21世纪高职高专重点教材

应用高等数学

建设类

主编　孔亚仙

浙江科学技术出版社

21世纪高职高专重点教材

◆《应用高等数学　工科类 · 上册》函数与极限、导数及应用、积分及应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何……

◆《应用高等数学　工科类 · 下册》多元函数微积分、无穷级数、拉普拉斯变换、线性代数、概率计初步……

◆《应用高等数学　建设类》初等数学基础、极限、导数与微分、导数的应用、积分、常微分方程、空间解析几何、无穷级数、概率论……

◆《应用高等数学　计算机类》计算机中的数制、函数、极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、行列式、矩阵及其应用、概率论、命题逻辑与布尔代数、图论基础与数据结构初步、MATLAB软件简介……

◆《应用高等数学　经管类》极限与连续、导数及应用、积分及应用、多元函数微积分、线性代数及应用、概率与统计初步……

◆《应用高等数学　医药类》函数、函数与极限、导数与微分、导数的应用、积分的概念及运算、积分的应用、多元函数微积分的应用、MATLAB软件应用……

ISBN 978-7-5341-4908-5

9 787534 149085 >

定　价：28.00元

21世纪高职高专重点教材

应用高等数学

建设类

主　　编　孔亚仙
副主编　徐仁旭　张其林

浙江科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学：建设类/孔亚仙主编. —杭州：浙江科学技术出版社，2012.9

ISBN 978-7-5341-4908-5

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①孔… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 210701 号

21 世纪高职高专重点教材

书　　名	**应用高等数学　建设类**
主　　编	孔亚仙
出版发行	浙江科学技术出版社 杭州市体育场路 347 号　邮政编码：310006 联系电话：0571-85170300-61712 E-mail：zkpress@zkpress.com
排　　版	杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷	杭州万方印务有限公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	787×1092　1/16　　**印　张**　12.75
字　　数	300 000
版　　次	2012 年 9 月第 1 版　2012 年 9 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5341-4908-5　　**定　价**　28.00 元

责任编辑　宋　东　王巧玲　　**封面设计**　金　晖

责任校对　赵新宇　　**责任印务**　徐忠雷

前　言

《应用高等数学》由浙江省多所高职高专院校长期从事于高等数学教学，具有丰富教学经验的老师集体编写，此套书共分五册，包括：应用高等数学（工科类上、下）、应用高等数学（建设类）、应用高等数学（计算机类）、应用高等数学（经管类）、应用高等数学（医药类），内容涵盖了工科、建设、计算机、财经、文秘、医药和农林类等方面。

本书为《应用高等数学　建设类》。

根据高职高专教育人才培养目标，及高技能人才培养的通用要求和培养对象的特殊性；对建筑类各专业的课程改革，作了认真的调查、分析、研究，并参考专业老师的建议；借鉴国内外同类学校的教改成果而编写的。

本书的内容可分为初等数学、一元函数微积分、微分方程、空间解析几何、级数、概率论。其中初等数学重点结合建筑工程各专业的需求，安排了三角函数、三角形、面积、体积的计算。一元函数微积分内容包含函数的极限、导数及其应用、积分及其应用。

本书在编写过程中，力求体现以下特点：

(1) 适合高职高专学生使用。针对高职学生的学习特点，对教学内容予以不同程度的精简与优化。对定理、性质等以解释清楚为度，不追求理论上的严密性与系统性。在淡化理论的同时也适度考虑一些必要的证明，意在培养学生必要的逻辑推理能力。

(2) 重视直观化描述。对常用数学概念和结论的引入与叙述，尽可能用实际案例或配以几何图形直观描述。力求使抽象的数学概念形象化，以降低学习难度，有助于学生更好地掌握数学知识。

(3) 紧密结合建设类各专业人才培养的目标。根据专业的需要确定教学内容，每一章都安排了与建筑行业相关的引例。安排了很多来自建筑工程实际的例题和习题，体现了数学知识与专业知识相结合的原则，为学生学习专业知识打下坚实的理论基础。

(4) 突出应用性，体现新颖性。数学是一种知识，也是一种技术，并成为当代高新技术的重要组成部分。学以致用，有利于提高学生数学知识的应用意识与学习兴趣。使之具有一定的把实际问题转化为数学模型的能力，将数学建模的思想渗透其中。

(5) 重视数学文化教育。在介绍数学知识的同时，扩充了数学精神、数学思想与数学史的内容。并结合现今数学的发展及其应用，进行数学文化层面的教育，提高高职学生的人文素养。

本书由孔亚仙（浙江建设职业技术学院）担任主编并统稿，徐仁旭（浙江建设职业技术学院）、张其林（嘉兴职业技术学院）为副主编。其中，孔亚仙编写第3、4、5、8章，徐仁旭编写第1、7、9章，张其林编写第2、6章。审稿由孔亚仙、徐仁旭完成。

在本书编写过程中，作者对每一章内容都进行了认真地推敲，但由于编者水平有限，书中定有误漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

2012年6月

目　　录

第一章　初等数学

【引例一(建筑美学的基础)】

数学在建筑中的应用很广泛，如建筑物的外形比例是建筑美学的基础来源，其中黄金比例在各种比例模型中应用最广. 黄金比例是指事物各部分之间一定的数学比例关系，即将整体一分为二，较大部分与较小部分之比等于整体与较大部分之比，此时长段为全段的 0.618. 黄金比例也被称为**黄金分割**.

古希腊建筑中就常将黄金比例运用于建筑实践，使建筑物的比例协调、美观大方. 雅典的帕特农神庙(图 1-1)就是运用黄金比例的一个早期建筑的典型. 神殿全由大理石砌成，是世界上最对称的宏伟建筑物，长 80m，宽约 34m，殿内有高约 12m 整齐圆滑的石柱，它被公认为现存古建筑中最具均衡美感的伟大杰作，每根石柱均向内微倾，以平衡观众的视差，令其造型更和谐优美.

此外，一些建筑由多种几何体构造也颇具美感. 如拜占庭时期的建筑通常由正方形、圆、立方体和带拱的半球等概念组合而成，典型的代表为君士坦丁堡的索菲亚教堂(图 1-2)，此类创新用法成了罗马建筑师引进并加以完善的主要数学思想.

图 1-1

图 1-2

解三角形、计算面积和体积是初等数学中的重要内容，为巩固这方面的知识，本章在原有初等数学的基础上进行复习或补充. 并就这些知识在建筑工程中的实际应用作些介绍.

§1-1　解三角形

由于三角形具有一个很重要的力学性质 —— 稳定性，所以三角形成了建筑物中最常见的一个几何图形. 如屋架、支架、支撑等都是由三角形构成的. 对于以建筑业为其专业背景的我们来说，很好地掌握解三角形的知识，以适应实际工作的需要，就显得非常重要.

一、三角形的性质

1. 三角形的分类

按边分：不等边三角形、等腰三角形、等边(正) 三角形.

按角分：锐角三角形、直角三角形、钝角三角形.

2. 构成三角形的条件

两边之和大于第三边，两边之差小于第三边.

3. 三角形的内角

内角和为180°，三角形的一个外角等于它不相邻的两内角之和.

4. 三角形的边角关系

在同一三角形中，边相等则所对的角相等；大边对大角，反之也成立.

5. 三角形的四心

垂心（三条高的交点）、重心（三条中线的交点）、内心（三条角平分线的交点）、外心（三条边的垂直平分线交点）.

6. 三角形的面积公式：$S=\frac{1}{2}ah_a$（图 1-3）.

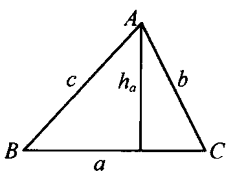

图 1-3

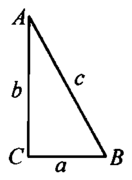

图 1-4

二、解三角形

1. 直角三角形的边角计算（如图 1-4）

勾股定理　$c^2=a^2+b^2$；

三角比（锐角三角函数）　$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，$\tan A=\frac{a}{b}$，$\cot A=\frac{b}{a}$.

2. 斜三角形的边角计算（如图 1-3）

正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为三角形外接圆半径）；

余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

三、知识应用

例 1　桅杆式起重机最大起吊高度和最远起吊距离的计算. 某工地为安装设备，需安装一台大型桅杆式起重机（如图 1-5）. 拔杆长 59.5m，拔杆下端与主桅杆铰接在离地面 0.4m 处，偏离主桅杆中心 0.42m；拔杆的倾角 α 可以从15° 转到80°；起重机吊钩、滑轮、索具的高度为 2.5m. 求起重机工作时吊钩离地面的最大高度和最大水平距离.

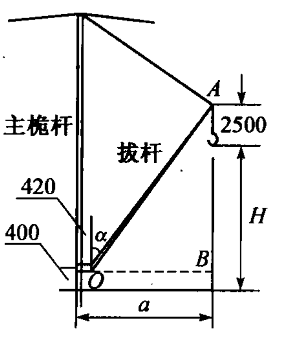

图 1-5

解　如图 1-5，在倾角为 α 时（$\alpha\in[15°,80°]$），起吊高度 $H=AB+0.4-2.5$，水平距离 $a=OB+0.42$，所以考虑直角三角形 AOB，有

$$AB=OA\cdot\sin(90°-\alpha)=OA\cdot\cos\alpha,$$

$$OB = OA \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = OA \cdot \sin\alpha.$$

要使起吊高度 H 达到最大，则 AB 最大，此时取 $\alpha = 15^\circ$，所以最大起吊高度为

$$H = 59.5 \cdot \cos 15^\circ + 0.4 - 2.5 = 55.4(\text{m}).$$

要使水平距离 a 达到最大，则 OB 达到最大，此时取 $\alpha = 80^\circ$，最大水平距离为

$$a = 59.5 \cdot \sin 80^\circ + 0.42 = 59.0(\text{m}).$$

例 2 有一个高度 $A_1B = 6\text{m}$，半径 $OA_1 = 1.5\text{m}$ 的圆柱形构筑物，沿着圆柱外周设置一个宽度 $A_1A_2 = 70\text{cm}$ 的旋转梯(图 1-6a)，其中 A_1B_1 为旋转梯的内沿边，A_2B_2 为旋转梯的外沿边，D_1D_2 为旋转梯的横档(踏步). 若将旋转梯的内沿边和外沿边展开后放在同一平面上(图 1-6b)，经测量第一个踏步有关尺寸为：$D_1C_1 = D_2C_2 = 20\text{cm}$，$A_1C_1 = 30\text{cm}$，$A_1C_2 = 44\text{cm}$，试求旋转梯从地面到构筑物顶部的内沿边 A_1B_1 与外沿边 A_2B_2 的长度.

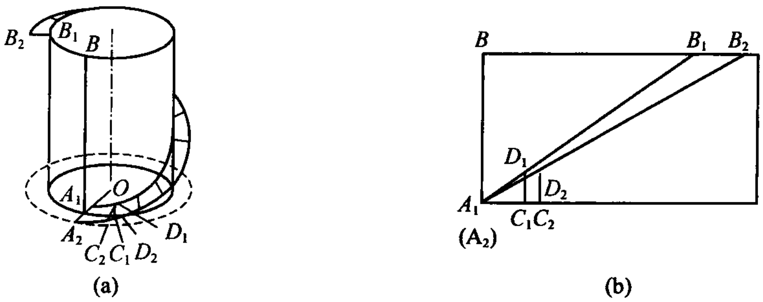

图 1-6

解 由平面展开图，在直角三角形 $A_1D_1C_1$ 中

$$\tan\angle D_1A_1C_1 = \frac{D_1C_1}{A_1C_1} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

在直角三角形 BA_1B_1 中得内沿边长

$$A_1B_1 = \frac{A_1B}{\cos\angle BA_1B_1} = \frac{A_1B}{\cos(90^\circ - \angle D_1A_1C_1)} = \frac{6}{\sin\angle D_1A_1C_1} \approx 10.81(\text{m}).$$

同理，可得外沿边长为 14.61m.

例 3 如图 1-7 所示的屋架，根据所给的尺寸，计算三角形 ABC 三边 AB，BC，CA 的长度及三内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的大小.

解 由勾股定理计算杆的长度

在直角三角形 ABA_1 中

$$AB = \sqrt{(AA_1)^2 + (A_1B)^2} = \sqrt{(3.0)^2 + (2.0)^2} \approx 3.61(\text{m}).$$

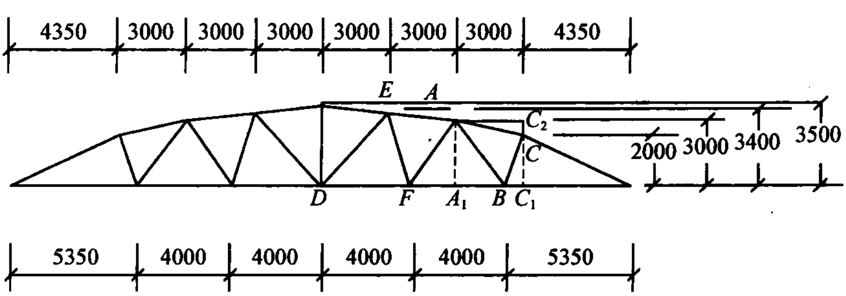

图 1-7

在直角三角形 BCC_1 中

$$BC=\sqrt{(BC_1)^2+(C_1C)^2}=\sqrt{(5.35-4.35)^2+(2.0)^2}\approx 2.24(\mathrm{m}).$$

在直角三角形 ACC_2 中

$$AC=\sqrt{(AC_2)^2+(C_2C)^2}=\sqrt{(3.0)^2+(3.0-2.0)^2}\approx 3.16(\mathrm{m}).$$

在三角形 ABC 中，由余弦定理

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{(3.61)^2+(2.24)^2-(3.16)^2}{2\times 3.61\times 2.24}\approx 0.4960,$$

$$\angle B=60°16'.$$

又由正弦定理 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，

所以 $\sin A=\dfrac{BC}{AC}\sin B=\dfrac{2.24}{3.16}\times 0.8682=0.6151$，

$$\angle A=37°59',$$

$$\angle C=180°-\angle A-\angle B=81°45'.$$

习题 1-1

1. 如图 1-8，为了防止屋面积水，某大型公共建筑屋的网状屋顶的倾斜度为 1°，已知该建筑物跨度为 138.2m，求屋顶中央处的高度 BD.
2. 如图 1-9，某房屋跨度为 4.8m，房屋倾角为26°34′，房屋长度为 7.8m，如果每平方米屋面铺机瓦 15 张，问该房屋屋面共铺多少张瓦？

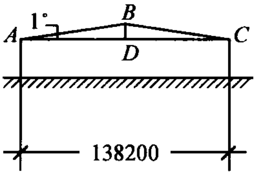

图 1-8

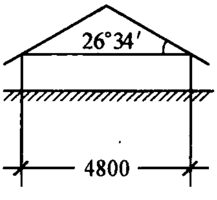

图 1-9

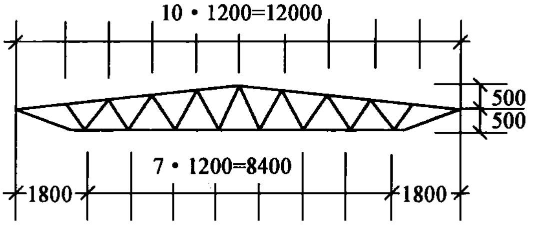

图 1-10

3. 某轻钢屋架如图 1-10 所示，求各杆的长度及它们之间的夹角.

§1-2　三角函数

一、三角函数的概念

当角的度量单位为弧度制时，角的集合与实数集合之间建立了一一对应关系，而一个确定的角又对应着一个三角比. 这样就产生了一个新函数 —— 三角函数. 不同的三角比对应不同的三角函数，它们分别为正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$，正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$.

1. 三角函数的定义域、值域、性质

表 1－1

函数	定义域	值域	奇偶性	周期	单调性
$y=\sin x$	$x\in\mathbf{R}$	$[-1,1]$	奇	2π	$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right],\nearrow$ $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]\searrow$ $k\in\mathbf{Z}$
$y=\cos x$	$x\in\mathbf{R}$	$[-1,1]$	偶	2π	$[2k\pi,(2k+1)\pi]\searrow$ $[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi]\nearrow$ $k\in\mathbf{Z}$
$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$	$\mathbf{R}$	奇	π	$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\nearrow$ $k\in\mathbf{Z}$
$y=\cot x$	$x\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$	$\mathbf{R}$	奇	π	$(k\pi,(k+1)\pi)$ $k\in\mathbf{Z}$ $\searrow$
$y=\sec x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$		偶	2π	
$y=\csc x$	$x\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$		奇	2π	

其中，正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$ 和正切函数 $y=\tan x$ 的图象分别如图 1－11.

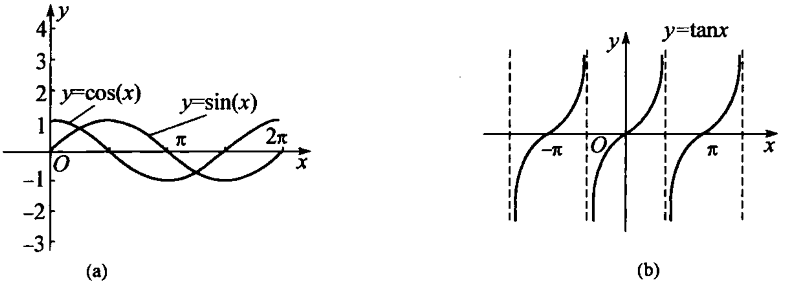

图 1－11

2. 常用的三角公式

(1) 同角三角函数关系

平方关系：$\sin^2x+\cos^2x=1,1+\tan^2x=\sec^2x,1+\cot^2x=\csc^2x$.

商式关系：$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

倒数关系：$\sec x=\dfrac{1}{\cos x},\csc x=\dfrac{1}{\sin x},\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$.

(2) 二倍角公式

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,$$
$$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x,$$
$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}.$$

(3) 两角和与差的公式

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,$$
$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,$$
$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}.$$

二、知识应用

例 1 若 $\tan x=m$，且 x 在第三象限，求 $\cos x$ 的值.

解 由 $1+\tan^2x=\sec^2x$，x 为第三象限角，所以

$$\cos x=-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2x}}=-\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=-\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}.$$

例 2 求下列函数的最大值与最小值，并求对应的 x 值.

(1) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$； (2) $y=-2\cos^2x+2\sin x+\dfrac{3}{2}$.

解 (1) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$.

而 $-1\leqslant\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\leqslant1$，所以 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的最大值是 2，此时

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}.$$

最小值为 -2，此时 $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

注意：通常 $a\sin\omega x+b\cos\omega x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$，这公式在建筑结构的振动分析中，常常遇到. 还可用于求最值、周期等.

(2) $y=-2\cos^2x+2\sin x+\dfrac{3}{2}=2\sin^2x+2\sin x-\dfrac{1}{2}=2\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)^2-1$.

当 $\sin x=1$ 时，即 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，$y$ 达到最大，最大值为$\dfrac{7}{2}$；

当 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ 时，即 $x=2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}$，或 $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，$y$ 达到最小，最小值为 -1.

习题 1-2

1. 已知 $\cos x=\dfrac{5}{13}\left(\dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi\right)$，求 $\tan\dfrac{x}{2}$ 的值.
2. 求函数 $y=\sqrt{\sin(\cos x)}$ 的定义域.
3. 化简下列各式：
   (1) $\sin^21°+\sin^22°+\cdots+\sin^288°+\sin^289°$；
   (2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta$.
4. 求下列函数的最值，及相应的 x 值：
   (1) $y=3\sin2x+4\cos2x$； (2) $y=3\sin^2x+6\sin x-4$.

§1-3 反三角函数

一、反函数

定义 1.1 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 如果对于每一个 $y\in M$，有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应，并使 $y=f(x)$ 成立，则得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y).$$

显然，$x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 M，值域为 D. 由于习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以 $y=f(x)$ 的反函数可表示为

$$y=f^{-1}(x).$$

反函数存在的条件是一一对应. 如指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内是一一对应的，其值域为$(0,+\infty)$. 所以它有反函数，它的反函数是对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$. 相应的定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$. 当 $0<a<1$ 时的图形见图 1-12.

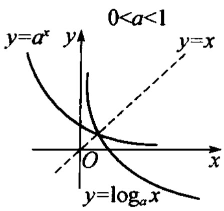

图 1-12

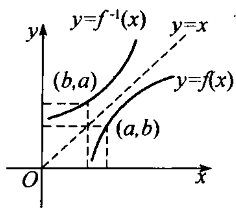

图 1-13

在同一直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-13 所示.

二、反三角函数

1. 概念

三角函数知识告诉我们，在整个定义域上没有一个三角函数是一一对应的，所以在定义域内是没有反函数存在的. 但注意到每个三角函数都有单调区间. 只考虑单调区间上的反函数，因此定义反三角函数. 正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$ 和余切函数 $y=\cot x$ 的反函数分别称为反正弦函数$y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$. 具体定义见表 1-2.

表 1-2

反三角函数	定义域	值　域
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$

反三角函数	定义域	值　域
$y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$

2. 性质与图象

性质见表 1－3.

表 1－3

函　数	单调性	恒等式	正负值关系
$y = \arcsin x$	增函数	$\sin(\arcsin x) = x$	$\arcsin(-x) = -\arcsin x$
$y = \arccos x$	减函数	$\cos(\arccos x) = x$	$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
$y = \arctan x$	增函数	$\tan(\arctan x) = x$	$\arctan(-x) = -\arctan x$
$y = \operatorname{arccot} x$	减函数	$\cot(\operatorname{arccot} x) = x$	$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$

图象见图 1－14.

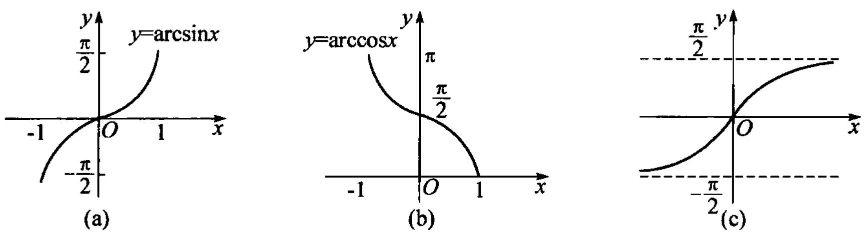

图 1－14

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y = \frac{1}{4}\arcsin(2x-5)$；　　　　(2) $y = \arccos(x^2 - x)$.

解　(1) 由 $-1 \leqslant 2x-5 \leqslant 1$，得 $2 \leqslant x \leqslant 3$，定义域为$[2,3]$.

(2) 由 $-1 \leqslant x^2 - x \leqslant 1$，得$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，定义域为$\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

例 2　求反三角函数的值：

(1) $\arcsin \frac{1}{2}$；　　　　(2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

解　(1) 设 $\alpha = \arcsin \frac{1}{2}$，则 $\sin\alpha = \frac{1}{2}$，$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

(2) 设 $\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\alpha \in [0, \pi]$，

所以 $\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

注意：求反三角函数的值时，首先，考虑用反三角函数的定义与性质；其次，通常设辅助角，转化为原函数的恒等变形来解决问题. 其一般步骤是：设辅助角 —— 化原函数 —— 计算求值.

三、解简单的三角方程

定义 1.2　含有未知数的三角函数的方程，称为三角方程.

最简单三角方程的解见表 1－4.

表 1－4

方　程	a 的值	通　解	解　集
$\sin x=a$	$\lvert a\rvert<1$	$x=k\pi+(-1)^k\arcsin a(k\in\mathbf{Z})$	$\{x\mid x=k\pi+(-1)^k\arcsin a,k\in\mathbf{Z}\}$
	$\lvert a\rvert=1$	$x=2k\pi+\arcsin a(k\in\mathbf{Z})$	$\{x\mid x=2k\pi+\arcsin a,k\in\mathbf{Z}\}$
	$\lvert a\rvert>1$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\cos x=a$	$\lvert a\rvert\leqslant 1$	$x=2k\pi\pm\arccos a(k\in\mathbf{Z})$	$\{x\mid x=2k\pi\pm\arccos a,k\in\mathbf{Z}\}$
	$\lvert a\rvert>1$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\tan x=a$	$a\in\mathbf{R}$	$x=k\pi+\arctan a(k\in\mathbf{Z})$	$\{x\mid x=k\pi+\arctan a,k\in\mathbf{Z}\}$

例 3　解下列三角方程：

(1) $2\sin 2x=1$；(2) $\cos^2 x-4\cos x+2=0$；(3) $\tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x-3=0$.

解　(1) 由 $2\sin 2x=1$，得 $\sin 2x=\frac{1}{2}$，因为 $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$，所以 $2x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$，原方程的解为 $x=\frac{k\pi}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2) 先解二次方程得 $\cos x=2\pm\sqrt{2}$，因为 $2+\sqrt{2}>1$，所以 $\cos x=2+\sqrt{2}$ 无解. 由 $\cos x=2-\sqrt{2}$，得 $x=2k\pi\pm\arccos(2-\sqrt{2})$，$k\in\mathbf{Z}$.

(3) 分解因式　$(\tan x+1)(\tan^2 x-3)=0$，得 $\tan x=-1$，$\tan x=\pm\sqrt{3}$.

由 $\tan x=-1$，$x=k\pi-\frac{\pi}{4}$　$(k\in\mathbf{Z})$；由 $\tan x=\pm\sqrt{3}$，$x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$　$(k\in\mathbf{Z})$.

结论：解三角方程的基本思路是通过代数或三角的变换，将一个三角方程转化为一个或多个最简单的三角方程，从而求出其解.

习题 1－3

1. 求函数的定义域：

(1) $y=\arccos(1-5x)$；　(2) $y=\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$.

2. 求下列各式的值：

(1) $\arcsin(-1)$；　(2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$；

(3) $\arctan\sqrt{3}$；　(4) $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

3. 解三角方程：

(1) $1+\sqrt{2}\cos x=0$；　(2) $2\sin^2 x-5\sin x-3=0$；

(3) $\tan x+\cot x=2$.