

丛书主编 王 生 本册主编 曹瑞彬

# 启东中学



# 奥赛

精题详解

高中数学



南京师范大学出版社  
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS



启东中学，中国百强中学之一，1995—2009 年获国际奥赛奖牌 15 枚，被誉为：

“奥赛金牌的摇篮，清华北大的生源基地。”

奥赛训练教程初中数学  
奥赛训练教程初中物理  
奥赛训练教程初中化学  
奥赛训练教程高中数学  
奥赛训练教程高中物理  
奥赛训练教程高中化学  
奥赛精题详解初中数学  
奥赛精题详解初中物理  
奥赛精题详解初中化学  
奥赛精题详解高中数学  
奥赛精题详解高中物理  
奥赛精题详解高中化学

责任编辑：王书贞  
封面设计：罗薇



定价：22.00元

# 启东中学

## 奥赛

精题详解

主 编 曹瑞彬

作 者 王晓东 沈蒋峰

顾卫海 曹瑞彬

高中数学



南京师范大学出版社  
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

启东中学奥赛精题详解·高中数学/曹瑞彬主编.  
南京:南京师范大学出版社,2004.7

ISBN 978-7-81101-110-4/G·716

I. 启… II. 曹… III. 数学课—高中—解题  
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 062513 号

- 
- |        |   |
|--------|---|
| 书 名    | 启东中学奥赛精题详解(高中数学)  |
| 主 编    | 曹瑞彬   |
| 责任编辑   | 王书贞   |
| 出版发行   | 南京师范大学出版社   |
| 地 址    | 江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)                                      |
| 电 话    | (025)83598077(传真) 83598412(营销部) 83598297(邮购部)                   |
| 网 址    | <a href="http://press.njnu.edu.cn">http://press.njnu.edu.cn</a> |
| E-mail | <a href="mailto:nspzbh@njnu.edu.cn">nspzbh@njnu.edu.cn</a>      |
| 印 刷    | 江苏省如皋市印刷有限公司  |
| 开 本    | 850×1168 1/32   |
| 印 张    | 15.5  |
| 字 数    | 403 千   |
| 版 次    | 2009 年 9 月第 3 版 2009 年 9 月第 1 次印刷                               |
| 书 号    | ISBN 978-7-81101-110-4/G·716                                    |
| 定 价    | 22.00 元   |
- 

南京师大版图书若有印装问题请与销售商调换  
版权所有 侵犯必究





**曹瑞彬** 男, 1962年11月出生, 1983年毕业于南京师范学院数学系, 中学数学高级教师, 江苏省数学特级教师, 数学奥林匹克高级教练, 南通市数学学科基地业务负责人, 启东中学数学首席教师。长期从事数学教学研究工作及数学奥林匹克竞赛辅导工作, 近年来培养了一大批数学尖子, 其中有100多人获得全国数学联赛一等奖, 10位同学入选国家冬令营, 5位同学进入国家集训队, 陈建鑫同学获42届数学奥林匹克金牌。任班主任所送的2003届高三(1)班有20位同学考入清华、北大, 还有20位同学考入复旦、交大。主编了《奥林匹克教材》《向45分钟要效益》等数十本教辅用书, 在《中学数学》《教育研究》等杂志上发表了十多篇论文。

## 出版说明

江苏省启东中学是一所面向启东市(县级市)招生的四星级高中,也是中国百强中学之一,近年来取得的累累硕果引起教育界乃至全社会的关注。

1995年“世界第一才女”毛蔚同学夺得了第26届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,成为该项赛事开赛以来第一位获得金牌的女生;1996年蔡凯华同学在第37届国际中学生数学奥林匹克竞赛中夺得银牌,周璐同学获第28届国际中学生化学奥林匹克竞赛银牌;1998年陈宇翱同学在第29届国际中学生物理奥林匹克竞赛中荣获金牌;2001年施陈博同学夺得第32届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,同年,陈建鑫同学夺得第42届国际中学生数学奥林匹克竞赛金牌;2002年樊向军同学获第33届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,同张峰一起获亚洲物理奥林匹克竞赛金牌;2003年倪犇博同学获第35届国际中学生化学奥林匹克竞赛金牌;2004年李真同学获第35届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2006年朱力获第37届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2007年钱秉玺获第38届国际中学生物理奥赛金牌,并被授予“全国优秀共青团员”称号。

一所长江北岸、黄海之滨的农村中学,连续多年在不同学科的竞赛中摘金夺银,学校高考成绩也是令人惊讶的出色,被誉为“奥赛金牌的摇篮,清华北大的生源基地”。

“启东中学现象”自然也成为出版界瞩目的焦点,与“黄冈”一

样，“启东”很快成为教辅出版的热门题材。南京师范大学出版社较早注意到了启东中学教育、教学方面取得的卓然成绩，应该说，建社以来的多套双效图书中都有启东中学教学成果的反映，如《向45分钟要效益》《特级教师优化设计》《奥林匹克竞赛指导》《一课一练》等。把启东中学奥赛作为一个系列出版发行，是我社依托名校名师，实施“名品”战略迈开的又一新步伐。

迈开这一步，是我社与启东中学多年合作的结果，倚天时地利人和的优势，水到而渠成。

迈开这一步，是广大读者对南京师范大学出版社的热切期盼。读者对南京师范大学出版社“理念教辅”、“名品教辅”的关心与厚爱以及他们的需求，已成为我们的第一动力。

初中、高中各科《启东中学奥赛训练教程》以相应教材内容为基础，根据竞赛大纲并结合启东中学学生使用的新教材和各科竞赛辅导经验而编写，将竞赛与升学结合起来，尤其重视基础知识的学习和基本思维方法的培养，由浅入深，循序渐进。《启东中学奥赛精题详解》则将《训练教程》中的包括原创题目在内的对应习题给出详尽的解答，方便配套使用。

本丛书主编为启东中学校长王生博士，各分册的主编均是启东中学金牌教练，参加编写的老师长期从事一线教学和竞赛辅导工作，有丰富的经验和成功的方法。

我们期待广大读者能从这套书中感受启东中学的努力，领略启东中学的风采，解读启东中学的奥秘，欣赏启东中学的智慧，分享启东中学的成功！

南京师范大学出版社

# 目 录

## 第一章 集 合

- 第一节 集合的概念与运算 ..... (1)
- 第二节 有限集合的元素个数 ..... (7)
- 第三节 子集的性质 ..... (12)
- 第四节 综合题解 ..... (18)

## 第二章 函 数

- 第一节 函数概念 ..... (23)
- 第二节 函数的性质与图象 ..... (29)
- 第三节 二次函数、幂函数、指数函数与对数函数  
..... (39)
- 第四节 函数的最大值与最小值 ..... (49)
- 第五节 函数方程与迭代 ..... (57)

## 第三章 数 列

- 第一节 等差数列与等比数列 ..... (64)
- 第二节 数列的和与通项 ..... (70)



第三节	递归数列 .....	(80)
第四节	综合题解 .....	(86)

## 第四章 数学归纳法

第一节	数学归纳法的基本形式 .....	(93)
第二节	数学归纳法的其他几种形式 .....	(97)
第三节	归纳猜想与归纳构造 .....	(99)
第四节	综合题解 .....	(104)

## 第五章 三角函数

第一节	三角函数的性质 .....	(115)
第二节	三角函数的恒等变形 .....	(119)
第三节	三角不等式与三角极值 .....	(125)
第四节	反三角函数及三角方程 .....	(130)
第五节	综合题解 .....	(135)

## 第六章 向量

第一节	向量的概念及运算 .....	(141)
第二节	向量的应用 .....	(145)

## 第七章 不等式

第一节	不等式的解法 .....	(150)
第二节	证明不等式的常用方法 .....	(157)



第三节	重要不等式 .....	(164)
第四节	不等式的综合应用 .....	(171)
第五节	综合题解 .....	(175)

## 第八章 解析几何

第一节	直线与圆 .....	(188)
第二节	圆锥曲线 .....	(196)
第三节	轨迹与解析几何中的不等式 .....	(205)
第四节	综合题解 .....	(211)

## 第九章 立体几何

第一节	直线与平面的位置关系 .....	(218)
第二节	空间角与距离 .....	(225)
第三节	多面体与转体 .....	(230)
第四节	球 .....	(238)
第五节	综合题解 .....	(246)

## 第十章 平面几何

第一节	平面几何中的几个重要定理 .....	(255)
第二节	三角形的五心 .....	(261)
第三节	面积法与等积变换 .....	(266)
第四节	平面几何中的常用证题方法 .....	(273)
第五节	综合题解 .....	(276)

## 第十一章 排列组合与二项式定理

第一节	计数原理 .....	(284)
第二节	排列组合 .....	(287)
第三节	二项式定理 .....	(292)
第四节	综合题解 .....	(298)

## 第十二章 复数

第一节	复数的概念与运算 .....	(303)
第二节	复数与三角 .....	(313)
第三节	复数与几何 .....	(321)
第四节	综合题解 .....	(329)

## 第十三章 极限与导数

第一节	极限 .....	(336)
第二节	导数与函数的性质 .....	(341)
第三节	导数与函数的最值 .....	(346)
第四节	综合题解 .....	(348)

## 第十四章 排列组合和概率

.....	(355)
-------	-------



## 第十五章 数论初步

第一节	整数与数的整除性 .....	(360)
第二节	同余及其整除性 .....	(362)
第三节	不定方程 .....	(365)
第四节	综合题解 .....	(367)

## 第十六章 多项式

第一节	多项式的概念 .....	(371)
第二节	多项式的根与韦达定理 .....	(374)
第三节	多项式的插值与差分 .....	(378)
第四节	综合题解 .....	(382)

## 附:2008年数学竞赛精题详解

2008年全国高中数学联赛天津市预赛 .....	(388)
2008年全国高中数学联赛河北省预赛 .....	(397)
2008年全国高中数学联赛山西省预赛 .....	(407)
2008年全国高中数学联赛山东省预赛 .....	(414)
2008年全国高中数学联赛江西省预赛 .....	(428)
2008年浙江省高中数学竞赛 .....	(439)
2008年湖南省高中数学竞赛 .....	(448)
2008年全国高中数学联赛江苏赛区复赛 .....	(458)
2008年全国高中数学联赛 .....	(466)

# 第一章 集 合

## 第一节 集合的概念与运算

### 一、选择题

1. 若非空集合  $A = \{x | 2a + 1 \leq x \leq 3a - 5\}$ ,  $B = \{x | 3 \leq x \leq 22\}$ , 则能使  $A \subseteq A \cap B$  成立的所有  $a$  的集合是 ( )

- A.  $\{a | 1 \leq a \leq 9\}$                       B.  $\{a | 6 \leq a \leq 9\}$   
C.  $\{a | a \leq 9\}$                               D.  $\emptyset$

解析 选 B.

$\because A \cap B \subseteq A$ , 又  $A \subseteq A \cap B$ ,

$\therefore A = A \cap B. \therefore A \subseteq B$ .

$$\therefore \begin{cases} 2a + 1 \geq 3, \\ 3a - 5 \leq 22, \\ 2a + 1 \leq 3a - 5. \end{cases} \Rightarrow 6 \leq a \leq 9.$$

2. 设全集是实数集, 若集合  $A = \{x | \sqrt{x-2} \leq 0\}$ ,  $B = \{x | 10^{x^2-2} = 10^x\}$ , 则  $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B =$  ( )

- A.  $\{2\}$               B.  $\{-1\}$               C.  $\{x | x \leq 2\}$               D.  $\emptyset$

解析 选 D.

由  $\sqrt{x-2} \leq 0$ , 得  $x=2$ , 故  $A = \{2\}$ .

由  $10^{x^2-2} = 10^x$ , 得  $x^2 - x - 2 = 0$ , 故  $B = \{-1, 2\}$ .

$\therefore A \cap \complement_{\mathbf{R}} B = \emptyset$ .

3. 已知  $a$  为给定的实数, 那么集合  $M = \{x | x^2 - 3x - a^2 + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$  的子集的个数为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 4                      D. 不确定

解析 选 C.

$$\because \Delta = 9 - 4(2 - a^2) = 1 + 4a^2 > 0,$$

$\therefore M$  恒有 2 个元素,

$\therefore$  子集个数为  $2^2 = 4$ .

4. 若集合  $M = \{(x, y) \mid |\tan \pi y| + \sin^2 \pi x = 0\}$ ,  $N = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ , 则  $M \cap N$  的元素个数是 ( )

- A. 4                  B. 5                  C. 8                  D. 9

解析 选 D.

由非负数的和为零, 得

$$\begin{cases} \tan \pi y = 0, \\ \sin \pi x = 0. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = k (k \in \mathbf{Z}), \\ y = h (h \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

即集合  $M$  为坐标平面上整点的全体.

又由  $x^2 + y^2 \leq 2 = (\sqrt{2})^2$ , 得集合  $N$  为以原点为中心、 $\sqrt{2}$  为半径的闭圆内点所组成的点集.

可用画图来表明, 闭圆内部共有 9 个整点.

5. 设集合  $M = \{-1, 0, 1\}$ ,  $N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ , 映射  $f: M \rightarrow N$ , 则对任意的  $x \in M$ , 使得  $x + f(x) + xf(x)$  恒为奇数的映射  $f$  的个数为 ( )

- A. 122              B. 15              C. 50              D. 27

解析 选 C.

$$\text{令 } y = x + f(x) + xf(x).$$

显然, 当  $f(-1), f(0), f(1)$  取定, 则  $f(x)$  随之确定.

当  $x = -1$  时,  $y = x + f(x) - f(x) = x = -1$ ,  $y$  恒为奇数, 故  $f(-1)$  有 5 种可能选择;

当  $x = 0$  时,  $y = f(0)$ ,  $f(0)$  仅能为 3 和 5, 有 2 种选择;

当  $x = 1$  时,  $y = 1 + 2f(x)$ , 因  $f(x)$  是正整数,  $y$  恒为奇数, 故  $f(1)$  有 5 种选择.

$\therefore$  由乘法原理知, 使  $y$  恒为奇数的映射  $f$  共有  $5 \times 2 \times$

$5=50$ (种).

6. 设集合  $A = \left\{ \frac{n}{2} \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$ ,  $B = \{n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ ,  $C = \left\{ n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$ ,  
 $D = \left\{ \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$ , 则在下列关系中, 成立的是 ( )
- A.  $A \subsetneq B \subsetneq C \subsetneq D$                       B.  $A \cap B = \emptyset, C \cap D = \emptyset$   
 C.  $A = B \cup C, C \subsetneq D$                       D.  $A \cup C = B, C \cap D = \emptyset$

解析 选 C.

$$\begin{aligned} \therefore A &= \left\{ \frac{n}{2} \mid n \in \mathbf{Z} \right\}, B = \{n \mid n \in \mathbf{Z}\}, C = \left\{ n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbf{Z} \right\}, \\ D &= \left\{ \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \mid n \in \mathbf{Z} \right\}, \\ \therefore A &= B \cup C, C \subsetneq D. \end{aligned}$$

## 二、填空题

7. 设集合  $M = \{1, 2, \dots, 1\,000\}$ . 现对  $M$  的任一非空子集  $X$ , 令  $a_x$  表示  $X$  中最大数与最小值之和, 那么, 所有这样的  $a_x$  的算术平均值为\_\_\_\_\_.

解析 将  $M$  中非空子集进行配对, 对每个非空子集  $X \subset M$ , 令  $X' = \{1\,001 - x \mid x \in X\}$ , 则当  $X_1$  也是  $M$  的非空子集, 且  $X \neq X_1$  时, 有  $X' \neq X'_1$ , 于是所有非空子集除  $\{1, 2, \dots, 1\,000\}$  以外分为两类:

- (1)  $X' \neq X$ ,  
 (2)  $X' = X$ .

对于(2)中的  $X$ , 必有  $a_x = 1\,001$ .

对于(1)中的一对  $X$  与  $X'$ , 有  $a_x + a_{x'} = 1\,001 \times 2 = 2\,002$ .

由此可见所有  $a_x$  的算术平均值为  $1\,001$ .

8. 若集合  $M$  中的元素是连续自然数,  $\text{card}(M) \geq 2$ , 且  $M$  中元素之和为  $1\,996$ , 那么这样的集合  $M$  共有\_\_\_\_\_个.

解析 设  $M = \{a, a+1, \dots, a+n-1\}$ .

由于  $\frac{a+a+n-1}{2}n = 1\,996$ , 有  $n(2a+n-1) = 8 \times 499$ .



又  $n$  与  $2a+n-1$  有不同的奇偶性,且  $n < 2a+n-1$ , 499 为质数,只能是  $n=8$ ,解得  $a=246$ . 故  $M$  只有 1 个.

9. 点集  $\left\{ (x, y) \mid \lg\left(x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{9}\right) = \lg x + \lg y \right\}$  中元素的个数为\_\_\_\_\_.

解析  $\lg\left(x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{9}\right) = \lg x + \lg y \Leftrightarrow$

$$x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{9} = xy, x > 0, y > 0.$$

由均值不等式得  $x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{9} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot \frac{1}{3}y^3 \cdot \frac{1}{9}} = xy$ .

当且仅当  $x^3 = \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{9}$ , 即  $x = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}, y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  时上式等号成立. 故元素个数为 1.

10. 集合  $S = \{1, 2, 3, \dots, 18\}$  的五元子集  $S_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  中, 任何两个元素之差不为 1, 这样的子集  $S_5$  的个数共有\_\_\_\_\_个.

解析 作子集  $S'_5 = \{a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, a_4 - 3, a_5 - 4\}$ , 则  $S'_5$  与  $S_5$  一一对应, 而  $S'_5$  是  $\{1, 2, \dots, 14\}$  的五元子集, 有  $C_{14}^5 = 2002$  (个).

11. 已知  $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{x \mid 2^{1-x} + a \leq 0, x^2 - 2(a+7)x + 5 \leq 0, x \in \mathbf{R}\}$ , 若  $A \subseteq B$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

解析 易得  $A = (1, 3)$ .

设  $f(x) = 2^{1-x} + a, g(x) = x^2 - 2(a+7)x + 5$ .

要使  $A \subseteq B$ , 只需  $f(x), g(x)$  在  $(1, 3)$  上的图象均在  $x$  轴下方, 其充要条件是: 同时有  $f(1) \leq 0, f(3) \leq 0, g(1) \leq 0, g(3) \leq 0$  成立. 由此推出  $-4 \leq a \leq -1$ .

12. 已知集合  $M = \{(x, y) \mid y = \sqrt{2x - x^2}\}$ ,  $N = \{(x, y) \mid y =$



$k(x+1)$ }, 当  $M \cap N \neq \emptyset$  时,  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

解析有误, 不仅要求  $\Delta \geq 0$  还要求根在  $[0, 2]$  之间.  $M \cap N \neq \emptyset$  等价于方程  $k(x+1) = \sqrt{2x-x^2}$ ,  $k \geq 0$  有实数解. 显然  $0 \leq x \leq 2$ , 两边平方并整理, 有

$$(k^2+1)x^2+2(k^2-1)x+k^2=0,$$

$$x \text{ 有实数解, 则 } \Delta=4(k^2-1)^2-4k^2(k^2+1) \geq 0.$$

$$\text{解得 } -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 又 } k \geq 0, \therefore k \text{ 的取值范围是 } \left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right].$$

### 三、解答题

13. 设集合  $M = \{u \mid u = 12m + 8n + 4l, m, n, l \in \mathbf{Z}\}$ ,  $N = \{v \mid v = 20p + 16q + 12r, p, q, r \in \mathbf{Z}\}$ . 求证:  $M = N$ .

**证明** 若  $u \in M$ , 则存在  $m, n, l \in \mathbf{Z}$ , 使得  $u = 12m + 8n + 4l = 20n + 16l + 12(m - n - l) \in N$ . 从而  $M \subseteq N$ . ①

若  $v \in N$ , 则存在  $p, q, r \in \mathbf{Z}$ , 使得  $v = 20p + 16q + 12r = 12r + 8(2q) + 4(5p) \in M$ . 从而  $N \subseteq M$ . ②

由①②得  $M = N$ .

14. 已知集合  $A = \{x, xy, \lg(xy)\}$ ,  $B = \{0, |x|, y\}$ , 若  $A = B$ , 则  $\left(x + \frac{1}{y}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \cdots + \left(x^{2003} + \frac{1}{y^{2003}}\right)$  的值是多少?

**解析** 求值归结于求出  $x, y$ , 而这有两个未知数, 需从  $A = B$  中导出两个独立的等量关系, 如两个集合的元素之和、之积分别相等, 即

$$\begin{cases} x + xy + \lg(xy) = |x| + y, \\ x \cdot xy \cdot \lg(xy) = 0. \end{cases}$$

这个方程组解起来比较复杂, 如果注意到集合  $B$  中含有元素 0, 从它出发, 逐一讨论便可确定  $x, y$  的值.

根据元素的互异性, 由  $B$  知  $x \neq 0, y \neq 0$ .