Mathematical Modeling
Methods and Application

数学建模方法与应用

主编◎侯进军　肖艳清
谭　敏　高明柯

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学建模方法与应用/侯进军等主编. —南京：东南大学出版社，2012.7

ISBN 978-7-5641-3646-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①侯… Ⅲ.①数学模型—高等学校—教材 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 153215 号

数学建模方法与应用

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号
邮　　编	210096
网　　址	http://www.seupress.com
责编电话	(025)83790510
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京玉河印刷厂
开　　本	880mm×1230mm　1/32
印　　张	8.25
字　　数	245 千字
版　　次	2012 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-3646-8
印　　数	1—3000 册
定　　价	25.00 元

(本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系。电话：025—83791830)

前 言

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学，数学的应用不仅在其经典的领域——工程技术、经济领域有着越来越重要的作用，而且不断地向一些新的领域渗透。20 世纪以来，随着科学技术和计算机技术的发展，人们对解决各类问题的要求越来越精确，数学科学的地位也发生了巨大的变化，数学也成为当代科技发展的一个重要组成部分，数学也开始变成一种能够普遍实施的技术，“高技术本质上是数学技术”的观点已被越来越多的人所接受。

数学建模课程自 20 世纪 80 年代进入我国大学以来，课程建设发展迅猛。我国于 1992 年开始开展全国大学生数学建模竞赛活动，迄今已有 20 年，数学建模竞赛受到了全国各界的普遍关注。20 年的建模实践表明，综合运用数学知识、理论和方法解决实际问题，是当代大学生必不可少的技能，是培养具有竞争力、可持续发展的高素质人才的必不可少的手段。现在，越来越多的企业在招聘人才时，对学生的数学建模能力的要求也变高，很多数学类的本科生也因其良好的数学建模能力进入一些优秀企业工作。

教育应该面向经济与社会发展的实际需要，因此越来越多的高等学校开设数学建模课程，一些学校将数学建模课程在专业培养方案中确定为学位课程，从教学法规上确定了数学建模课程的重要基础性地位。

数学建模课程的建设是一项系统工程，它涉及师资队伍、教学内

容、教学方法与手段、教材建设等方面，其中教材建设是重要的一环。作者多年来在从事数学建模教学以及指导大学生参加数学建模竞赛的培训实践的同时，收集了大量的教学资料，积累了丰富的经验，为了满足数学建模精品课程建设的需要，编写了这本书。

本书的主要内容分为七章：第一章介绍数学建模的基本概念及应用，第二章介绍了微分动力系统建模的方法及其在建模中的应用，第三章介绍了优化建模的方法及其应用，第四章介绍了数据处理的基本知识及其在建模中的应用，第五章从数据分析的角度阐述常用的数据建模方法及其应用，第六章对综合评价方法建模技巧以及应用进行了阐述，第七章综合论述了常用的数学建模算法的设计及应用。书后的附录对一些常用的计算软件的使用进行了介绍。

本书的特点主要有以下几个方面：一是内容精练，实例丰富。本书的内容具体针对常用的数学建模方法进行论述，并将部分全国大学生数学建模竞赛的试题作为案例讲述建模方法的应用，论述严谨。二是注重阐述解决实际问题时数学建模的分析与方法，对学生科学思维方式和创造能力的培养有一定的指导价值。三是提供了学生学习时课外素材的选择范例，能起到以点带面的效果，学生的自主学习能力在本书的教学实践中可得到良好的训练。本书的知识内容、范围、深度及广度能满足理工科学生对数学建模能力培养的要求，适合于在一定取舍下 40 左右学时的本科生教学要求。

本书的出版得到了东南大学出版社的支持与帮助，在此表示感谢。

由于作者水平有限，书中内容的选取、结构与案例选取及分析方面难免有遗漏和不当之处，恳请同行专家、使用本教材的师生以及其他读者提出宝贵意见，以便我们做进一步的改进。

目 录

第三章　优化建模方法与案例分析

第四章　数据分布拟合、回归分析方法及建模案例

第五章　数据分析方法与建模案例分析

第六章　综合评价方法与建模案例

第一章 数学建模基础

1.1 什么是数学建模

1.1.1 数学模型

数学模型(Mathematical Model)并不陌生,很多数学建模教材都有表述.简单地说,**数学模型是用数学语言对实际问题的表述**.这里"数学语言"包括文字语言、图形(几何的)、含字母的式子(代数的)、数据表等;这里的"实际问题"是问题的本身或客观对象的抽象(也就是平常所说的定义),或问题的结论(其内在规律的描述,也就是平常所说的定理).

例如:我们说平面上两个圆相离,可以用如下数学模型来表示:设两个圆的半径分别为 r_1、r_2,两个圆心的距离为 d,如果 $r_1+r_2<d$,则称两个圆相离.这个数学模型表述的是问题本身,即平面上两个圆相离的代数定义(当然也可用图形—几何的方式表述).

另外,设圆的半径 r,数学模型 $L=2\pi r$ 表示的是圆的周长 L 与圆的半径 r 的内在关系.

很多人只注意到数学模型可以表达实际问题的内在规律(结论或定理),而忽视数学模型表达问题本身.因此,特别强调,数学模型既可以表示问题的定义,又可以表达实际问题的某个结论.

1.1.2 数学建模

按上面的定义,数学建模(Mathematical Modeling)**是如何用数学**

语言表述并解决实际问题的过程.

数学建模是一个动作，一个研究、思考、解决问题的过程. 因此，数学建模能力的培养有利于研究问题、思考问题、解决问题的能力的提高.

因为数学模型既可以表示问题的定义，又可以表达实际问题的内在关系. 也就是说，我们既可对问题本身来数学建模，又可以对实际问题的内在关系来数学建模.

例如：平面曲线光滑的定义——对"光滑"的数学建模：如何用数学语言表述平常生活上所说的"光滑"？生活上平面曲线光滑的理解应该是自然弯曲，没有断点，没有折拐(即尖点)，即没有突然的变化，在数学上什么表示"变化"？当然是导数—切线的斜率. 如果某曲线是光滑的，那么曲线的切线沿着曲线运动，它的变化是自然的，既没有断，也没有突兀. 反过来，如果线不光滑，则曲线的切线可能没有或可能发生突然变化. 即可以用切线是否连续变化来定义是否光滑，因此，可以用该曲线的导函数的连续性来定义光滑.

通常，对实际问题的内在规律的建模问题不胜枚举，因此淹没了对问题本身的建模(定义的数学表述). 在大多数学教科书中，一般直接给出某个概念的定义，学生往往只记住这个定义最多理解这个定义，很少琢磨这个定义是如何表述出来的，即很少研究定义的数学建模过程.

现在，有了数学建模的概念，回过头去看数学主干课程的教科书，研究一下那些概念是如何提出的，如何表达(建模)的，这对数学的抽象过程、数学思想方法的理解是大有裨益的. 你会看到数学不是那么枯燥的、晦涩的，而是自然的、有趣的.

1.2 数学建模的意义

现代数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段. 对于现代的工业技术和现代化而言，数学则更是表述技术原理，进行复杂工程设计与计算的必不可少的工具. 中外大量的教育实践事实充分显示：优秀的数学教育，是一种人的理性的

思维品格和思辨能力的培育,是聪明智慧的启迪,是潜在的能动性与创造力的开发.

现代数学的教育,应该达到以下两个目的:第一,学习掌握基本数学概念、知识、方法、思想;第二,能运用所学的数学知识解决实际问题.

数学从一开始就是为了实际的应用而产生的,数学的许多重要的发现与原理(如微积分)都是顺应实际应用的需要而产生的,数学在本质上就是为了解决实际问题.因此数学的教学,不仅要使学生学到许多重要的数学概念、方法和结论,而且应该在传授数学知识的同时,使他们学会数学的思想方法,领会数学的精神实质,知道数学的来龙去脉.数学建模就是实现实际问题数学化的过程.用数学建模思想分析数学知识点的方法,本质上就是该数学知识点的发现与应用过程.因此,在讲述某个数学知识点时,应该先从具体的实际问题入手,利用已有的数学知识和该问题的常识性知识,探讨新的解决该问题的方法,这一过程的实现就是数学建模思想在数学知识点学习和分析中的实现.显然,这种方法既能使学生掌握该知识点的实际源头和发现研究过程,又能使学生掌握其应用的背景,这无疑是传统的数学教学思想所不能实现的.

既然数学知识点的本质是为了解决实际问题,而解决这个问题的过程就是数学建模的过程,那么,用数学建模的思想与数学建模的语言来描述一个数学知识点无疑是追本溯源、着眼应用的一个最好的途径.例如,概念的理解与表述在数学学习中具有关键性的地位,而数学概念的建立本身就是一个数学建模过程,用数学建模思想来表达数学知识点与数学概念的本质是一致的.

开设数学建模课程的意义主要体现在以下几点:

(1) 能够还原数学理论的发现、抽象、发展过程,符合学习的认知规律;

(2) 在教学中能很好实现师生的互动,能将枯燥、抽象的数学知识在趣味中获得,激发学习兴趣,提高教学效果;

(3) 在发现、抽象、发展中培养并提高学生的科学研究素养.

“数学建模”课程的开设可以极大地提高学生学数学、用数学的积

极性和主动性，为培养高素质、创新型人才发挥重要作用. 传统的大学数学教育由于其对象是面向少数“精英”，所以在教学内容上缺少多层次与多样化的培养目标要求，在教学过程中偏重理论的系统性、严谨性，对数学的应用性缺乏足够的认识. 随着大学教育从“精英教育”转向“普及型教育”的发展，特别是计算机技术的发展为数学在各个领域的应用提供了强有力的工具，传统的教学内容和方式已经不能满足现在的需要. 针对不同学科专业学生对数学学习与应用的不同需求这一实际情况，改革既有的大学数学教学内容，拓展大学数学应用的途径已经成为众多高校数学教师的共识. **解决这个问题的一个好的途径就是将数学建模的思想融入到大学数学的教学与应用实践之中.**

当前的“数学建模”课程是作为补充课程在高年级开设的，如果在数学主干课程的教学中融入了数学建模的思想、方法. 可以预见，不久的将来，数学建模作为一门课程的使命就可以完成了.

1.3 数学建模的基本步骤

数学建模有如下步骤：

模型准备. 了解问题背景，明确建模目标，掌握研究对象的各种信息.

模型假设. 根据实际对象的特征和建模目的，对问题进行简化，用精确的语言进行假设，模型的假设往往需要反复修改.

模型的建立. 根据假设，用适当的数学工具刻画各变量之间的关系，建立相应的数学结构，尽量采用简单的数学工具.

模型求解. 对所建立的数学结构(模型)进行求解，求解需要运用数学知识、计算机知识，掌握常用的算法.

模型分析. 对求解结果进行数学上的分析(如误差)，或根据结果进行预测.

模型检验. 观测结果与现实情况以检验模型的合理性和适用性，通常模型不仅能够解释已知现象，还能预测一些未知现象. 其流程图如图 1.1 所示.

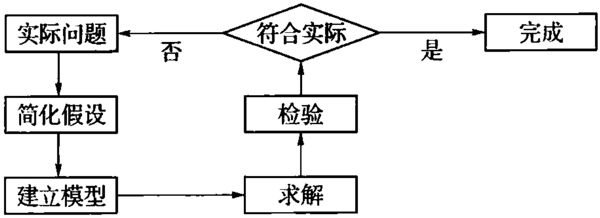

图 1.1　数学建模的基本步骤

1.4　数学建模的特点与分类

1.4.1　数学建模特点

数学建模是一个实践性很强的学科，它具有以下特点：

(1) 涉及广泛的应用领域，如物理学、力学、工程学、生物学、医学、经济学、军事学、体育运动学等. 完全不同的实际问题，在一定的简化层次下，它们的模型可能是相同或相似的. 这就要求我们培养广泛的兴趣，拓宽知识面，从而发展联想能力，通过对各种问题的分析、研究、比较，逐步达到触类旁通的境界.

(2) 需要灵活运用各种数学知识. 在数学建模过程中，数学始终是我们主要的工具，根据实际问题的需要，灵活运用各种数学知识，如微分方程、运筹学、概率统计、图论、层次分析、变分法等，去描述和解决实际问题. 这要求我们一方面要加深数学知识的学习；另一方面，更重要的是培养运用已学到的数学方法和思想进行综合应用和分析，进行合理的抽象及简化的能力.

(3) 需要各种技术手段的配合，如查阅各种文献资料、使用计算机和各种数学软件包等.

(4) 建立一个数学模型与求解一道数学题目有较大的差别. 求解数学题目往往有唯一正确的答案，而数学建模没有唯一正确的答案，对同一个实际问题可能建立起若干不同的模型.

因此，数学建模可以培养学生理解实际问题的能力(广博的知识面，收集信息、资料的能力)、抽象分析问题的能力(抓住主要矛盾，选择变量，进行归纳、联想、分析、类比)、运用工具的能力(数学工具，计

算机、自然科学)、实验调试能力(物理的、化学的、力学的、工程的、计算机的动手能力)、观察力与想象力(不拘于具体问题).

1.4.2 数学建模分类

按变量之间的关系来分:可分为代数模型、几何模型、积分模型等.

按结构来分:可分为分析模型、非分析模型、图论模型等.

按研究对象的特征分:可分为确定模型、随机模型、静态模型、动态模型、连续模型、离散模型、线性模型、非线性模型等.

按所用的数学方法分:可分为初等模型、微分方程模型、优化模型、统计模型、概率模型、控制论模型等.

按对象的领域分:可分为人口模型、交通模型、生态模型、经济模型、社会模型等.

第二章　微分方程建模方法与案例分析

2.1　常微分方程的建模方法基础

当我们描述实际对象的某些特性随时间(空间)而演变的过程、分析它的变化规律、预测它的未来性态,研究它的控制手段时,很自然地就会想到导数,通过分析变量的变化规律,建立相应的微分方程模型,最后通过相应的数学工具求解,从而解决实际问题. 下面以人口问题为例,描述建立微分方程模型及求解的过程.

我国是世界第一人口大国,地球上每 5 个人中平均就有一个中国人. 在 20 世纪的一段时间内我国人口的增长速度过快,见如下统计数据:

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	2000
人口(亿)	3.0	4.7	6.0	7.2	10.3	11.3	12.95

从上述统计数据可以看出:人口每增加 1 亿的时间在不断缩短.

认识人口数量的变化规律,建立人口模型,作出较准确的预报,是有效控制人口增长的前提. 长期以来,人们在这方面做了不少工作,下面介绍两种最简单的人口模型.

一、指数增长模型

200 多年前英国人口学家马尔萨斯(Malthus,1766—1834)调查了英国 100 多年的人口统计资料,得出了人口增长率不变的假设,并由此建立了著名的人口指数增长模型.

记初始时刻人口为 x_0，年增长率为常数 r，时刻 t 的人口为 $x(t)$. 当考察一个国家或一个较大地区的人口时，$x(t)$是一个很大的整数，若将人口数量单位取得很大时（如百万、亿等），可近似认为 $x(t)$是一个连续、可微的函数. 由于年增长率为常数，则单位时间内 $x(t)$的增量等于 r 乘以 $x(t)$. 那么在区间$[t,t+\Delta t]$上的人口增量为：

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$

令 $\Delta t\to 0$，得到 $x(t)$满足微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

这是一个简单的常微分方程，利用分离变量法容易得到方程的解为：

$$x(t) = x_0 e^{rt} \tag{2.1.2}$$

当 $r>0$ 时，(2.1.2)式表示人口将按指数规律随时间无限增长，称为指数增长模型.

(2.1.2)式中的参数 r 一经确定，则可以预测时刻 t 的人口. 利用最小二乘法，可以估计参数 r 的数值，这种参数估计的方法在后续章节中进行详细的介绍.

指数增长模型与 19 世纪以前欧洲一些地区人口统计数据可以很好的吻合，迁往加拿大的欧洲移民后代人口也大致符合；对短时间内人口预测也有较好的结果. 这是因为，在这些情况下，模型的基本假设（人口增长率是常数）大致成立. 但从长期来看，任何地区的人口都不可能无限增长，即指数增长模型不能描述和预测较长时期的人口演变过程. 这是因为，人口增长率事实上是在不断地变化着. 排除灾难、战争等特殊时期，一般说来，当人口较少时，增长较快，即增长率较大；人口增长到一定数量以后，受到自然资源、环境条件等因素的影响，增长就会慢下来（即增长受到了资源和环境的阻滞作用），增长率就会变小，并且随着人口的增加，这种阻滞作用越来越大. 可见人口增长率是人口数量的函数. 于是很自然地，我们应该对指数增长模型中的增长率 r 进行改进. 建立如下的阻滞增长模型.

二、阻滞增长模型（Logistic 模型）

由于阻滞作用体现在对人口增长率 r 的影响上，使得 r 随着人口

数量 x 的增加而下降. 若将 r 表示为 x 的函数 $r(x)$，则它应是减函数. 于是方程(2.1.1)写作：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r(x)x,\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{2.1.3}$$

对 $r(x)$ 的一个最简单的假设是：$r(x)$ 为线性递减函数，即

$$r(x)=r-sx\,(r>0,s>0)\tag{2.1.4}$$

(2.1.4)式中 r 称为固有增长率，表示人口很少时(理论上是 $x=0$)的增长率. 为了解释系数 s 的作用，引入自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量 x_{m}，称为人口容量. 当 $x=x_{\mathrm{m}}$ 时人口不再增长，即 $r(x_{\mathrm{m}})=0$，代入(2.1.4)式得 $s=\dfrac{r}{x_{\mathrm{m}}}$，则(2.1.4)式为：

$$r(x)=r\left(1-\frac{x}{x_{\mathrm{m}}}\right)\tag{2.1.5}$$

(2.1.5)式的另一种解释是，增长率 $r(x)$ 与人口尚未实现部分的比例 $\dfrac{x_{\mathrm{m}}-x}{x_{\mathrm{m}}}$ 成正比，比例系数为固有增长率 r.

将(2.1.5)式代入到(2.1.3)式中，得到：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\dfrac{x}{x_{\mathrm{m}}}\right),\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{2.1.6}$$

(2.1.6)式右端的因子 rx 体现人口自身的增长趋势，因子 $\left(1-\dfrac{x}{x_{\mathrm{m}}}\right)$ 则体现了资源和环境对人口增长的阻滞作用. 显然，x 越大，前一因子越大，后一因子越小，人口增长是两个因子共同作用的结果.

(2.1.6)式仍是一个常微分方程，利用分离变量法容易得到解函数为：

$$x(t)=\frac{x_{\mathrm{m}}}{1+\left(\dfrac{x_{\mathrm{m}}}{x_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}}\tag{2.1.7}$$

(2.1.7)式中参数 r，x_{m} 可以利用最小二乘法进行估计. 由(2.1.3)式和(2.1.4)式有：