

本书也可作为旅游管理、工程管理、图书情报等专业学位项目的入学考试辅导教材

2012年MBA、MPA、MPAcc入学考试

综合能力 辅导教材

全国工商管理硕士入学考试研究中心 编

2012



机械工业出版社
China Machine Press

2012年MBA、MPA、MPAcc入学考试

综合能力 辅导教材

.....
全国工商管理硕士入学考试研究中心 编

2012



机械工业出版社
China Machine Press

本书由全国工商管理硕士入学考试研究中心编写,针对 MBA、MPA、MPAcc 入学考试综合能力考试试卷使用的辅导教材。综合能力考试的目的是测试考生运用数学基础知识分析与解决问题的能力、逻辑思维能力和汉语理解及书面表达能力。综合能力考试由问题求解、条件充分性判断、逻辑推理和写作四部分组成。本书针对综合能力考试的目的,在系统分析考试题型的基础上,提供大量练习,内容翔实,能帮助考生提高应试能力。

本书由机械工业出版社出版,未经出版者书面许可,不得以任何方式抄袭、复制或节录本书中的任何部分。

封底无防伪标均为盗版

版权所有,侵权必究

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

图书在版编目(CIP)数据

2012 年 MBA、MPA、MPAcc 入学考试综合能力辅导教材/全国工商管理硕士入学考试研究中心编. —北京:机械工业出版社, 2011. 10

ISBN 978-7-111-36147-3

I. 2… II. 全… III. 研究生-入学考试-自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 211553 号

机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:黄姗姗 版式设计:刘永青

北京京师印务有限公司印刷

2011 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

186mm×242mm·37.75 印张

标准书号:ISBN 978-7-111-36147-3

定价:79.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

购书热线:(010) 68326294; 88379649; 68995259

投稿热线:(010) 88379007

读者信箱:hjzg@hzbook.com

编委会

■ 顾问 韩建华 李 军

■ 编委会主任 吴世农 仝允桓

■ 委 员 (按姓氏笔画排序)

于 立 天津财经大学教授

尤建新 同济大学教授

王重鸣 浙江大学教授

仝允桓 清华大学教授

李维安 东北财经大学教授

汪 戎 云南财经大学教授

吴世农 厦门大学教授

陈 收 湖南大学教授

席酉民 西安交通大学教授

徐二明 中国人民大学教授

前言

MBA 是“工商管理硕士”(Master of Business Administration)的英文缩写。哈佛大学 1908 年首创的 MBA 教育,经过百年的发展,逐渐成为美国乃至世界各国管理教育的主流模式。我国的 MBA 教育始于 1991 年,经过近 20 年的发展,MBA 教育已经成为我国培养高层次管理人才的重要渠道,对我国的社会主义建设和改革开放产生了积极的影响。MBA 招生院校从 1991 年的 9 所扩大到 2011 年的 236 所,分布在全国 30 个省、市、自治区。1991 年全国 MBA 学生入学人数不到 100 人,2011 年入学的 MBA 学生约有 3.6 万人(不含 EMBA 项目)。

专业学位教育具有明显不同于普通学术型硕士教育的特点。MBA 教育是我国最先开办的专业学位教育项目,在发展过程中责无旁贷地要起到带头和示范的作用。1997 年,为了探索适合专业学位的入学考试方式,我国 MBA 入学考试率先实行了全国联考制度。

MBA 教育的目标是培养实务型的管理人才。MBA 生源主要来自企业,有一定的实践经验,MBA 毕业生就业主要是面向企业。MBA 教育过程中注重实践环节,MBA 招生院校通过与企业建立密切的联系或与企业联合培养,保证 MBA 教学内容与企业的经营管理实际紧密结合。MBA 教育强调学生综合能力与素质的提升,重视复合型人才的培养,各种专业背景并有实践经验的大学毕业生都可以报考 MBA。MBA 入学考试的结构与方式应该适应 MBA 教育的这些特点。

MBA 入学考试的指导思想是:通过 MBA 入学考试确保入学新生的质量,考试方式和内容要有利于测评考生的综合能力和基本素质,有利于有实践经验的优秀青年入学。实行联考以后,MBA 入学考试的科目设置和考试内容不断改进和创新,自 2005 年起,初试科目确定为两门(综合能力考试和英语),在复试环节进行综合素质面试和政治理论考试。

2009 年,国家教育主管部门决定,将 MBA 入学考试的模式推广到公共管理硕士(MPA)教育和会计硕士(MPAcc)教育。从 2010 年起,入学考试使用同样的综合能力考试试卷和英语考试试卷。从 2011 年起,新设立的旅游管理、工程管理、图书情报等专业学位的入学考试也采用这种联考模式,并称之为管理类专业学位联考。

2012 年管理类专业学位联考综合能力考试和外语考试的考试时间均为 3 小时,外语满分为 100 分,综合能力考试满分为 200 分。英语考试科目为面向专业学位考生的注重语言运用能力的“英语二”,外语科目选考日语或俄语的考生,用全国硕士研究生统一招生考试的试卷。

2012 年管理类专业学位联考综合能力考试的目的是测试考生运用数学基础知识、基本方法分析和解决问题的能力,分析、推理和论证等逻辑思维能力,文字材料理解能力、分析能力以及书面表达能力。综合能力考试在内容结构上与国际上通行的 GMAT 考试基本一致,试卷由问题求解、条件充分性判断、逻辑推理和写作四部分组成。

问题求解和条件充分性判断题型涉及初等数学等数学基础知识,但不同于通常的数学考试,问题求解题和条件充分性判断题本质上是以数学题的形式为载体测试考生分析与解决问题的能力。

逻辑推理试题的内容涉及自然和社会各个领域,但并非测试有关领域的专门知识,也不测试逻辑学专业知识,而是测试考生对各种信息的理解、分析、综合、判断,并进行相应的推理、论证与评价等逻辑思维能力。

写作题部分综合考查考生的分析、论证能力和文字表达能力,写作题分两种类型。

一是论证有效性分析,论证有效性分析题的题干为一段有缺陷的论证,要求考生对此做出分析与评论。分析与评论的内容由考生根据试题自己决定。

二是论说文,论说文的考试形式有三种:命题作文、基于文字材料的自由命题作文、案例分析。每次考试为其中的一种形式。要求考生在准确、全面地理解题意的基础上,写出思想健康、观点明确、材料充实、结构严谨、条理清楚、语言规范、卷面整洁的文章,鼓励考生结合实际发挥创造性。

英语考试的目的是测试考生的英语综合运用能力。专业硕士学位项目培养的是社会需要的应用型人才,对其英语水平和技能的要求有别于对研究型人才的要求。专业硕士学位项目入学考试的英语科目重点考查考生的英语应用能力,尤其是阅读和翻译能力。管理类专业硕士学位联考的英语科目采用全国硕士研究生入学统一考试“英语二”试卷。

“英语二”要求考生较熟练地掌握 5 500 个左右常用英语词汇以及相关常用词组,能熟练地运用基本的语法知识,包括:(1)名词、代词的数和格的构成及其用法;(2)动词时态、语态的构成及其用法;(3)形容词与副词的比较级和最高级的构成及其用法;(4)常用连接词的词义及其用法;(5)非谓语动词(不定式、动名词、分词)的构成及其用法;(6)虚拟语气的构成及其用法;(7)各类从句(定语从句、主语从句、表语从句等)及强调句型的结构及其用法;(8)倒装句、插入语的结构及其用法。

“英语二”还要求考生能读懂包括经济、管理、社会、文化、科普等不同题材和包括说明文、议论文和记叙文等不同体裁的文字材料。要能够理解文字材料的主旨要义,理解作者的意图、观点或态度;要能够理解文中的具体信息,理解语篇的结构和上下文的逻辑关系,并进行一定的判断和推理;要能够根据具体语境、句子结构或上下文推断重要生词或词组的含义。

考生要能够根据所给的提纲、情景或要求,完成相应的短文写作。

为了帮助考生熟悉管理类专业学位联考的考试内容与考试形式,全国工商管理硕士入学考试研究中心组织编写了这套2012年MBA、MPA、MPAcc入学考试辅导教材。这套教材也适用于报考新设立的旅游管理、工程管理、图书情报等专业学位的考生备考。多位专家参加了教材的编写和修改工作。英语考试辅导教材主要由徐永负责修改。综合能力考试辅导教材的数学基础知识与应试指导部分主要由邵光砚负责编写,逻辑推理基础知识与应试指导部分主要由陈慕泽负责编写;王飞燕、陈慕泽负责编写试题解析,其他部分主要由仝允桓负责修改,全书由仝允桓统筹。王萍等为本书的出版做了大量具体的工作。应当强调指出的是,这套教材是在以往MBA联考考前辅导教材内容的基础上修改和重新编写而成的,是自1996年参加编写历年MBA联考辅导教材的众多专家、教授共同劳动的结晶。本书编委会的委员、全国MBA教育指导委员会的许多专家以及各MBA培养院校的许多教授都对本书的编写给予了具体的指导或提出了很有价值的意见。广大读者也对本书的内容和结构提出了有益的建议。机械工业出版社华章公司的同志对本书的出版给予了大力的支持,在此向所有为本书的编写、修改和出版做出过贡献的人士表示诚挚的感谢。

作为考前辅导教材,本书内容力求简明扼要,尽量适应读者备考的需要。但由于经验和水平所限,本书难免有疏漏和不足之处。欢迎广大考生、各招生院校的辅导老师及各方面的专家提出批评意见和宝贵建议,以便我们改进工作。批评和建议可发送到机械工业出版社华章公司。

通信地址:北京市西城区百万庄南街1号

邮政编码:100037

电子邮箱:jgbjb@hzbook.com

目录

前言

第一部分 数学基础知识 与应试指导

第一章 实数的概念、性质和运算	2
第一节 充分条件与条件充分性判断	2
一、充分条件	2
二、条件充分性判断	2
第二节 实数及其运算	4
一、实数的分类	4
二、实数的基本性质	4
三、实数的运算	4
四、实数的绝对值	6
第三节 比和比例	9
习题一	13
习题一参考答案	16
第二章 整式和分式	17
第一节 整式	17
一、整式的运算	17
二、多项式的因式分解	18
第二节 分式	20
一、分式的基本性质	20
二、分式的运算	20
习题二	22
习题二参考答案	25

第三章 方程和不等式	26
第一节 方程和方程组	26
一、一元一次方程及其解法	26
二、二元一次方程组	26
三、一元二次方程	27
第二节 不等式和不等式组	35
一、一元一次不等式(组)及其解法	35
二、一元二次不等式及其解法	35
三、含有绝对值的不等式的解法	36
习题三	43
习题三参考答案	47
第四章 集合与函数	49
第一节 集合	49
一、集合间的关系	49
二、集合的运算	50
第二节 函数	53
一、函数的相关概念和性质	53
二、一元二次函数	53
三、指数函数与对数函数	54
习题四	58
习题四参考答案	60
第五章 数列	61
第一节 基本概念	61
第二节 等差数列	63
第三节 等比数列	67

习题五	71	第四节 简单空间几何体的表面积 和体积	118
习题五参考答案	74	习题七	119
第六章 数据分析	75	习题七参考答案	123
第一节 排列组合	75	第八章 数学综合练习题与解析 ...	124
一、两个基本原理	75	第一节 问题求解综合练习题 与解析	124
二、排列与排列数公式	75	一、问题求解综合练习题	124
三、组合与组合数公式	76	二、问题求解综合练习题解析	127
第二节 数据分布的统计描述	78	第二节 条件充分性判断综合练习题 与解析	132
一、平均值	78	一、条件充分性判断综合练习题 ...	132
二、方差和标准差	81	二、条件充分性判断综合练习题 解析	134
三、统计图表	82	第二部分 逻辑推理基础知识 与应试指导	
第三节 概率初步	84	第九章 逻辑推理试题类型和 应试要点	138
一、随机事件	84	第一节 逻辑推理试题的基本 类型	138
二、古典概率	88	一、逻辑推理试题的类型	138
三、概率的加法公式	90	二、知识强相关型逻辑试题	139
四、概率的乘法公式	92	三、知识弱相关型逻辑试题	141
五、事件的独立性与贝努里定理 ...	94	四、知识“强相关”与“弱相关” 型试题的异同	141
习题六	100	五、知识强相关型试题涉及的 知识点	142
习题六参考答案	104	六、知识弱相关型试题涉及的 知识点	142
第七章 几何与平面解析几何		七、独立能力型逻辑试题	143
初步	105		
第一节 常见的平面几何图形	105		
一、两条直线的位置关系	105		
二、三角形	105		
三、四边形	107		
四、圆	107		
第二节 平面解析几何基本公式 ...	110		
一、平面直角坐标系	110		
二、平面解析几何基本公式	111		
第三节 直线与圆的方程	113		
一、直线	113		
二、圆	114		

第二节 逻辑推理试题的结构		三、形式推理无效性的判定	205
与难度	144	四、论证	206
一、逻辑推理试题的结构	144	五、论证的结构分析	207
二、逻辑推理试题的难度	146	第二节 概念分析	208
三、综合能力逻辑推理考试的		一、内涵和外延	208
命题依据	150	二、集合概念和非集合概念	209
第三节 逻辑推理备考与应试		三、外延关系	210
要点	150	四、欧拉图方法	211
一、阅读与理解题干	150	五、定义和划分	214
二、应对干扰项	154	第三节 同一律、矛盾律和排中律 ...	216
三、对“如果为真”的理解	156	一、同一律	216
四、“能”和“最能”	157	二、互相矛盾和互相反对	217
五、选择与排除	159	三、矛盾律和排中律	217
六、解题的关键点	160	四、预设	218
七、若干应试技巧	162	五、样题解析	219
第十章 知识强相关型试题的知识		第十二章 逻辑推理试题的主要类型 ...	221
要点及其运用	163	第一节 论证评价	221
第一节 命题的逻辑关系及其		一、论证的相关性	221
推理	163	二、论证的假设	223
一、命题的基本知识	163	三、加强论证	224
二、条件关系	166	四、削弱或质疑论证	225
三、等值公式	171	第二节 语义辨析	227
四、推理公式	176	一、理解	227
第二节 对当关系	188	二、概括	229
一、直言命题对当关系	188	三、评价	230
二、算子、量词的对偶与否定	192	四、解释	231
三、样题解析	194	五、识别	233
第三节 知识“强相关”样题解析 ...	197	六、确定焦点	234
第十一章 知识弱相关型试题知识		第三节 逻辑推断	237
要点及其应用	202	一、直接推断	237
第一节 推理和论证	202	二、复杂推断	238
一、推理	202	第四节 谬误识别	240
二、形式推理与非形式推理	204	一、循环定义	240
		二、定义过宽或定义过窄	241

三、偷换概念与混淆概念	241	二、论据要确凿充足	367
四、诉诸无知	243	三、论证要严密	368
五、非黑即白	244	第三节 论说文的结构	370
六、以偏赅全	244	一、引论	370
七、不当两不可	245	二、本论	371
八、不当类比	246	三、结论	371
九、集合体误用	246	第四节 论说文的语言	373
十、强置因果	247	一、准确性	374
十一、倒置因果	248	二、鲜明性	375
十二、样本不当	248	三、生动性	375
十三、形式谬误	249	第五节 论说文试题及范文	376
第五节 类比分析	250	一、历年 MBA 联考论说文写作	
一、类比的评价	250	题目	376
二、确定类比对象	250	二、模拟试题及范文	380
三、结构的类比	252	第十五章 论证有效性分析	386
四、谬误的类比	254	第一节 论证有效性分析概述	386
第六节 数字比例	255	一、论证有效性分析及其特点	386
第七节 因果关系	260	二、论证有效性分析的要点	387
一、求因果五法	260	三、论证有效性分析练习题	387
二、样题分析	261	第二节 历年 MBA 联考论证有效性	
第十三章 逻辑推理练习题与解析 ..	265	分析试题及解析	388
第一节 逻辑推理练习题	265	第三节 论证有效性分析常见	
第二节 逻辑推理练习题解析	324	问题与讲评	396
第三部分 写作应试指导		第四部分 最新试卷及模拟试题	
第十四章 论说文	362	第十六章 最新试卷与解析	402
第一节 审题与立意	362	2008 年春季入学 MBA 联考综合	
一、审题	362	能力试卷	402
二、立意	364	2008 年春季入学 MBA 联考综合	
三、全面注意写作的具体要求	366	能力试题解析	413
第二节 论点、论据与论证	366	2008 年秋季入学 MBA 联考综合	
一、论点要正确鲜明	366	能力试卷	422

2008 年秋季入学 MBA 联考综合	
能力试题解析	433
2009 年春季入学 MBA 联考综合	
能力试卷	444
2009 年春季入学 MBA 联考综合	
能力试题解析	455
2009 年秋季入学 MBA 联考综合	
能力试卷	464
2009 年秋季入学 MBA 联考综合	
能力试题解析	474
2010 年春季入学 MBA 联考综合	
能力试题	484
2010 年春季入学 MBA 联考综合	
能力试题解析	494
2010 年管理类专业学位联考综合	
能力试卷	503
2010 年管理类专业学位联考综合	
能力试题解析	514
2011 年春季入学 MBA 联考综合	
能力试卷	523

2011 年春季入学 MBA 联考综合	
能力试题解析	534
2011 年管理类专业学位联考综合	
能力试卷	541
2011 年管理类专业学位联考综合	
能力试题解析	553

第十七章 模拟试题	561
模拟试题一	561
模拟试题一参考答案	571
模拟试题二	572
模拟试题二参考答案	582

附录 A 全国 MBA 培养院校名录 ...	583
------------------------	-----

附录 B 历年 MBA 入学考试的基本情况	585
-----------------------------	-----

附录 C 近两年 MBA 联考各校报考和录取人数	586
--------------------------------	-----



第一部分 数学基础知识与应试指导

管理类专业学位联考综合能力考试中的数学基础部分主要考查考生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力和数据处理能力,通过问题求解和条件充分性判断两种形式来测试。

试题涉及的数学知识范围有算术、代数、几何和数据分析方面的内容。

算术部分包括整数及其运算(整除、公倍数、公约数、奇数、偶数、质数、合数)、分数、小数、百分数、比与比例、数轴与绝对值。

代数部分包括整式及其运算、整式的因式与因式分解、分式及其运算、函数(集合、一元二次函数及其图像、指数函数、对数函数)、代数方程(一元一次方程、一元二次方程、二元一次方程组)、不等式(不等式的性质、均值不等式、简单绝对值不等式、简单分式不等式、不等式求解、一元一次不等式、一元二次不等式)、数列(等差数列、等比数列)。

几何部分包括平面图形(三角形、矩形、平行四边形、梯形、圆与扇形)、空间几何体(长方体、圆柱体、球体)、平面解析几何(平面直角坐标系、直线方程与圆的方程、两点间距离公式与点到直线的距离公式)。

数据分析部分包括计数原理(加法原理、乘法原理、排列与排列数、组合与组合数)、数据描述(平均值、方差与标准差、数据的图表表示)、概率(事件及其简单运算、加法公式、乘法公式、古典概型、贝努里概型)。

对于多数管理类专业学位硕士教育项目的考生而言,以上所列数学基础知识都是常识。从备考的角度来看,并不需要系统讲解。本书第一部分将在简明扼要地介绍以上知识的基础上,着重结合管理类专业学位联考综合能力考试中的试题类型讨论这些基础知识的运用。

第一章

实数的概念、性质和运算

第一节 充分条件与条件充分性判断

一、充分条件

【定义 1.1】 由条件 A 成立，就可以推出结论 B 成立(即 $A \Rightarrow B$ 是真命题)，则说 A 是 B 的充分条件。

若 A 是 B 的充分条件，也可以说：A 具备了使 B 成立的充分性。若 $A \not\Rightarrow B$ ，则说 A 不是 B 的充分条件，也可以说：A 不具备使 B 成立的充分性。

例如：A 为 $x > 3$ ；B 为 $x > 2$

当 $x > 3$ 时，由 $3 > 2$ ，

故必有 $x > 2$ 成立。

故 A 为 $x > 3$ 是 B 为 $x > 2$ 的充分条件，或说，对于 B 为 $x > 2$ 的成立，A 为 $x > 3$ 具有充分性。

显然，对于 A 为 $x > 3$ 的成立，B 为 $x > 2$ 不具有充分性。

又如： $x - 1 > 2$ 不是 $3 < x < 7$ 的充分条件，同样 $x + 2 < 9$ 也不是 $3 < x < 7$ 的充分条件。但 $x - 1 > 2$ 与 $x + 2 < 9$ 联合起来，即 $x - 1 > 2$ 且 $x + 2 < 9$ ，对于 $3 < x < 7$ 的成立具有充分性。

二、条件充分性判断

【例 1.1】 条件充分性判断

解题说明：本题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论。阅读每小题中的条件(1)和(2)后选择

- (A) 条件(1)充分，但条件(2)不充分
- (B) 条件(2)充分，但条件(1)不充分
- (C) 条件(1)和(2)单独都不充分，但条件(1)和条件(2)联合起来充分
- (D) 条件(1)充分，条件(2)也充分
- (E) 条件(1)和(2)单独都不充分，条件(1)和(2)联合起来也不充分

1. 方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 成立

(1) $x = -1$

$$(2)(x-4)^2 \leq 0, x \in \mathbf{R}$$

【解】 由条件(1) $x = -1$, $x + 1 = 0$, 所以 $(x-4)(x+1) = 0$, 即 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 成立(或将 $x = -1$ 直接代入所给方程进行检验)。

所以条件(1)充分。

由条件(2)得 $x = 4$, 所以 $x - 4 = 0$ 即 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 成立, 所以条件(2)也充分。

故此题应选 D。

2. 将一篇文章录入计算机, 录入人员甲比录入人员丙效率低

(1) 录入人员甲与录入人员乙合作, 需 2 小时录完

(2) 录入人员乙与录入人员丙合作, 需 1 小时 30 分钟录完

【解】 条件(1)与条件(2)显然单独均不具备使录入人员甲比录入人员丙效率低的充分性。

下面考虑条件(1)和条件(2)联合:

由于甲、乙合作所需时间大于乙、丙合作所需时间, 所以甲比丙录入速度慢, 即甲的效率比丙低。

也可以用如下的计算方法:

设甲单独录入需 x 小时录完, 丙单独录入需 y 小时录完。

由条件(1), 乙每小时录入量为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{x}$, 再由条件(2)得

$$\frac{1}{y} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$$

$$\text{所以} \quad \frac{1}{y} = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{6} > \frac{1}{x}$$

即甲每小时完成的工作量小于丙每小时完成的工作量, 所以甲的效率比丙低。

故此题应选 C。

3. 要使 $1/a > 1$ 成立

(1) $a < 1$

(2) $a > 1$

【解】 由于 $a = -1$ 满足条件(1), 但 $1/a = -1$ 不大于 1, 即题干不成立, 所以条件(1)不充分。

由条件(2), 当 $a > 1$ 时, $1/a$ 的分母大于分子(分子、分母均为正数), 应有 $1/a < 1$ 成立, 故 $1/a > 1$ 不成立, 条件(2)也不充分。

将条件(1)与(2)联合, 同时满足这两个条件的 a 值不存在, 故 $1/a > 1$ 不成立, 因此, 条件(1)和(2)联合起来也不充分。

故此题应选 E。

由上述例题可以得出结论: 条件充分性判断题的求解过程即为以下三个命题中某几个命题真假的判定:

① 条件(1)成立, 则题干结论成立。

② 条件(2)成立, 则题干结论成立。

③ (1)与(2)两个条件都成立, 则题干命题成立。

注意: 本书中, 所有条件充分性判断题中的 A、B、C、D、E 5 个选项所规定的含义, 均以本节为准, 即

(A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分

(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分

- (C) 条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和(2)联合起来充分
 (D) 条件(1)充分,条件(2)也充分
 (E) 条件(1)和(2)单独都不充分,条件(1)和(2)联合起来也不充分
 以后不再重复说明。

第二节 实数及其运算

一、实数的分类

$$\text{实数} \begin{cases} \text{有理数} \begin{cases} \text{整数(正整数、零和负整数)} \\ \text{分数(正分数和负分数)} \end{cases} \\ \text{无理数(即为无限不循环小数)} \end{cases}$$

注意:

1. 自然数集是非负整数集,是由正整数和零组成的。
2. 整数还有以下两种分类方法:

$$\begin{aligned} \text{整数} & \begin{cases} \text{偶数} & 2n \\ \text{奇数} & 2n \pm 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ \text{正整数} & \begin{cases} 1 \\ \text{质数(也称为素数,它只有1和自身两个约数)} \\ \text{合数(有除1和自身以外的约数)} \end{cases} \end{aligned}$$

两个相邻整数必为一奇一偶。除了最小质数2是偶数以外,其余质数均为奇数。任何一个合数都能分解为若干个质因数之积。

3. 有理数是能表示为 $\frac{n}{m}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^+$) 形式的数,这是它与无理数本质的区别。

二、实数的基本性质

1. 实数与数轴上的点一一对应。
2. 若 a, b 是任意两个实数,则在 $a < b$, $a = b$, $a > b$ 中有且只有一个关系成立。
3. 若 a 是任意实数,则 $a^2 \geq 0$ 成立。

三、实数的运算

实数的加、减、乘、除四则运算符合加法和乘法运算的交换律、结合律和分配律。下面着重讨论一下实数的乘方和开方运算。

1. 乘方运算

(1) 当实数 $a \neq 0$ 时, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;

(2) 负实数的奇数次幂为负数;负实数的偶数次幂为正数。

2. 开方运算

(1) 在实数范围内,负实数无偶次方根;0的偶次方根是0;正实数的偶次方根有两个,它

们互为相反数,其中正的偶次方根称为算术根。如:当 $a>0$ 时, a 的平方根是 $\pm\sqrt{a}$,其中 $\sqrt{a}$ 是正实数 a 的算术平方根。

(2)在运算有意义的前提下, $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$ 。

【例 1.2】问题求解

1. 已知 3 个质数的倒数和为 $\frac{1}{1986}$,则这三个质数的和为

(A) 334 (B) 335 (C) 336 (D) 338 (E) 不存在满足条件的三个质数

【分析】因为 $1986=2\times 3\times 331$,所以这三个质数可能是 2, 3 和 331。检验它们三个是否满足条件: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{331}=\frac{5}{6}+\frac{1}{331}=\frac{5\times 331+6}{1986}=\frac{1661}{1986}$ 。所以这三个质数的和为 336,故此题应选 C。

2. 有 5 个最简正分数的和为 1,其中的三个是 $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$,其余两个分数的分母为两位整数,且这两个分母的最大公约数是 21,则这两个分数的积的所有不同值的个数为

(A) 2 个 (B) 3 个 (C) 4 个 (D) 5 个 (E) 无数多个

【分析】因为 $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}=\frac{26}{63}$,所以其余两个分数之和为 $\frac{26}{63}$ 。由于这两个分数的分母都是两位数,且它们的最大公约数是 21,故它们只可能是 21 和 63(由于它们是最简分数,所以很容易排除 42 和 63, 84 和 63 这两种可能)。设这两个分数为 $\frac{m}{21}$ 和 $\frac{n}{63}$ (m, n 是正整数),由 $\frac{m}{21}+\frac{n}{63}=\frac{26}{63}$,可得 $3m+n=26$ 。由于 $1\leq 3m\leq 25$,所以 $1\leq m\leq 8$ 且 m 不能是 3 或 7 的倍数,故 m 只能是 1, 2, 4, 5, 8。又因为 n 不能是 3, 7 或 9 的倍数,故只有 $m=1, n=23$; $m=2, n=20$; $m=5, n=11$; $m=8, n=2$ 四组解。故此题应选 C。

3. 把无理数 $\sqrt{5}$ 记作 a ,它的小数部分记作 b ,则 $a-\frac{1}{b}$ 等于

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2 (E) 以上答案均不正确

【分析】因为 $4<5<9$,所以 $2<a<3$,故 $\sqrt{5}$ 的整数部分是 2,即 $b=a-2$,所以 $a-\frac{1}{b}=a-\frac{1}{a-2}=\frac{a^2-2a-1}{a-2}=\frac{5-2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-2}=\frac{-2(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}-2}=-2$ 。故此题应选 D。

【例 1.3】条件充分性判断

1. $x=\frac{199}{100}$ 成立

$$(1) x = \frac{198 + \left(\frac{1}{23456}\right)^0}{(2002 + 2000 + 1998 + \cdots + 4 + 2) - (2001 + 1999 + 1997 + \cdots + 3 + 1)}$$

$$(2) x = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100}$$

【解】条件(1)中式子的分子 $=198+1=199$,分母 $=(2002-2001)+(2000-1999)+\cdots+(4-3)+(2-1)=1+1+\cdots+1=1001$,即 $x \neq \frac{199}{100}$,所以条件(1)不充分。