丛书主编 王 生 本册主编 曹瑞彬

启东中学

奥赛

精题详解

高中数学

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

启东中学，中国百强中学之一，1995-2009 年获国际奥赛奖牌 15 枚，被誉为：

“奥赛金牌的摇篮，清华北大的生源基地。”

奥赛训练教程初中数学
奥赛训练教程初中物理
奥赛训练教程初中化学
奥赛训练教程高中数学
奥赛训练教程高中物理
奥赛训练教程高中化学
奥赛精题详解初中数学
奥赛精题详解初中物理
奥赛精题详解初中化学
奥赛精题详解高中数学
奥赛精题详解高中物理
奥赛精题详解高中化学

责任编辑：王书贞
封面设计：罗薇

9 787811 011104 >

定价：22.00元

启东中学

奥赛

精题详解

主　编　曹瑞彬

作　者　王晓东　沈蒋峰

　　　　顾卫海　曹瑞彬

高中数学

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

启东中学奥赛精题详解．高中数学/曹瑞彬主编．南京：南京师范大学出版社，2004.7

ISBN 978－7－81101－110－4/G·716

Ⅰ.启…　Ⅱ.曹…　Ⅲ.数学课－高中－解题　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 062513 号

书　　名	启东中学奥赛精题详解(高中数学)
主　　编	曹瑞彬
责任编辑	王书贞
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电　　话	(025)83598077(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址	http://press.njnu.edu.cn
E－mail	nspzbb@njnu.edu.cn
印　　刷	江苏省如皋市印刷有限公司
开　　本	850×1168　1/32
印　　张	15.5
字　　数	403 千
版　　次	2009 年 9 月第 3 版　2009 年 9 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978－7－81101－110－4/G·716
定　　价	22.00 元

曹瑞彬 男，1962 年 11 月出生，1983 年毕业于南京师范学院数学系，中学数学高级教师，江苏省数学特级教师，数学奥林匹克高级教练，南通市数学学科基地业务负责人，启东中学数学首席教师。长期从事数学教学研究工作及数学奥林匹克竞赛辅导工作，近年来培养了一大批数学尖子，其中有 100 多人获得全国数学联赛一等奖，10 位同学入选国家冬令营，5 位同学进入国家集训队，陈建鑫同学获 42 届数学奥林匹克金牌。任班主任所送的 2003 届高三（1）班有 20 位同学考入清华、北大，还有 20 位同学考入复旦、交大。主编了《奥林匹克教材》《向 45 分钟要效益》等数十本教辅用书，在《中学数学》《教育研究》等杂志上发表了十多篇论文。

出 版 说 明

江苏省启东中学是一所面向启东市（县级市）招生的四星级高中，也是中国百强中学之一，近年来取得的累累硕果引起教育界乃至全社会的关注。

1995 年“世界第一才女”毛蔚同学夺得了第 26 届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌，成为该项赛事开赛以来第一位获得金牌的女生；1996 年蔡凯华同学在第 37 届国际中学生数学奥林匹克竞赛中夺得银牌，周璐同学获第 28 届国际中学生化学奥林匹克竞赛银牌；1998 年陈宇翱同学在第 29 届国际中学生物理奥林匹克竞赛中荣获金牌；2001 年施陈博同学夺得第 32 届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌，同年，陈建鑫同学夺得第 42 届国际中学生数学奥林匹克竞赛金牌；2002 年樊向军同学获第 33 届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌，同张峰一起获亚洲物理奥林匹克竞赛金牌；2003 年倪犇博同学获第 35 届国际中学生化学奥林匹克竞赛金牌；2004 年李真同学获第 35 届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌；2006 年朱力获第 37 届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌；2007 年钱秉玺获第 38 届国际中学生物理奥赛金牌，并被授予“全国优秀共青团员”称号。

一所长江北岸、黄海之滨的农村中学，连续多年在不同学科的竞赛中摘金夺银，学校高考成绩也是令人惊讶的出色，被誉为“奥赛金牌的摇篮，清华北大的生源基地”。

“启东中学现象”自然也成为出版界瞩目的焦点，与“黄冈”一

样，“启东”很快成为教辅出版的热门题材。南京师范大学出版社较早注意到了启东中学教育、教学方面取得的卓然成绩，应该说，建社以来的多套双效图书中都有启东中学教学成果的反映，如《向 45 分钟要效益》《特级教师优化设计》《奥林匹克竞赛指导》《一课一练》等。把启东中学奥赛作为一个系列出版发行，是我社依托名校名师，实施“名品”战略迈开的又一新步伐。

迈开这一步，是我社与启东中学多年合作的结果，倚天时地利人和的优势，水到而渠成。

迈开这一步，是广大读者对南京师范大学出版社的热切期盼。读者对南京师范大学出版社“理念教辅”、“名品教辅”的关心与厚爱以及他们的需求，已成为我们的第一动力。

初中、高中各科《启东中学奥赛训练教程》以相应教材内容为基础，根据竞赛大纲并结合启东中学学生使用的新教材和各科竞赛辅导经验而编写，将竞赛与升学结合起来，尤其重视基础知识的学习和基本思维方法的培养，由浅入深，循序渐进。《启东中学奥赛精题详解》则将《训练教程》中的包括原创题目在内的对应习题给出详尽的解答，方便配套使用。

本丛书主编为启东中学校长王生博士，各分册的主编均是启东中学金牌教练，参加编写的老师长期从事一线教学和竞赛辅导工作，有丰富的经验和成功的方法。

我们期待广大读者能从这套书中感受启东中学的努力，领略启东中学的风采，解读启东中学的奥秘，欣赏启东中学的智慧，分享启东中学的成功！

南京师范大学出版社

目　　录

第一章　集　合

第二章　函　数

第三章　数　列

第四章　数学归纳法

第五章　三角函数

第六章　向　量

第七章　不等式

第八章　解析几何

第九章　立体几何

第十章　平面几何

第十一章 排列组合与二项式定理

第十二章 复 数

第十三章 极限与导数

第十四章 排列组合和概率

第十五章　数论初步

第十六章　多项式

附:2008 年数学竞赛精题详解

第一章 集 合

第一节 集合的概念与运算

一、选择题

1. 若非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$，则能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合是 ( )

A. $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 9\}$　　B. $\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$

C. $\{a\mid a\leqslant 9\}$　　D. $\varnothing$

解析 选 B.

$\because A\cap B\subseteq A$，又 $A\subseteq A\cap B$，

$\therefore A=A\cap B$. $\therefore A\subseteq B$.

$$\therefore \begin{cases}2a+1\geqslant 3,\\ 3a-5\leqslant 22,\\ 2a+1\leqslant 3a-5.\end{cases}\Rightarrow 6\leqslant a\leqslant 9.$$

2. 设全集是实数集，若集合 $A=\{x\mid \sqrt{x-2}\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid 10^{x^2-2}=10^x\}$，则 $A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=$ ( )

A. $\{2\}$　　B. $\{-1\}$　　C. $\{x\mid x\leqslant 2\}$　　D. $\varnothing$

解析 选 D.

由 $\sqrt{x-2}\leqslant 0$，得 $x=2$，故 $A=\{2\}$.

由 $10^{x^2-2}=10^x$，得 $x^2-x-2=0$，故 $B=\{-1,2\}$.

$\therefore A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$.

3. 已知 a 为给定的实数，那么集合 $M=\{x\mid x^2-3x-a^2+2=0, x\in\mathbf{R}\}$ 的子集的个数为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 不确定

解析 选 C.

$\because\ \Delta=9-4(2-a^2)=1+4a^2>0$,

$\therefore\ M$ 恒有 2 个元素,

$\therefore$ 子集个数为 $2^2=4$.

4. 若集合 $M=\{(x,y)\mid |\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$,则 $M\cap N$ 的元素个数是 ( )

A. 4 B. 5 C. 8 D. 9

解析 选 D.

由非负数的和为零,得

$\begin{cases}\tan\pi y=0,\\ \sin\pi x=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=k(k\in\mathbf{Z}),\\ y=h(h\in\mathbf{Z}).\end{cases}$

即集合 M 为坐标平面上整点的全体.

又由 $x^2+y^2\leqslant 2=(\sqrt{2})^2$,得集合 N 为以原点为中心、$\sqrt{2}$为半径的闭圆内点所组成的点集.

可用画图来表明,闭圆内部共有 9 个整点.

5. 设集合 $M=\{-1,0,1\}$,$N=\{2,3,4,5,6\}$,映射 $f:M\rightarrow N$,则对任意的 $x\in M$,使得 $x+f(x)+xf(x)$ 恒为奇数的映射 f 的个数为 ( )

A. 122 B. 15 C. 50 D. 27

解析 选 C.

令 $y=x+f(x)+xf(x)$.

显然,当 $f(-1)$,$f(0)$,$f(1)$取定,则 $f(x)$随之确定.

当 $x=-1$ 时,$y=x+f(x)-f(x)=x=-1$,y 恒为奇数,故 $f(-1)$有 5 种可能选择;

当 $x=0$ 时,$y=f(0)$,$f(0)$仅能为 3 和 5,有 2 种选择;

当 $x=1$ 时,$y=1+2f(x)$,因 $f(x)$是正整数,y 恒为奇数,故 $f(1)$有 5 种选择.

$\therefore$由乘法原理知,使 y 恒为奇数的映射 f 共有 $5\times 2\times$

$5=50$(种).

6. 设集合 $A=\left\{\frac{n}{2}\middle|n\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\{n|n\in\mathbf{Z}\}$,$C=\left\{n+\frac{1}{2}\middle|n\in\mathbf{Z}\right\}$,$D=\left\{\frac{n}{3}+\frac{1}{6}\middle|n\in\mathbf{Z}\right\}$,则在下列关系中,成立的是 ( )

A. $A\subsetneqq B\subsetneqq C\subsetneqq D$ B. $A\cap B=\varnothing, C\cap D=\varnothing$

C. $A=B\cup C, C\subsetneqq D$ D. $A\cup C=B, C\cap D=\varnothing$

解析 选 C.

$\because A=\left\{\frac{n}{2}\middle|n\in\mathbf{Z}\right\}$, $B=\{n\mid n\in\mathbf{Z}\}$, $C=\left\{n+\frac{1}{2}\middle|n\in\mathbf{Z}\right\}$,$D=\left\{\frac{n}{3}+\frac{1}{6}\middle|n\in\mathbf{Z}\right\}$,

$\therefore A=B\cup C, C\subsetneqq D$.

二、填空题

7. 设集合 $M=\{1,2,\cdots,1\ 000\}$. 现对 M 的任一非空子集 X,令 a_x 表示 X 中最大数与最小值之和,那么,所有这样的 a_x 的算术平均值为________.

解析 将 M 中非空子集进行配对,对每个非空子集 $X\subset M$,令 $X'=\{1\ 001-x|x\in x\}$,则当 X_1 也是 M 的非空子集,且 $X\neq X_1$ 时,有 $X'\neq X'_1$,于是所有非空子集除$\{1,2,\cdots,1\ 000\}$以外分为两类:

(1) $X'\neq X$.

(2) $X'=X$.

对于(2)中的 X,必有 $a_x=1\ 001$.

对于(1)中的一对 X 与 X',有 $a_x+a_{x'}=1\ 001\times2=2\ 002$.

由此可见所有 a_x 的算术平均值为 $1\ 001$.

8. 若集合 M 中的元素是连续自然数,$\mathrm{card}(M)\geqslant2$,且 M 中元素之和为 $1\ 996$,那么这样的集合 M 共有______个.

解析 设 $M=\{a,a+1,\cdots,a+n-1\}$.

由于$\frac{a+a+n-1}{2}n=1\ 996$,有 $n(2a+n-1)=8\times499$.

又 n 与 $2a+n-1$ 有不同的奇偶性，且 $n<2a+n-1$，499 为质数，只能是 $n=8$，解得 $a=246$. 故 M 只有 1 个.

9. 点集 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\lg\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y\right\}$ 中元素的个数为________.

解析 $\lg\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y \Leftrightarrow$

$x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}=xy, x>0, y>0.$

由均值不等式得 $x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{x^3\cdot\frac{1}{3}y^3\cdot\frac{1}{9}}=xy.$

当且仅当 $x^3=\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9}$，即 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}, y=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ 时上式等号成立. 故元素个数为 1.

10. 集合 $S=\{1,2,3,\cdots,18\}$ 的五元子集 $S_5=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 中，任何两个元素之差不为 1，这样的子集 S_5 的个数共有________个.

解析 作子集 $S'_5=\{a_1,a_2-1,a_3-2,a_4-3,a_5-4\}$，则 S'_5 与 S_5 一一对应，而 S'_5 是 $\{1,2,\cdots,14\}$ 的五元子集，有 $C_{14}^5=2\ 002$(个).

11. 已知 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 2^{1-x}+a\leqslant 0, x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________.

解析 易得 $A=(1,3)$.

设 $f(x)=2^{1-x}+a$，$g(x)=x^2-2(a+7)x+5$.

要使 $A\subseteq B$，只需 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(1,3)$ 上的图象均在 x 轴下方，其充要条件是：同时有 $f(1)\leqslant 0$，$f(3)\leqslant 0$，$g(1)\leqslant 0$，$g(3)\leqslant 0$ 成立. 由此推出 $-4\leqslant a\leqslant -1$.

12. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{2x-x^2}\}$，$N=\{(x,y)\mid y=$

$k(x+1)\}$，当 $M\cap N\neq\varnothing$ 时，k 的取值范围是________.

解析有误，不仅要求 $\Delta\geqslant 0$ 还要求根在 $[0,2]$ 之间. $M\cap N\neq\varnothing$ 等价于方程 $k(x+1)=\sqrt{2x-x^2}$，$k\geqslant 0$ 有实数解. 显然 $0\leqslant x\leqslant 2$，两边平方并整理，有

$(k^2+1)x^2+2(k^2-1)x+k^2=0$，

x 有实数解，则 $\Delta=4(k^2-1)^2-4k^2(k^2+1)\geqslant 0$.

解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $k\geqslant 0$，$\therefore k$ 的取值范围是 $\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

三、解答题

13. 设集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{v\mid v=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$. 求证：$M=N$.

证明 若 $u\in M$，则存在 $m,n,l\in\mathbf{Z}$，使得 $u=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)\in N$. 从而 $M\subseteq N$. ①

若 $v\in N$，则存在 $p,q,r\in\mathbf{Z}$，使得 $v=20p+16q+12r=12r+8(2q)+4(5p)\in M$. 从而 $N\subseteq M$. ②

由①②得 $M=N$.

14. 已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，若 $A=B$，则 $\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2\,003}+\frac{1}{y^{2\,003}}\right)$ 的值是多少？

解析 求值归结于求出 x,y，而这有两个未知数，需从 $A=B$ 中导出两个独立的等量关系，如两个集合的元素之和、之积分别相等，即

$$\begin{cases}x+xy+\lg(xy)=|x|+y,\\ x\cdot xy\cdot\lg(xy)=0.\end{cases}$$

这个方程组解起来比较复杂，如果注意到集合 B 中含有元素 0，从它出发，逐一讨论便可确定 x,y 的值.

根据元素的互异性，由 B 知 $x\neq 0,y\neq 0$.