

TURING

图灵新知



思考的乐趣

Matrix67数学笔记

顾森 著



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵新知



思考的乐趣

Matrix67数学笔记

顾森 著

人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

思考的乐趣: Matrix67数学笔记 / 顾森著. -- 北京: 人民邮电出版社, 2012.7 (2012.10 重印)
(图灵新知)
ISBN 978-7-115-27586-8

I. ①思… II. ①顾… III. ①数学—普及读物 IV.
①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第043369号

内 容 提 要

本书内容大多是从作者6年多以来积累的上千篇博客中节选而来的,分为“生活中的数学”、“数学之美”、“几何的大厦”、“精妙的证明”和“思维的尺度”五部分。书中基本不涉及高深的数学理论,但是内容新颖、时尚,既有与现实生活联系紧密的应用型话题,又有打通几何、代数联系的富有启发性的讨论,还间或介绍了一些著名数学难题的最新研究进展,信息十分丰富。

本书是广大数学爱好者的美味佳肴,只要具备简单数学基础即能阅读。

图灵新知

思考的乐趣: Matrix67数学笔记

-
- ◆ 著 顾 森
责任编辑 明永玲
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 · 北京市崇文区夕照寺街14号
邮编 100061 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷
 - ◆ 开本: 700×1000 1/16
印张: 17.5
字数: 286千字 2012年7月第1版
印数: 13 001 ~19 000册 2012年10月河北第4次印刷

ISBN 978-7-115-27586-8

定价: 45.00元

读者服务热线: (010)51095186转604 印装质量热线: (010)67129223

反盗版热线: (010)67171154

序一

我本不想写这个序。因为知道多数人看书不爱看序言。特别是像本书这样有趣的书，看了目录就被吊起了胃口，性急的读者肯定会直奔那最吸引眼球的章节，哪还有耐心看你的序言？

话虽如此，我还是答应了作者，同意写这个序。一个中文系的青年学生如此喜欢数学，居然写起数学科普来，而且写得如此投入又如此精彩，使我无法拒绝。

书从日常生活说起，一开始就讲概率论教你如何说谎。接下来谈到失物、物价、健康、公平、密码还有中文分词，原来这么多问题都与数学有关！但有关的数学内容，理解起来好像并不是很容易。一个消费税的问题，又是图表曲线，又是均衡价格，立刻有了高深模样。说到最后，道理很浅显：向消费者收税，消费意愿减少，商人的利润也就减少；向商人收税，成本上涨，消费者也就要多出钱。数学就是这样，无论什么都能插进去说说，而且千方百计把事情说个明白，力求返璞归真。

如果你对生活中这些事无所谓，就从第二部分开始看吧。这里有“让你立刻爱上数学的8个算术游戏”。作者口气好大，区区5页文字，能让人立刻爱上数学？你看下去，就知道作者没有骗你。这些算术游戏做起来十分简单却又有趣，背后的奥秘又好像深不可测。8个游戏中有6个与数的十进制有关，这给了你思考的空间和当一回数学家的机会。不妨想想做做，换成二进制或八进制，这些游戏又会如何？如果这几个游戏勾起了探究数字奥秘的兴趣，那就接着往下看，后面是一大串折磨人的长期没有解决的数学之谜。问题说起来很浅显明白，学过算术就懂，可就是难以回答。到底有多难，谁也不知道。也许明天就有人想到了一个巧妙的解答，这个人可能就是你；也许一万年仍然是个悬案。



但是这一部分的主题不是数学之难，而是数学之美。这是数学文化中常说常新的话题，大家从各自不同的角度欣赏数学之美。陈省身出资两万设计出版了《数学之美》挂历，十二幅画中有一张是分形，是唯一在本书这一部分中出现的主题。这应了作者的说法：“讲数学之美，分形图形是不可不讲的。”喜爱分形图的读者不妨到网上搜索一下，在图片库里有丰富的彩色分形图。一边读着本书，一边欣赏神秘而惊人美丽的艺术作品，从理性和感性两方面享受思考和观察的乐趣吧。此外，书里还有不常见的信息，例如三角形居然有 5000 多颗心，我是第一次知道。看了这一部分，马上到网上看有关的网站，确实是开了眼界。

作者接下来介绍几何。几何内容太丰富了，作者着重讲了几何作图。从经典的尺规作图、有趣的单规作图，到疯狂的生锈圆规作图、意外有效的火柴棒作图，再到功能特强的折纸作图和现代化机械化的连杆作图，在几何世界里我们做了一次心旷神怡的旅游。原来小时候玩过的折纸剪纸，都能够登上数学的大雅之堂了！最近看到《数学文化》月刊上有篇文章，说折纸技术可以用来解决有关太阳能飞船、轮胎、血管支架等工业设计中的许多实际问题，真是不可思议。

学习数学的过程中，会体验到三种感觉。

一种是思想解放的感觉。从小学里学习加减乘除开始，就不断地突破清规戒律。两个整数相除可能除不尽，引进分数就除尽了；两个数相减可能不够减，引进负数就能够相减了；负数不能开平方，引进虚数就开出来了。很多现象是不确定的，引进概率就有规律了。浏览本书过程中，心底常常升起数学无禁区的感觉。说谎问题，定价问题，语文句子分析问题，都可以成为数学问题；摆火柴棒，折纸，剪拼，皆可成为严谨的学术。好像在数学里没有什么问题不能讨论，在世界上没有什么事情不能提炼出数学。

一种是智慧和力量增长的感觉。小学里使人焦头烂额的四则应用题，一旦学会方程，做起来轻松愉快，摧枯拉朽地就解决了。曾经使许多饱学之士百思不解的曲线切线或面积计算问题，一旦学了微积分，即使让普通人做起来也是小菜一碟。有时仅仅读一个小时甚至十几分钟，就能感受到自己智慧和力量的增长。十几分钟之前还是一



头雾水，十几分钟之后豁然开朗。读本书的第四部分时，这种智慧和力量增长的感觉特别明显。作者把精心选择的巧妙的数学证明，一个接一个地抛出来，让读者反复体验智慧和力量增长的感觉。这里有小题目也有大题目，不管是大题还是小题，解法常能令人拍案叫绝。在解答一个小问题之前作者说：“看了这个证明后，你一定会觉得自己笨死了。”能感到自己之前笨，当然是因为智慧增长了！

一种是心灵震撼的感觉。小时候读到棋盘格上放大米的数学故事，就感到震撼，原来 $2^{64}-1$ 是这样大的数！在细细阅读本书第五部分时，读者可能一次又一次地被数学思维的深远宏伟所震撼。一个看似简单的数字染色问题，推理中运用的数字远远超过佛经里的“恒河沙数”，以至于数字仅仅是数字而无实际意义！接下去，数学家考虑的“所有的命题”和“所有的算法”就不再是有穷个对象。而对于无穷多的对象，数学家依然从容地处理之，该是什么就是什么。自然数已经是无穷多了，有没有更大的无穷？开始总会觉得有理数更多。但错了，数学的推理很快证明，密密麻麻的有理数不过和自然数一样多。有理数都是整系数一次方程的根，也许加上整系数 2 次方程的根，整系数 3 次方程的根等等，也就是所谓代数数就会比自然数多了吧？这里有大量的无理数呢！结果又错了。代数数看似声势浩大，仍不过和自然数一样多。这时会想所有的无穷都一样多吧，但又错了。简单而巧妙的数学推理得到很多人至今不肯接受的结论：实数比自然数多！这是伟大的德国数学家康托的代表性成果。

说这个结论很多人至今不肯接受是有事实根据的。科学出版社去年出了一本书名为《统一无穷理论》，该书作者主张无穷只有一个，不赞成实数比自然数多，希望建立新的关于无穷的理论。他的努力受到一些研究数理哲学的学者的支持，可惜目前还不能自圆其说。我不知道有哪位数学家支持“统一无穷理论”，但反对“实数比自然数多”的数学家历史上是有过的。康托的老师克罗内克激烈地反对康托的理论，以致康托得了终身不愈的精神病。另一位大数学家布劳威尔发展了构造性数学，这种数学中不承认无穷集合，只承认可构造的数学对象。只承认构造性的证明而不承认排中律，也就不承认反证法。而康托证明“实数比自然数多”用的就是反证法。尽管绝大多数的数学家不肯放弃无穷集合概念，也不肯放弃排中律，但布劳威尔的构造性数学也被承认是一个数学分支，并在计算机科学中发挥重要作用。



平心而论，在现实世界确实没有无穷。既没有无穷大也没有无穷小。无穷大和无穷小都是人们智慧的创造物。有了无穷的概念，数学家能够更方便地解决或描述仅仅涉及有穷的问题。数学能够思考无穷，而且能够得出一系列令人信服的结论，这是人类精神的胜利。但是，对无穷的思考、描述和推理，归根结底只能通过语言和文字符号来进行。也就是说，我们关于无穷的思考，归根结底是有穷个符号排列组合所表达出来的规律。这样看，构造数学即使不承认无穷，也仍然能够研究有关无穷的文字符号，也就能够研究有关无穷的理论。因为有关无穷的理论表达为文字符号之后，也就成为有穷的可构造的对象了。

话说远了，回到本书。本书一大特色，是力图把道理说明白。作者总是用自己的语言来阐述数学结论产生的来龙去脉，在关键之处还不忘给出饱含激情的特别提醒。数学的美与数学的严谨是分不开的。数学的真趣在于思考。不少数学科普，甚至国外有些大家的作品，说到较为复杂深刻的数学成果，常常不肯花力气讲清楚其中的道理，可能认为讲了读者也不会看，是费力不讨好。本书讲了不少相当深刻的数学工作，其推理过程有时曲折迂回，作者总是不畏艰难，一板一眼地力图说清楚，认真实践着古人“诲人不倦”的遗训。这个特点使本书能够成为不少读者案头床边的常备读物，有空看看，常能有新的思考，有更深入的理解和收获。

信笔写来，已经有好几页了。即使读者有兴趣看序言，也该去看书中更有趣的内容并开始思考了吧。就此打住。祝愿作者精益求精，根据读者反映和自己的思考发展不断丰富改进本书；更希望早日有新作问世。

2012年4月29日

序二

欣闻《思考的乐趣：Matrix67 数学笔记》即将出版，应作者北大中文系的数学侠客顾森的要求写个序。我非常荣幸也非常高兴做这个命题作业。记得几个月前，与顾森校友及图灵新知丛书的编辑朋友们相聚北大资源楼喝茶谈此书的出版，还谈到书名等细节。没想到图灵的朋友出手如此之快，策划如此到位。在此也表示敬意。我本人也是图灵新知丛书的粉丝，看过他们好几本书；比如《数学万花筒》、《数学那些事儿》、《历史上最伟大的 10 个方程》等，都很不错。

我和顾森虽然只有一面之缘，但好几年前就知道并关注他的博客了。他的博客内容丰富、有趣，有很多独到之处。诚如一篇关于他的报道所说，在百度和谷歌的搜索框里输入 matrix，搜索提示栏里排在第一位的并不是那部英文名为 Matrix（《黑客帝国》）的著名电影，而是一个名为 matrix67 的个人博客。自 2005 年 6 月开博以来，这个博客始终保持更新，如今已有上千篇博文。在果壳科技的网站里（这也是一个我喜欢看的网站），他的自我介绍也很有意思：“数学宅，能背到圆周率小数点后 50 位，会证明圆周率是无理数，理解欧拉公式的意义，知道四维立方体是由 8 个三维立方体组成的，能够把直线上的点和平面上的点一一对应起来。认为生活中的数学无处不在，无时不影响着我们的生活。”

据说，顾森进入北大中文系纯属误打误撞。2006 年，还在念高二的他代表重庆八中参加了第 23 届中国青少年信息学竞赛并拿到银牌，获得了保送北大的机会。选专业时，招生老师傻了眼：他竟然是个文科生。为了专业对口，顾森被送入了中文系，学习应用语言学。

虽然身在文科，他却始终迷恋着数学。在他看来，数学似乎无所不能。对于用数学来解释生活，他持有一种近乎偏执的狂热——在他的博客上，油画、可乐罐、选举



制度、打出租车，甚至和女朋友在公园约会，都能与数学建立起看似不可思议却又合情合理的联系。这些题目，在他这本新书里也有充分体现。

近代有很多数学普及家，他们不只对数学有着较深刻的理解，更重要的是对数学有着一种与生俱来的挚爱。他们的努力搭起了数学圈外人和数学圈内事的桥梁。

这里最值得称颂的是马丁·伽德纳，他是公认的趣味数学大师。他为《科学美国人》杂志写趣味数学专栏，一写就是二十多年，同时还写了几十本这方面的书。这些书和专栏影响了好几代人。在美国受过高等教育的人（尤其是搞自然科学的），绝大多数都知道他的大名。许多大数学家、科学家都说过他们是读着伽德纳的专栏走向自己现有专业的。他的许多书被译成各种文字，影响力遍及全世界。有人甚至说他是20世纪后半叶在全世界范围内数学界最有影响力的人。对我们这一代中国人来说，他那本被译成《啊哈，灵机一动！》的书很有影响力，相信不少人都读过。让人吃惊的是，在数学界如此有影响力的伽德纳竟然不是数学家，他甚至没有修过任何一门大学数学课。他只有本科学历，而且是哲学专业。他从小喜欢趣味数学，喜欢魔术。读大学时本来是想到加州理工去学物理，但听说要先上两年预科，于是决定先到芝加哥大学读两年再说。没想到一去就迷上了哲学，一口气读了四年，拿了个哲学学士。这段读书经历似乎和顾森有些相似之处。

当然，也有很多职业数学家，他们在学术生涯里也不断为数学的传播做着巨大努力。比如英国华威大学的Ian Stewart。Stewart是著名数学教育家，一直致力于推动数学知识走通俗易懂的道路。他的书深受广大读者喜爱，包括《数学万花筒》、《数学万花筒2》、《上帝掷骰子吗？》、《更平坦之地》、《给青年数学家的信》、《如何切蛋糕》等。

回到顾森的这本书上。书的很多章节题目都很吸引人，比如“数学之美”、“几何的大厦”、“精妙的证明”。书的特点就是将抽象、枯燥的数学知识，通过创造情景深入浅出地展现出来，让读者在愉悦中学习数学。比如“概率论教你说谎”、“找东西背后的概率问题”、“统计数据的陷阱”等内容，就是利用一些趣味性的话题，一方面可以轻松地消除读者对数学的畏惧感，另一方面又可以把概率和统计的原始思想糅合在这些小段子里。



数学是美丽的。对此有切身体会的陈省身先生在南开的时候曾亲自设计了“数学美”的挂历，其中 12 幅画页分别为复数、正多面体、刘徽与祖冲之、圆周率的计算、数学家高斯、圆锥曲线、双螺旋线、国际数学家大会、计算机的发展、分形、麦克斯韦方程和中国剩余定理。这是陈先生心目中的数学之美。我的好朋友刘建亚教授有句名言：“欣赏美女需要一定的视力基础，欣赏数学美需要一定的数学基础。”此书的第二部分“数学之美”就是要通过游戏、图形、数列等浅显概念让有简单数学基础的读者朋友们也能领略到数学之美。

我发现顾森的博客里谈了很多作图问题，这和网上大部分数学博客不同。作图是数学里一个很有意思的部分，历史上有很多相关的难题和故事（最著名的可能是高斯 19 岁时仅用尺规就构造出了正 17 边形的故事）。本书的第三部分专门讲了“尺规作图问题”、“单规作图的力量”、“火柴棒搭成的几何世界”、“折纸的学问”、“探索图形剪拼”等，愿意动动手的数学爱好者绝对会感到兴奋。对于作图的乐趣和意义，我想在此引用本人在新浪微博上的一个小段子加以阐述。

学生：“咱家有的是钱，画图仪都买得起，为啥作图只能用直尺和圆规，有时还只让用其中的一个？”

老师：“上世纪有个中国将军观看学生篮球赛。比赛很激烈，将军却慷慨地说，娃们这么多人抢一个球？发给他们每人一个球开心地玩。”

数学文化微博评论：生活中更有意思的是战胜困难和挑战所赢得的快乐和满足。

书的最后一部分命名为“思维的尺度”，“俄罗斯方块可以永无止境地玩下去吗？”、“比无穷更大的无穷”、“无以言表的大数”、“不同维度的对话”等话题一看起来就很有意思，作者试图通过这些有趣的话题使读者享受数学概念间的联系、享受数学的思维方式。陈省身先生临终前不久曾为数学爱好者题词：“数学好玩。”事实上顾森的每篇文章都在向读者展示数学确实好玩。数学好玩这个命题不仅对懂得数学奥妙的数学大师成立，对于广大数学爱好者同样成立。



见过他本人或看过他的相片的人一定会同意顾森是个美男子，有阳刚之气。很高兴看到这个英俊才子对数学如此热爱。我期待顾森的书在不久的将来会成为畅销书，也期待他有一天会成为马丁·伽德纳这样的趣味数学大师。

汤涛

《数学文化》期刊联合主编
香港浸会大学数学讲座教授

2012.3.5

前 言

依然记得在我很小的时候，母亲的一个同事考了我一道题：一个正方形，去掉一个角，还有多少个角？记得当时我想都没想就说：“当然是三个角。”然后，我知道了答案其实应该是五个角，于是人生中第一次体会到顿悟的快感。后来我发现，其实在某些极端情况下，答案也有可能是四个角或者三个角。我由衷地体会到了思考的乐趣。

从那时起，我就疯狂地爱上了数学，为一个个漂亮的数学定理和巧妙的数学趣题而倾倒。我喜欢把我搜集到的东西和我的朋友们分享，将那些恍然大悟的瞬间继续传递下去。

2005年，博客逐渐兴起，我终于找到了一个记录趣味数学点滴的完美工具。2005年7月，我在MSN上开办了自己的博客，后来几经辗转，最终发展成了一个独立网站 <http://www.matrix67.com>。几年下来，博客里已经累积了上千篇文章，订阅人数也增长到了五位数。

在博客写作的过程中，我认识了很多志同道合的朋友。2011年初，我有幸认识了图灵公司的朋友。在众人的鼓励下，我决定把我这些年积累的数学话题整理成册，与更多的人一同分享。我从博客里精心挑选了一系列初等而有趣的文章，经过大量的添删和修改，有机地组织成了五个相对独立的部分。如果你是刚刚体会到数学之美的中学生，这本书会带你进入一个课本之外的数学花园；如果你是奋战在技术行业前线的工程师，这本书或许能不断给你带来新的灵感；如果你并不那么喜欢数学，这本书或许会逐渐改变你的看法……不管怎样，这本书都会陪你走过一段难忘的数学之旅。

在此，特别感谢张晓芳为本书手绘了很多可爱的插画，这些插画让本书更加生动、活泼。感谢明永玲编辑、杨海玲编辑、朱巍编辑以及图灵公司所有朋友的辛勤工作。



同时，感谢张景中院士和汤涛教授给我的鼓励、支持和帮助，也感谢他们为本书倾情作序。

在写这本书时，我在 Wikipedia (<http://www.wikipedia.org>)、MathWorld (<http://mathworld.wolfram.com>) 和 CutTheKnot (<http://www.cut-the-knot.org>) 上找到了很多有用的资料。文章中很多复杂的插图都是由 Mathematica 和 GeoGebra 生成的，其余图片则都是由 Paint.NET 进行编辑的。这些网站和软件也都非常棒，在这里也表示感谢。

目 录

第一部分 生活中的数学	1
1. 概率论教你说谎	2
2. 找东西背后的概率问题	5
3. 设计调查问卷的艺术	7
4. 统计数据的陷阱	9
5. 为什么人们往往不愿意承担风险?	13
6. 消费者承担消费税真的吃亏了吗?	15
7. 价格里的阴谋	19
8. 公用品的悲剧	30
9. 密码学与协议	34
10. 公平分割问题	44
11. 中文自动分词算法	49
第二部分 数学之美	55
12. 让你立刻爱上数学的 8 个算术游戏	56
13. 最折磨人的数学未解之谜	61
14. 那些神秘的数学常数	76
15. 奇妙的心电图数列	84
16. 不可思议的分形图形	88
17. 几何之美: 三角形的心	100
18. 数学之外的美丽: 幸福结局问题	108
第三部分 几何的大厦	111
19. 尺规作图问题	112
20. 单规作图的力量	123
21. 锈规作图也疯狂	130



- 22. 火柴棒搭成的几何世界 134
- 23. 折纸的学问 141
- 24. 万能的连杆系统 147
- 25. 探索图形剪拼 153

第四部分 精妙的证明 159

- 26. 我最爱的一个证明 160
- 27. 把辅助线作到空间中去的平面几何问题 162
- 28. 小合集（一）：几何问题 169
- 29. 皮克定理的另类证法和出人意料的应用 179
- 30. 欧拉公式的另类证法和出人意料的应用 185
- 31. 定宽曲线与蒲丰投针实验 192
- 32. 来自不同领域的证明 196
- 33. 平分面积的直线 203
- 34. 小合集（二）：图形证明 205
- 35. 生成函数的妙用 212
- 36. 利用赌博求解数学问题 215
- 37. 非构造性证明 217
- 38. 小合集（三）：数字问题 220

第五部分 思维的尺度 223

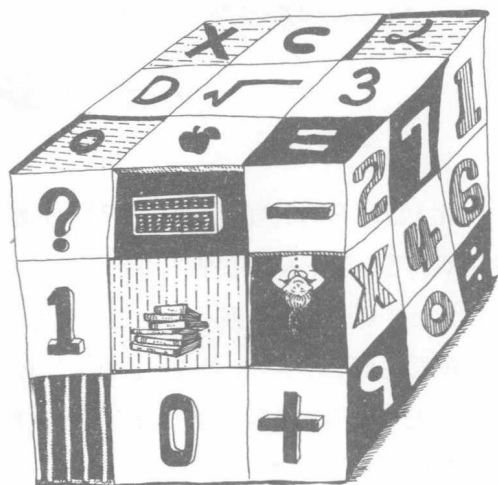
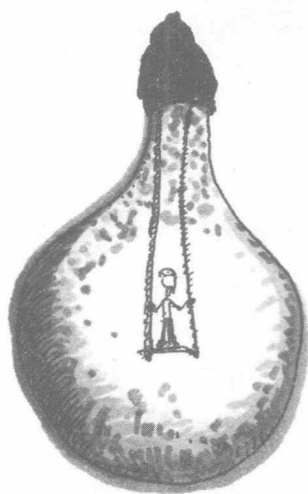
- 39. 史诗般壮观的数学证明 224
- 40. 停机问题与“万能证明方法” 227
- 41. 奇怪的函数（一） 232
- 42. 比无穷更大的无穷 234
- 43. 奇怪的函数（二） 243
- 44. 塔珀自我指涉公式 246
- 45. 俄罗斯方块可以永无止境地玩下去吗？ 249
- 46. 无以言表的大数：古德斯坦数列 254
- 47. 乘法之后是乘方，乘方之后是什么？ 256
- 48. 不同维度的对话：带你进入四维世界 260



第一部分

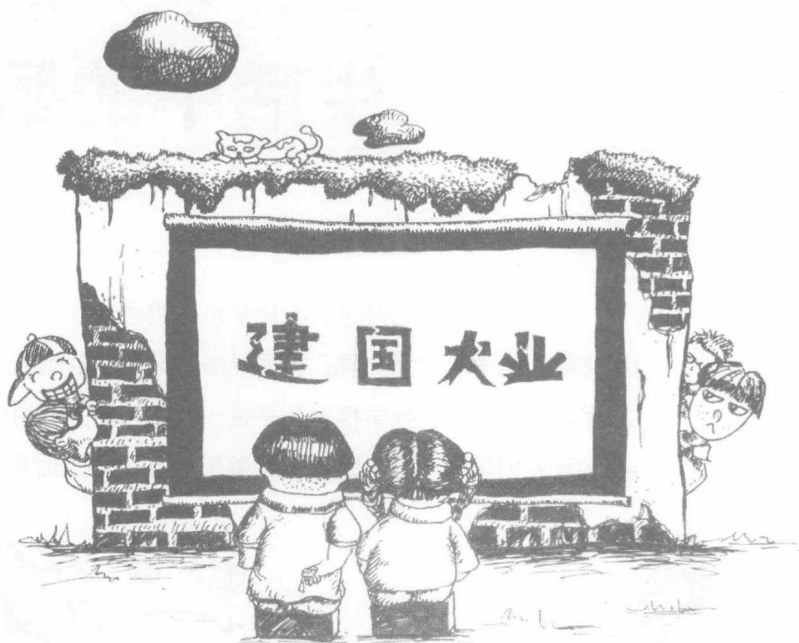
生活中的数学

社会学是应用心理学，心理学是应用生物学，生物学是应用化学，化学是应用物理，物理是应用数学。虽然生活的变量太多，建立完整的数学模型几乎是一个不可能完成的任务，但数学玩家们仍然乐此不疲地尝试着用自己的方式理解生活。





1. 概率论教你说谎



在北大念本科时，宿舍里的几个哥们儿特别喜欢玩电脑游戏。M同学是宿舍里绝对的游戏高手，我们总是被他虐得死去活来的。有段时间，他突然手感不佳，老是发挥失常，反被我们打得狼狈不堪。某天晚上，我们正想继续蹂躏M同学，但找遍宿舍楼竟也没发现他的影子。于是我们推测，这家伙肯定到校外的网吧里通宵练技术去了。

第二天一大早，M同学果然满脸倦意地回到了宿舍。我们几个早有准备，一行人走过去开始拷问他：“嘿嘿，昨晚干啥了？”本以为M同学会支支吾吾答不上话来，殊不知他义正词严地答道：“我陪女朋友去看通宵电影了。”我们几个人不服气，问他：