

数学文化 $\odot$ 欣赏

潘建辉 李 玲 编著

*Culture and
Appreciation
of Mathematics*

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学文化与欣赏

潘建辉 李 玲 编著

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是关于数学文化介绍与数学美欣赏的著作,而非纯数学理论专著。本书可供大学本专科各专业以及文科类研究生,作为数学文化或数学欣赏课程的教材使用,也可供数学教师或数学爱好者阅读。

本书主要从数学史、数学美、数学家、数学思想和数学人文等角度,介绍了数学文化,揭示了数学思想,展现了数学之美。

本书取材典型、内容翔实、图文并茂,力图用最精简的篇幅涵盖数学文化中的精华和经典内容。全书共精选了 100 多个典型案例和 160 多幅图表,内容不仅涉及几乎所有的数学分支以及艺术与科学的众多学科,而且还包含数学的最新与最前沿领域和关于数学文化的最新信息与观点。此外,每章还配有适量的课后习题供教学选用。

图书在版编目(CIP)数据

数学文化与欣赏 / 潘建辉, 李玲编著. —北京: 北京理工大学出版社, 2012.8

ISBN 978-7-5640-6286-6

I. ①数… II. ①潘… ②李… III. ①数学-文化-高等学校-教材
IV. ①O1-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 159214 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (办公室) 68944990 (批销中心) 68911084 (读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京兆成印刷有限责任公司

开 本 / 710 毫米×1000 毫米 1/16

印 张 / 20

字 数 / 370 千字

版 次 / 2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷

定 价 / 89.00 元

责任编辑 / 葛仕钧

申玉琴

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 王美丽

图书出现印装质量问题, 本社负责调换

目前,我国高校普遍存在科学课程与人文课程分离的状况,导致人文类学生科学素养欠缺和理工类学生人文素养不足。因此,我们有必要使科学课程人文化,人文课程科学化。

其次,数学具有高度的抽象性、严密的逻辑性和追求形式化的特点,这使得不少学生,尤其是人文类学生,感到数学枯燥、难学,甚至可憎。同时,大多数数学教材没有并且也难以将数学的美、可爱和好玩的一面充分展现出来,这就使得数学教育有远离生活、远离大众之虞,这也不利于学生了解数学文化,掌握数学思想,提高数学素养。

再次,无论是人文社科类还是自然科学类大学生,虽然学了多年的数学,但他们仍然对数学的思想和精神了解得比较肤浅,对于数学的宏观认识和总体把握较差,而这些数学素养反而是数学让人终身受益的精华。

另外,在我国现有教育体制下,即使是数学专业的学生,他们对数学文化和数学美的了解和认识也是十分有限的,而且大多数学生,学习数学并不是因为数学很美,数学可爱和数学好玩,而是因为数学考试和专业基础所需,以及日后工作所迫。

综上所述,高校开设数学文化和数学欣赏课就显得十分必要。为此,我们在对数学文化的大量理论研究和数学史课程的长期教学实践基础上,编著了《数学文化与欣赏》这本教材,以飨高校本专科各专业以及文科类研究生的数学文化或数学欣赏课程的教学。

本教材不追求形式的完整性和材料的系统性,而是重在内容的趣味性、可读性和材料的典型性、教育性。本书的写作尽量避免过度的数学化,力求生动形象、通俗易懂。因此,本书有以下两个突出特点:

(1) 内容丰富而新颖。本书搜集了 100 多个大小案例,附有 160 多幅图表,其中内容不仅涉及几乎所有的数学分支,而且还涉及文学、音乐、美术、法学、计算机科学、生命科学、经济学等其他众多学科知识;不仅涉及最新、最前沿的数学领域,而且还搜集了最新的数学文化信息,吸收了最新的数学文化观点。

(2) 案例典型而有趣. 本书 100 多个案例中, 大到对数学精彩片段、数学家群体、数学思想方法、数学美、数学与其他学科等的选取, 小到对阐述某个观点的例子设计, 都力图做到典型、生动、有趣和有价值. 如数学中的最美等式、数学的奇异美和数学与艺术等, 都是读者喜爱的、有趣的典型案例.

但是, 由于数学是一个如此广泛而深刻的知识领域, 而且目前关于数学文化方面的教材可供借鉴的极少, 再加上作者水平所限, 本书必定存在不少疏漏, 作者诚恳地欢迎读者对书中的问题和不足予以批评指正, 以便我们进一步更正、修订.

本书共八章, 其中第四章由李玲撰写, 第五章由李玲和潘建辉撰写, 其余各章均由潘建辉撰写, 并对全书统稿. 书中注有“*”号的为选学部分, 无“*”号的章节, 教师也可根据学生基础和专业特点进行取舍. 使用本教材时, 教师可采用讲授法、讨论法、阅读法或三者的结合. 需要教材电子文档和课件的读者, 可发邮件至 panjh@cqupt.edu.cn 向作者索取.

在本教材的编写过程中, 作者参考了国内外大量文献, 其中书籍类的主要参考文献已列于书后, 杂志和网络类文献因零散、庞杂而未列出. 在此, 我们对未被列出的文献作者深表歉意. 同时, 本书从上述书籍、杂志和网络文献中汲取了丰富的营养, 我们对这些文献的作者均表示衷心的感谢!

另外, 在教材撰写过程中, 作者曾得到邓志颖博士、胡学刚教授、郑继明教授和虞继敏教授的指点, 也曾得到邱东博士和学生袁静的帮助. 尤其是孙春涛老师, 他不仅为本书提供了部分资料, 而且还提出了许多修改建议, 使得我们在编写本书时受益匪浅, 这里我们对他们(她)们的付出一并表示感谢!

最后, 我们还要感谢为此书付出心血的北京理工大学出版社的编辑, 他们为本书的顺利出版付出了辛劳.

重庆邮电大学数理学院

潘建辉

2012 年 7 月

第一章 纵览数学 / 1

第一节 数学与我们 / 1

- 一、数学与我们须臾不离 / 1
- 二、数学使我们聪明强大 / 2
- 三、现代大学生需要良好的数学素养 / 3

第二节 如何看待数学 / 4

- 一、数学的含义 / 4
- 二、从数学研究的“数量”看数学 / 5
- 三、历代大师看数学 / 8
- 四、数学与其他学科的区别 / 9

第三节 数学的形成与发展 / 10

- 一、萌芽时期的数学 / 10
- 二、初等时期的数学 / 12
- 三、高等时期的数学 / 16
- 四、现代数学 / 18

习题 / 21

第二章 数学的几个精彩篇章 / 22

第一节 微积分的产生与发展 / 22

- 一、微积分思想的萌芽 / 22
- 二、微积分思想的酝酿 / 23
- 三、微积分理论的创立 / 25
- 四、微积分的严格化 / 28
- *五、微积分的应用与新分支的形成 / 30

第二节 几何学的革命 / 35

一、欧几里得与《几何原本》 / 35

二、非欧氏几何的形成与确认 / 38

三、射影几何的繁荣 / 45

四、几何学的统一 / 47

第三节 美丽的分形 / 51

一、分形理论的创始人蒙德尔布罗 / 51

二、分形几何的产生 / 52

三、分形几何简介 / 53

四、分形几何学的应用 / 58

五、分形图片欣赏 / 59

习题 / 62

第三章 数学与艺术 / 63

第一节 数学与文学 / 63

一、数学与文学的关系 / 63

二、数字入诗诗添彩 / 64

三、数学问题诗歌化 / 66

四、数学在文学研究中的应用 / 68

第二节 数学与美术 / 69

一、美术家对美术中数学原理的探索 / 69

二、数学在美术中的广泛应用 / 70

三、美术使抽象的数学思想形象化 / 72

四、现代数学技术促成了美术创新 / 76

第三节 数学与音乐 / 76

一、数学与音乐的关系 / 76

二、乐谱和乐器中的数学 / 77

三、律学中的数学 / 79

四、和声中的数学 / 82

五、数学与音乐交相辉映 / 83

习题 / 84

第四章 数学与科学 / 85

第一节 数学与法学 / 85

一、数学对法律文化的影响 / 85

二、数学在法律实务中的应用 / 87

三、数学方法在法学研究中的应用 / 90

第二节 数学与生命科学 / 91

- 一、植物界的数学 / 91
- 二、动物界的数学 / 94
- 三、数学走进生命科学 / 101

第三节 数学与计算机科学 / 109

- 一、电子计算机的诞生 / 109
- 二、数学思想方法在计算机科学中的应用 / 114
- 三、计算机影响下的数学 / 119

第四节 数学与经济学 / 125

- 一、数学与西方经济学 / 125
- 二、博弈论 / 129
- 三、波浪理论中的斐波那契数列 / 132
- 四、按揭贷款问题 / 134
- 五、诺贝尔经济学奖中的金融数学 / 136

习题 / 140

第五章 例谈数学思想方法 / 141

第一节 无限的思想方法 / 142

第二节 类比的思想方法 / 148

第三节 抽象的思想方法 / 155

第四节 “变中求不变”的思想方法 / 157

习题 / 159

第六章 数学美欣赏 / 160

第一节 对数学美的认识 / 160

- 一、大家对美的看法 / 160
- 二、大家对数学美的看法 / 161
- 三、应该如何看待数学美 / 162

第二节 数字美 / 163

- 一、亲和数 / 163
- 二、完美数 / 164
- 三、卡普雷卡数 / 166

第三节 黄金分割数 / 167

- 一、黄金分割的含义及其来历 / 167
- 二、数学中的黄金数 / 167
- 三、黄金分割与人 / 170

- 四、黄金分割与艺术 / 171
- 五、黄金分割与自然现象 / 173
- 六、黄金分割与军事 / 174
- 七、黄金分割与“优选法” / 176

第四节 最美的数学等式 / 176

- 一、“ $e^{i\pi}+1=0$ ”在选美赛中脱颖而出 / 176
- 二、“ $e^{i\pi}+1=0$ ”的身世介绍 / 177
- 三、“ $e^{i\pi}+1=0$ ”中的美丽元素 / 177

第五节 数学的奇异美 / 180

第六节 数学无处不美 / 189

习题 / 191

第七章 数学家群雕像 / 192

第一节 史上第一位数学家及“四大天王” / 192

- 一、史上第一位数学家——泰勒斯 / 192
- 二、数学之神——阿基米德 / 194
- 三、站在巨人肩膀上的人——牛顿 / 198
- 四、数学英雄——欧拉 / 202
- 五、数学王子——高斯 / 206

第二节 杰出的华人数学家代表 / 209

- 一、三世纪最杰出的数学家——刘徽 / 209
- 二、圆周率的精算大师——祖冲之 / 211
- 三、中世纪的世界数学泰斗——秦九韶 / 213
- 四、中世纪最伟大的数学家——朱世杰 / 215
- 五、只有初中文凭的国际数学大师——华罗庚 / 218
- 六、微分几何之父——陈省身 / 220
- 七、醒着就要思考数学的大数学家——樊畿 / 222
- 八、当今最杰出的华人数学家——丘成桐 / 226
- 九、其他杰出华人数学家 / 228

第三节 别样的数学家 / 232

- 一、业余数学之王——费马 / 232
- 二、多才多艺的伟大数学家——莱布尼茨 / 235
- 三、陨落的数学巨星——阿贝尔 / 237
- 四、划过数学天空的流星——伽罗瓦 / 239
- 五、几何学界的哥白尼——罗巴契夫斯基 / 242
- 六、发了疯的伟大数学家——康托尔 / 245

- 七、史上第一位女数学家——希帕蒂娅 / 249
- 八、史上第一位院士女数学家——柯瓦列夫斯卡娅 / 251
- 九、迄今最伟大的女数学家——诺特 / 254
- 十、数学第一家族——伯努利家族 / 257

习题 / 261

第八章 数学文化掠影 / 262

第一节 关于数学基础的三大学派 / 262

- 一、引起数学基础问题讨论的罗素悖论 / 262
- 二、逻辑主义学派 / 263
- 三、直觉主义学派 / 264
- 四、形式主义学派 / 265

第二节 数学家共同体 / 266

- 一、数学发展中心的变迁 / 266
- 二、早期的数学家专业社团 / 268
- 三、国际数学联盟与国际数学家大会 / 268
- 四、当今世界著名数学研究所 / 270

第三节 数学猜想 / 271

- 一、希尔伯特的 23 个问题 / 271
- 二、七大千禧年数学难题 / 274
- 三、几个著名猜想的证明历程 / 278

第四节 数学竞赛 / 287

- 一、国际数学奥林匹克竞赛 / 287
- 二、大学生数学建模竞赛 / 288
- 三、全国大学生数学竞赛 / 290

第五节 著名数学奖 / 290

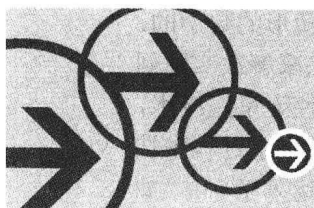
- 一、国际著名数学奖 / 290
- 二、国内的重要数学奖 / 294

第六节 中国数学发展概述 / 295

- 一、中国数学的起源 / 296
- 二、中国数学体系的形成 / 296
- 三、中国数学发展的高峰 / 298
- 四、中西数学的融合 / 300
- 五、中国现代数学 / 301

习题 / 303

参考文献 / 304



第一章 纵览数学

1

数学是什么？数学与我们有何关系？数学是怎样形成的？让我们带着这些疑问，推开进入数学殿堂的大门吧。

第一节 数学与我们

一、数学与我们须臾不离

古希腊哲学家毕达哥拉斯说，万物皆数，数统治着宇宙；伽利略说，自然界这部无字天书是用数学语言写成的；黑格尔说，数学是上帝描绘自然的符号。我国数学家、数学教育家华罗庚教授说，宇宙之大、粒子之微、火箭之速、生物之谜、日用之繁，无处不用数学。这些都说明，一切宇宙现象和规律的背后都隐藏着数学。因此，生活在世界上的每一个人须臾都离不开数学。

首先，从出生那一刻起，人就开始和数学打交道，并且再也没有离开过数学。出生时，产房里的婴儿、母亲、医生、护士、产床就构成了各自的集合，其中婴儿和他（她）们的母亲就建立了对应关系。同时，婴儿不仅有出生日期、时辰、时刻、身长、体重、体温、心率、血压、血脂数、血糖量等，而且这些数量都符合一定的统计规律。如血压高于某值就是高血压，低于某值就是低血压，等于零就没有生命了。然而，即使一个人血压为零，数学还是没有离他而去。所以，人从生到死须臾都离不开数学。

其次，我们从早到晚，一刻也没有离开过数学。早上一睁开眼，我们就以一定的速度爬起来，按从里到外的顺序穿好衣服，接着洗漱、梳妆、整理、规划、出门，然后开始一天的忙碌，这一连串行为里就包含许多数学。接下来的这一天里，无论是从大街小巷、车辆行人，还是电脑电视、报纸手机上，你到处都会接触到数学。天气预报、商品折扣、股票指数、走势曲线、可能预测、存款利率，甚至经济统计图、价格分析表，以及指数增长、随机取样、线性规划、数字地球等各种数学术语，都铺天盖地而来了。即使你什么都不看，什么都不想，你还是无法与数学绝缘，因为

你从出门到回家一天的行踪，就是你在三维空间里画出的函数曲线，最后你还得以点的形式回到你那长方体房间的矩形床上结束一天的奔波。因此，任何人，尤其是现代人，即使你无意识、被动地使用数学，也离不开、避不了如影随形的数学的。

最后，任何理智的人随时都在有意或无意地运用数学思想和方法来解决实际问题。如烧水泡茶时，你需要清洗茶杯，向杯中放茶叶，清洗水壶，往壶里注冷水，开火烧水，向杯中倒开水冲茶。为节约时间，几乎每个人都知道要在烧水过程中洗茶杯，放茶叶，而不是洗了茶杯放好茶叶后再去洗壶烧水。这就是《运筹学》中“如何安排各道工序，使总时间最短”的规划问题。

又如，你出门前要根据天气情况决定是否带伞，这实际就是在做概率题。你估计下雨的可能性很小就不带雨伞，可能性很大就带伞。但实际情况可能是，你带了伞天未下雨，未带伞天却下雨了。同样，在你等车时也会遇到同样的概率问题，一辆装满乘客的车停在面前，你要盘算是否上车。若是节假日乘车高峰期，你估计下辆车会同样拥挤，就会选择上车；若是普通日期，你估计很快就会有较空的车到来，就会选择不上。一个人的一生中会遇到许许多多类似的情况，如填报志愿，应聘工作，选择朋友，规划人生道路等，在做每一个决定时，你都是在做概率题。只不过，没有概率系统知识或生活经验的人，他的大多数抉择都是在碰运气，而有经验或主动运用概率知识的人才可能做出科学的决策。因此，每个有自主意识的人，都是在不断做概率题中度过一生的。

二、数学使我们聪明强大

人们充分运用数学知识，不仅能避免愚蠢行为，而且能使自己成为竞争中的强者。例如，齐王赛马的故事，我们都已经耳熟能详。一天，战国时期的齐王与其大臣田忌比赛跑马，规定双方各出上、中、下三等马各一匹。由于齐王各等马都占优势，若他们按同等级的马对抗，则齐王可获全胜。于是田忌的谋士孙臆给他出了个主意，叫他用下马对齐王的上马，用上马对中马，用中马对下马。结果田忌反以二比一获胜。这在一般人看来，田忌十分聪明，智慧过人，但从数学的角度看，这是十分平常的，他不过运用了运筹学的对策论原理而已。

又如，托尔斯泰在他的小说《一个人需要很多土地吗》中有这样一则故事：一个叫巴河姆的人到草原上去买地，卖主卖地的方法很特别。任何一个买地的人，只要交 1 000 卢布，他便可以在一天之内，从太阳出山开始行走，由草原上任一点出发，在草原上走到太阳落山。如果在日落之前，他回到了出发点，那么，他这一天所走的路线所围住的土地，就算是他买到的土地；如果他在日落前没有回到出发点，那么，他就一寸土地也得不到，白白丢掉这 1 000 卢布。

巴河姆认为这样的规定真是有利可图，便爽快地交了 1 000 卢布。第二天太阳刚刚升起，巴河姆就在草原上迈开了大步。他先沿一条直线一口气走了 10 俄里，然后向左拐弯 90° ，又沿直线走了很远很远，才又向左拐弯 90° ，继续前进了 2

俄里。这时他发现天色已晚。至此他总共走了 24.7 俄里的路程。于是他不得不改变前进方向，径直向出发点跑去。巴河姆终于在日落前又跑了 15 俄里赶回到了出发点。但是，当他停下时，脚跟尚未站稳，他便两腿一软，扑倒在地，口吐鲜血，一命呜呼了。

巴河姆付出了生命的代价，究竟换来了多少土地呢？1 俄里等于 1.066 8 千米，他这一天共跑了 42.35 千米，围成了一块面积约 13 万亩的直角梯形土地。一下子弄到 13 万亩土地，不可谓不多，但是人都死了，再多的土地还有什么意义呢？

这个故事对于那些贪婪的人来说是一个讽刺，然而其讽刺意义还不止于此。喜爱数学的托尔斯泰在作品中还有更深刻的寓意：巴河姆贪心，并且也很愚蠢。如果他按一个正方形的路线行走，围同样大的面积，只需行走 37 千米，少走 5 千米多；如果他按一个圆形的路线走，围同样大的面积，则可以少走 9 千米多。亦即，这里包含着另一个数学问题：在同等面积的情况下求最小周界。如果巴河姆懂得这个道理，也许他既能得到 13 万亩土地，又不至于累死。还是贪婪加无知葬送了他的性命。由此看来，懂得并善于运用数学是多么重要啊！

三、现代大学生需要良好的数学素养

（一）什么是数学素养

爱因斯坦说：“你把所学的数学定理、数学公式、数学的解题方法都排除、都忘掉以后，还剩下的东西，就是数学素养。”因此，通俗地说，数学素养，就是把所学的数学知识都排除或忘掉后，所剩下的东西。在此意义下，数学素养包括：

- （1）从数学的角度看问题的习惯；
- （2）有条理的理性思维，严密的思考、求证，简洁、清晰、准确地表达的意识；
- （3）在解决问题和总结工作时，逻辑推理的方式和能力；
- （4）对所从事的工作，合理的量化和简化，周到的运筹帷幄的素养。

从数学专业的角度来说，数学素养则包括：

- （1）主动探寻并善于抓住数学问题的背景和本质的素养；
- （2）熟练地用准确、简明、规范的数学语言表达自己数学思想的素养；
- （3）具有良好的科学态度和创新精神，合理地提出新思想、新概念、新方法的素养；
- （4）对各种问题以“数学方式”理性地思维，从多角度探寻解决问题的方法的素养；
- （5）善于对现实世界中的现象和过程进行合理的简化和量化，建立数学模型的素养。

以上这些数学素养，特别是通俗意义下的数学素养，都是使人终身受益的。一个人进入社会以后，所从事的工作可能与数学没有直接的关系，他们学过的数学公式、定理、解题方法，可能一个也用不上，甚至一辈子都没有用过，但是由于他们数学素

养高低的不同，其工作效率却会显著不同。他们每说一段话，做一个交谈，或者与外商的一次谈判，是不是能够抓住中心，有条不紊地叙述，都和数学素养密切相关。

（二）为什么现代大学生需要良好的数学素养

数学的重要性体现在三个层面：一个人不识字可以生活，但是若不识数，就很难生活；一个学科只有当它成功地运用数学的时候，才算达到了成熟的程度；一个国家科学的进步，可以用它消耗的数学来度量。

数字化、信息化、网络化时代的今天，不仅每一项高新技术的背后都有数学的身影，而且高新技术本质上就是数学技术。因此，现代国家之间的竞争，本质上是数学技术的竞争。不仅所有自然科学都是以数学作为研究发展的基础和工具，而且现代的人文科学对数学的需求也越来越多，越来越依靠数学来提升其科学水平。例如，现代经济学的规律，都要用数学公式、数学图表来反映和表示。近几十年的诺贝尔经济学奖获得者，多半是经济学界的数学家，或者是精通数学的经济学家。甚至以前与数学从无关系的文学、史学和诗歌研究，也引进了数理统计的方法，从而获得了新的科学发展的增长点。

因此，任何人想要在自己的专业或行业中有所作为，都必须具备一定的数学知识、较好的数学素养和较高的数学思维。作为现代大学生的你，不管就读什么学校、什么专业，都必须学习一定的数学知识，了解一定的数学文化，养成良好的数学素养。

第二节 如何看待数学

数学是什么，其属性、地位和作用如何呢？下面就从“数量”的、历史的和历代大师等角度来讨论这些问题。

一、数学的含义

数学（Mathematics）一词来自希腊语“μαθηματικά”^①，最初意为“某种已学会或被理解的东西”或“某种已获得的知识”，甚至是“通过学习可获得的知识”。经过一段较长时期后，“数学”一词才从表示一般的知识转换到专门表示数学专业上来。亚里士多德认为，“数学”一词的专门化使用源于毕达哥拉斯。对于毕达哥拉斯学派来说，数学是一种“生活的方式”^②。此时，数学是个复数名词，是算术、几何、天文学和音乐这四门学科的统称。

数学是一个历史的概念，它的研究内容随着历史的演进在不断地扩展和深化。因此，人们对它的认识也在不断丰富和深入。

① 王春陵. 数学的思维与发展. 长春: 吉林科学技术出版社, 2006.

② [美] 塞路蒙·波克纳. 数学在科学起源中的作用. 李家良, 译. 湖南: 湖南教育出版社, 1992: 14-15.

大约在公元前 6 世纪前, 由于认识的局限, 人们对自然了解甚少, 此时, 算数几乎是数学的全部. 因而, 人们把研究“数”的学问称为数学.

后来, 由于古希腊数学的兴起, 欧氏几何的出现, 数学发展进入了常量数学或初等数学阶段. 这时的数学只有代数和几何, 它研究的“数”是常量, “形”是简单、孤立的几何形体. 因此, 数学被称为是研究“数”与“形”的学问.

直到 17 世纪中叶, 因笛卡儿将直角坐标系引入数学, 牛顿、莱布尼茨创立微积分, 数学的发展才步入变量数学时期, 即高等数学或近代数学时期. 变量数学中的“量”是变量, “形”是曲线和曲面. 在此期间, 人类社会除了在原有基础上产生了非欧氏几何、群论、分析等外, 还产生了研究数学自身的纯数学. 因此, 如果我们将数学看成是“研究现实世界中的空间关系和数量关系的科学”, 就不太确切了.

20 世纪初以来, 因康托尔集合论的产生, 数学进入了飞速发展的现代数学时期. 数学在近 100 年里发展和派生出来的内容与分支, 远远超过了它之前所有内容的总和. 现代数学研究的对象不再是传统意义上的“数”与“形”了, 它研究的是一般的集合、各种空间和流形, 很难区分数和形的范畴. 现代数学具有公理化、结构化、统一化、泛函化、非线性、不确定性、高度抽象性、广泛应用性等特点. 因此, 我们很难用一句话来概括数学的内容和本质. 目前, 较普遍被人们接受的观点是: “数学是研究模式的科学, 其目的是要揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性.” 亦即, 数学是研究数量、结构、变化以及空间模型等的学科.

二、从数学研究的“数量”看数学

历史表明, 数学的发展不仅表现为量的积累, 而且还表现为质的飞跃. 数学在研究内容的数量特征方面的演化也不例外, 经历了四次重大转折: 从算术到代数, 从常量数学到变量数学, 从必然数学到或然数学, 从明晰数学到模糊数学.

(一) 数系及算数的产生与发展

从结绳记事以来, 人类由自然数开始逐步有了数的概念. 由于人有十个手指, 所以多数民族建立了十进位制的自然数表示法. 除此之外, 世界历史上还产生过许多其他的计数法和进位制, 如古巴比伦记数法、希腊记数法、罗马记数法、中国记数法等. 其中, 一些进位制在当今仍被普遍使用着, 如时间中的 60 进位制, 月年换算的 12 进位制、由《易经》演化而来的二进制等. 当印度人发明了零的记号“0”后, 才有了对自然数完整的认识. 表示数的记号传入伊斯兰世界, 目前通用的阿拉伯数字就形成了.

算数主要是用加减乘除四种运算对有理数进行日常生产、生活问题的计算. 算术运算起初只需要有加法的概念, 乘是多次加的简化运算, 减是加的逆运算, 除是乘的逆运算, 这就是四则运算. 除法很快导致了分数的出现, 以十、百等为分母的

除法, 简化表达就是小数和循环小数. 还有负数, 比如欠别人的钱如何表示, 这就出现了负数. 以上这些数放在一起, 就是有理数, 可以表示在一个数轴上.

很长时间以来, 人们曾以为数轴的点对应的都是有理数, 后来才发现, 若正方形的边长是 1, 则它的对角线长就无法用有理数表示, 以对角线的长用圆规在数轴上找到的那个点就是无理点. 无理数的出现导致了“第一次数学危机”. 后来一位数学家还严格证明了 π 也是无理数. 这样, 将无理数纳入之后, 有理数与无理数统称为实数, 数轴也称为实数轴. 人们发现, 如果我们在实数轴上随机地取点, 得到有理数的概率几乎是零, 得到无理数的概率几乎是 1. 因此, 无理数比有理数多得多.

为了解决负数的开平方问题, 于 16 世纪, 数学界出现了虚数 i ; 虚轴与实轴垂直交叉形成一个复平面, 数也发展成为由虚部和实部组成的复数. 后来, 人们又创造出了四元数、八元数等. 数的概念还在继续发展之中.

(二) 代数

代数是研究数、数量、关系与结构的数学分支. 代数与算术的主要区别在于它要引入未知数, 根据问题的条件列方程, 然后解方程求未知数的值. 代数是符号的运算.

代数可分为初等代数和抽象代数. 初等代数主要是在实数范围内进行“加、减、乘、除、乘方、开方、指数、对数”八则运算, 主要研究与方程有关的问题. 其中的运算不再像算数那样, 只是对具体的数进行运算, 而是对符号进行运算, 但此时的符号仅代表数. 在求五次以上的一般代数方程解的过程中, 产生了群、环、域等概念, 从而产生了群论、代数数论、线性代数. 这就标志着抽象代数的产生.

抽象代数又称近世代数, 它是研究各种抽象的公理化代数系统的数学学科. 抽象代数中的符号不再局限于代表数, 还可以表示向量、矩阵、变换等更广的对象, 且研究的重点不再是运算, 而是结构. 抽象代数包含群、环、Galois 理论、格论等许多分支, 并与数学其他分支相结合产生了代数几何、代数数论、代数拓扑、拓扑群等新的数学学科. 抽象代数已经成了当代大部分数学的通用语言.

(三) 变量数学

算术、初等代数、初等几何和三角学, 都以常量即不变的数量和固定的图形为其研究对象, 因此被称为常量数学. 到了 17 世纪, 人们为解决当时自然科学中的几类典型问题, 迫切需要研究变化着的量以及它们间的依赖关系, 于是产生了变量与函数的概念, 进而产生了变量数学. 牛顿用物理力学推动了微积分的产生, 莱布尼茨从求曲多边形的面积出发推动了微积分的产生, 两人的工作殊途同归. 目前的微积分符号的记法, 都是莱布尼茨最先采用的. 牛顿和莱布尼茨的微积分都运用了极限的思想和无穷小的分析方法. 但此时的微积分还很不严密, 存在许多漏洞, 于是出现了“第二次数学危机”.

有了微积分,一系列新的数学分支如雨后春笋般涌现出来,如级数理论、微分方程、偏微分方程、微分几何等。级数是无穷项数列的求和问题;微分方程是另一类方程,它们的解不是数而是函数,多元的情况下就出现了偏微分概念和偏微分方程;微分几何是关于曲线和曲面的一般理论;将实数分析的方法推广到复数域中就产生了复变函数论。由于集合论、实数理论的出现,使微积分最终进一步严格化。至此,第二次数学危机才得以消除。

(四) 概率论和数理统计

前面涉及的量,无论是常量还是变量都是确定的量。但自然界中存在大量的随机现象,其中存在很多不确定的、不可预测的或具有偶然性的量,由此产生了概率论及统计学等相关分支。

目前,概率论与数理统计的理论与方法已广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中。如,预测和滤波被应用于空间技术和自动控制,时间序列分析被应用于石油勘测和经济管理,马尔科夫过程与点过程统计分析被应用于地震预测等。同时,它又向基础学科、工科学科渗透,与其他学科相结合发展成为边缘学科,这是概率论与数理统计发展的一个新趋势。

(五) 模糊数学

前面涉及的数量,无论是常量还是变量,也无论是确定的量还是随机的量,它们都是“精确”的,但自然界、人类社会,甚至人的精神世界中存在大量不能精确刻画的模糊现象。人类的自然语言中,绝对精确的语言是不多的。我们平时说话,写文章,甚至给术语下定义,都大量地使用模糊语言。如,他很帅,他们班的学风好,她擅长舞蹈,今天有点冷等。这里的“很帅”“班风好”“擅长”和“有点冷”就是一些模糊的概念。尽管语言是模糊的,但意思却是明确的。模糊数学就是将模糊问题数学化的一个数学分支。

现代数学是建立在集合论基础上的。经典集合论中,元素对集合的隶属关系必须是明确的,绝不能模棱两可。如,1属于奇数集合,2不属于奇数集合,即一个元素要么属于,要么不属于某个集合,两者必居其一,且只居其一。这时元素对于集合的隶属度要么为1,要么为0。但模糊数学则是建立在模糊集合理论之上的。

所谓模糊集合,就是一个模糊概念所指对象的全体,如“老年人”就是一个模糊集。假设70岁以上的人是绝对的老人,40岁以下是绝对的年轻人。也就是说,70岁以上的人属于“老年人”这个集合的隶属度为1,而40岁以下的人属于该集合的隶属度为0,40~70岁的隶属度就介于0与1之间,55岁可以是半老,隶属度为0.5,60岁的隶属度是0.8。

模糊数学主要研究以下三方面内容:①模糊数学的理论,以及它与精确数学、随机数学的关系;②模糊语言学、模糊逻辑;③模糊数学的应用。

模糊数学是一门新兴的学科,其他学科,尤其是人文、社会等“软科学”的数学化、定量化趋向,把模糊性的数学处理问题推向了中心地位。目前,模糊数