 t 可取一切实数值，且 $x=2^t+2^{-t}$，$y=4^t+4^{-t}-2a(2^t+2^{-t})$（a 是常数）。

(1)求 y 的最小值；

(2)当 y＝0 时，求 x 的值。

79. 已知 $x^2-xy+y^2=2$，其中 x、y 是实数，试求式子 x^2+xy+y^2 的取值范围。

80. 已知 $M=4x^2-12xy+10y^2+4y+9$，当式中的 x、y 各取何值时，M 的值最小？并求此最小值。

81. 已知 m，n 是自然数，且 $n\leqslant100$，在将分数$\frac{m}{n}$化成十进制小数时，一个学生得到小数点后某连续三位数字为 1，6，7。求证：他的计算有错误。

82. 试求一个三次多项式 y(x)，使它满足 $y(0)=y(1)=0$，$y(2)=1$，$y(3)=5$。

答案与题示

1. 利用 $1=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3})$。答案为$\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2048}})$

2. 对每个括号因式分解，约分得 373。

3. 利用 $7=6^{\log_6 7}$，得$\frac{1}{36}$。

4. 联想 $1=\lg10=\lg2+\lg5$，原式得 1。

5. 值为 0。

6. 值为 $44\frac{1}{2}$

7. 原式$=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times10^n+\underbrace{11\cdots1}_{n个}-\underbrace{22\cdots2}_{n个}}$

$=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}}\sqrt{10^n+1-2}$

$=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}}\sqrt{\underbrace{99\cdots9}_{n个}}$

$=3\cdot\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}}\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}}$

$=\underbrace{33\cdots3}_{n个}$

8. (C) $\because \sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}+|b+c|$

$=-a-[-(a+b)]+(c-a)+[-(b+c)]=-a$。

9. (A) $\because f(-7)=-a\cdot7^7-b\cdot7^3-c\cdot7-5=7$,

$\therefore a\cdot7^7+b\cdot7^3+c\cdot7=-12$。

10. (C) $\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$

$\therefore \frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a+b+c}\Rightarrow abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)\Rightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0$ $\therefore$ a、b、c 中必有两个互为相反数。

11. (E) $\because x^3-2=x(x^2-2)+2x-2$

$\therefore$ 余项为 $2x-2$。

12. (C) $\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}$

又由 $a+b+c=0\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)=0$

$\Rightarrow bc+ca+ab<0(\because abc=8>0)$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<0$。