高等医药院校规划教材

医用高等数学

第 2 版

Yiyong Gaodeng Shuxue

◉ 主编　李文潮

第四军医大学出版社

医用高等数学

(第2版)

主　编　李文潮
副主编　赵东涛　赵清波
　　　　徐清华　吴克坚

第四军医大学出版社·西安

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学/李文潮主编. —2版. —西安:第四军医大学出版社,2009.7
ISBN 978-7-81086-661-3

Ⅰ.医… Ⅱ.李… Ⅲ.医用数学:高等数学-医学院校-教材 Ⅳ.R311;O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第123269号

医用高等数学

主　　编　李文潮
责任编辑　土丽艳
出版发行　第四军医大学出版社
地　　址　西安市长乐西路17号(邮编:710032)
电　　话　029-84776765
传　　真　029-84776764
网　　址　http://press.fmmu.sn.cn
印　　刷　陕西奇彩印务有限责任公司
版　　次　2009年7月第2版　2009年7月第2次印刷
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　15.5
字　　数　290千字
书　　号　ISBN 978-7-81086-661-3/R·544
定　　价　32.00元

内容提要

本书是根据卫生部《五年制高等医学院校教学计划》而编写的医用高等数学教材.全书共10章,内容有:函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程、多元函数微积分、线性代数、概率论、数理统计、高等数学实验及模糊数学.本书在注重基本理论、基本计算的前提下,在思想性和趣味性上做了尝试,突出了数学知识的广度,具有比较鲜明的医学教育特色,加强了基础学科与医学学科相结合的特点,融入了大量医学实例.

本书可作为高等医科院校相关专业的本科生教材或参考书,也可供广大医务工作者和自学者阅读参考.

前 言

自然科学的发展总要经历由定性研究到定量研究的过程，生命科学的发展亦是如此．马克思对此也早有表述：“一种科学只有在成功的运用数学时，才算达到了真正完善的地步”．

为提高大学生数学素质，根据《医用高等数学教学大纲》，并结合我们多年的教学经验，编写了这部《医用高等数学》教材．本书对高等数学的内容进行了大量的优化及调整，其特点体现在：

1．**扩充知识面** 在保证理论体系完整的前提下，对一元函数微积分及微分方程做了适当压缩，另增加了多元函数微积分、线性代数、概率论、数理统计、数学实验、模糊数学等作为简介的内容，以扩大学生的数学知识面．

2．**体现医学特色** 增加了大量的生物及医学方面的例题、习题以及完整的医学数学模型，突出了利用数学理论知识解决医学问题的思想，强调实用原则．

3．**增强思想性和趣味性** 通过每章的概述、附文以及数学史、数学故事、数学家简介等，阐述数学在人类文明发展史上的作用．

本书共有 10 章，前 4 章为基本内容，约需 32 学时，后 6 章为简介内容，约需 40 学时，可根据教学实际适当取舍，部分讲授．对于附文内容可作为学生的阅读材料，也可安排专题讲座．如数学史、人物传记、医学数学模型等专题．

本书在编写和出版过程中得到了第四军医大学教务处以及出版社的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

本书在编写过程中，参考了许多同类及相关的中外文书刊，在此深表感谢．

限于我们的水平，难免有疏误和不妥之处，恳请使用本教材的师生们不吝赐教，多提宝贵意见．

编 者

2009 年 4 月于西安

目　　录

第 1 章　函数与极限

Function and Limit

数学和一些有特定研究对象的学科不同，它几乎是任何学科所不可缺少的. 没有任何一门学科能像数学那样渗透到每一种学科之中. 第一是它高度的抽象性. 数学是以简单和谐的形式去表达事物的最深层的规律，它保留了量的关系和空间形式，而舍弃了其他一切，是对事物中共同的本质属性的把握，是数学被广泛应用的基础. 第二是它的精确性，也就是逻辑的严谨性. 它追求一种确定的、客观的、严密的、可靠的知识. 它不仅研究外部世界，也研究自己本身. 它表现在定义的完备性、推理和计算的逻辑严格性以及数学结论的确定无疑与无可争辩性. 第三是应用的广泛性. "宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学." (引华罗庚)

数学的表现形式为抽象化、符号化、公理化、最优化、模型化. 数学最根本的特点是：它表达了一种对精神世界的探索魅力，数学使我们成为更深刻、更丰富、更有力量的人.

概述　函数是用数学术语来描述现实世界的主要工具. 许多函数由于它们所描述的性态而具有特殊的重要性. 三角函数描述循环重复的活动；指数、对数和 Logistic 函数描述了增长和衰减现象；多项式函数可用来近似这些函数或其他函数. 极限的概念是微积分的理论基础，有了它，人们才能够以高于初等数学的观点和技术来研究函数，从而实现从常量数学到变量数学的飞跃.

第一节　函　　数

一、函数的概念

我们在讨论问题或研究某一变化过程时，常会遇到两种不同的量：一种是可以取不同数值的量，称为**变量**(variable)；另一种是保持同一数值的量，称为**常量**(constant).

在同一自然现象或某一个技术过程中，往往同时有几个变量在变化着，这几个变量相互

联系、相互制约并遵循着某种变化规律.

定义 1.1 设 x , y 是同一变化过程中的两个变量,如果对于变量 x 所能取的每一个值,变量 y 按一定的法则总有确定的值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的**函数**(function). x 称为**自变量**(independent variable), y 称为**因变量**(dependent variable). 记为

$$y = f(x) .$$

如果对于 x 的某一个值 x_0 ,函数有确定的值与之对应,则称函数在 x_0 处有定义,使函数有定义的一切 x 值叫做函数的**定义域**(domain of definition). 对应的函数值的全体叫做函数的**值域**(range).

例 1.1 在出生后 1～6 月期间内,正常婴儿体重近似满足以下关系式:

$$y = 3 + 6x ,$$

其中 x 表示婴儿的月龄, y 表示其体重(千克),则函数的定义域为 [1,6].

例 1.2 2003 年中国非典型肺炎(SARS)流行时,感染人数随时间变化的规律通过实际观测的数据表示,其中的 8 组数据可用表格法,图像法表示出时间(t)与感染人数(N)之间的函数关系. 如表 1－1 和图 1－1.

表 1－1 2003 年全国 SARS 流行高峰期新增病例报告

报告日期(月 / 日)	4/28	5/1	5/4	5/7	5/9	5/12	5/15	5/17
时间 t(天)	1	4	7	10	12	15	18	20
新增例数 N(个)	206	187	163	159	118	75	52	28

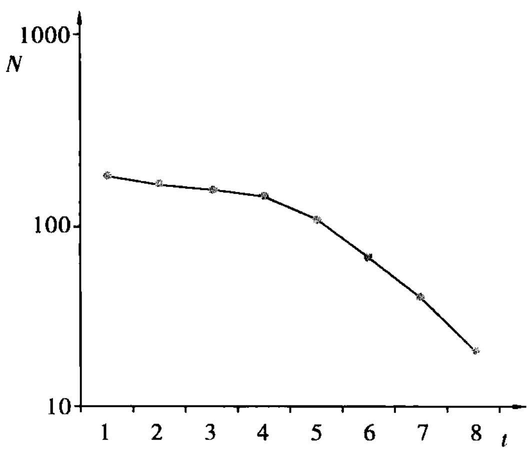


图 1－1

此例中,也可以用解析法表示感染人数 N 与时间 t 的关系. 由于影响新增病例数的因素很多,绝非一个时间变量 t 所能完全确定,故 $N = N(t)$ 只能得到近似式,此近似式用最小二乘法可通过曲线拟合的方法得到.

例 1.3　求函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域.

解　由 $\sin x \geqslant 0$，得 $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$，$k=0,\pm 1,\pm 2\cdots$

由 $16-x^2 \geqslant 0$，得 $-4 \leqslant x \leqslant 4$．故定义域为 $[-4,-\pi]$ 和 $[0,\pi]$．

在以后的讨论中，我们还会遇到与区间有关的**邻域**(neighborhood)的概念，下面给出其定义.

定义 1.2　设 α 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式 $|x-\alpha|<\delta$ 的 x 的全体叫做点 α 的 δ 邻域，记为 $\bigcup(\alpha,\delta)$．点 α 叫做此邻域的中心，δ 叫做此邻域的半径，用区间表示为 $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$．

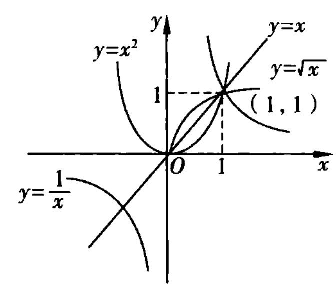
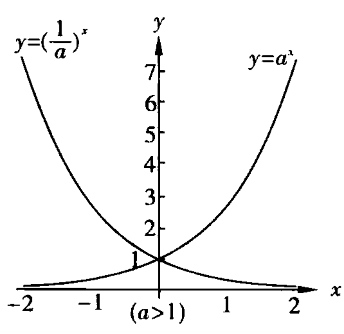
而把满足不等式 $0<|x-\alpha|<\delta$ 的点的集合称为 α 的去心邻域，记为 $\overset{0}{U}(\alpha,\delta)$．

二、初等函数

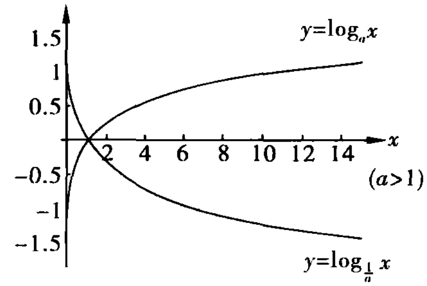
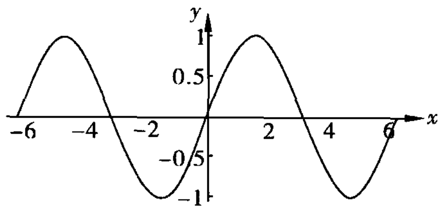
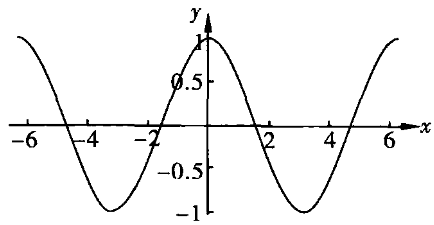
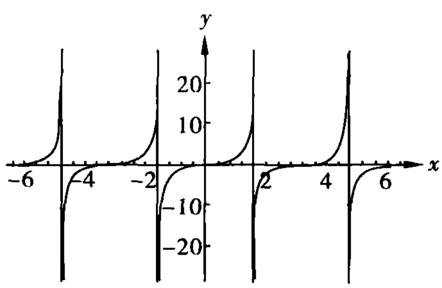
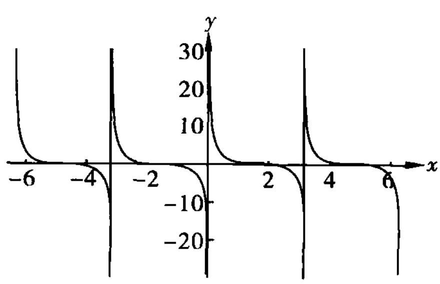
1. 基本初等函数

通常把**幂函数**(power function)、**指数函数**(exponential function)、**对数函数**(logarithmic function)、**三角函数**(trigonometric function)和**反三角函数**(inverse trigonometric function)泛称为**基本初等函数**(basic elementary function)，见表 1－2.

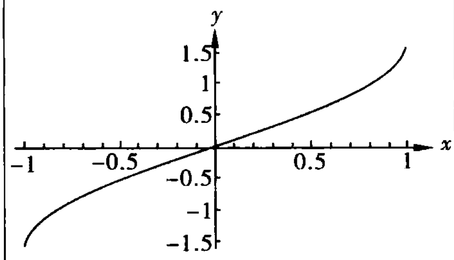
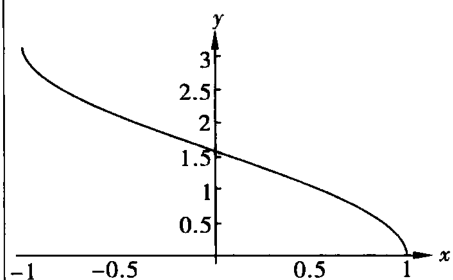
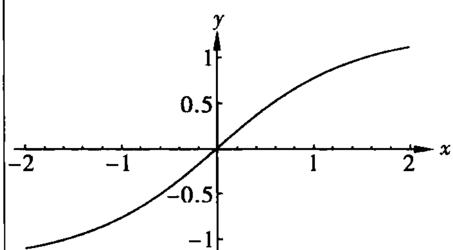
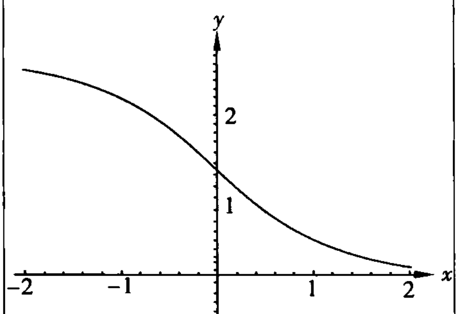
表 1－2　基本初等函数表

名称	表达式	定义域	图形	特性
幂函数	$y=x^a$ $(a\neq 0)$	随 a 的不同，函数的定义域不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		过 (1,1) 点，在第一象限内，当 $a>0$ 时，为增函数；当 $a<0$ 时，为减函数
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,$ $a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$		图像在 x 轴上方，且过点 (0,1)，当 $0<a<1$ 时为减函数；当 $a>1$ 时为增函数

续表

名称	表达式	定义域	图形	特性
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$	$(0,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，且过点 $(1,0)$，当 $0<a<1$ 时，为减函数；当 $a>1$ 时，为增函数
三角函数 正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，为奇函数，$\lvert\sin x\rvert\leqslant1$
三角函数 余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，为偶函数，$\lvert\cos x\rvert\leqslant1$
三角函数 正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期，为奇函数，$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内为减函数
三角函数 余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期，为奇函数，$(0,\pi)$ 内为减函数

续表

名称		表达式	定义域	图形	特性
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调增加，奇函数，值域为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减少，值域为$[0,\pi]$
	反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调增加，奇函数，值域为$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
	反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,\infty)$		单调减少，值域为$(0,\pi)$

2. **初等函数**

定义 1.3　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限的函数复合步骤所构成的并可用一个解析式表达的函数，称为初等函数. 例如：$y=\ln(1+x^2)$，$y=\sqrt{ax+1}$，$y=x\tan x+\sin(1-e^x)$ 等都是初等函数. 微积分主要是以初等函数为研究对象.

三、几种特殊函数

1. 取整函数

设 x 为任意实数，y 为不超过 x 的最大整数. 记为

$$y = [x].$$

如图 1－2.

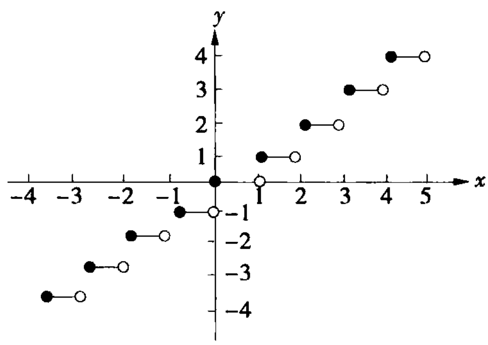


图 1－2

例如，$[\pi] = 3$，$[\frac{1}{3}] = 0$，$[-\frac{2}{5}] = -1$.

2. Logistic 函数

$$y = \frac{A}{1 + Be^{-rx}},$$

其中 A，B，r 是常数，如图 1－3.

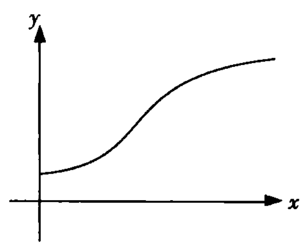


图 1－3

该函数在生物、医药学中应用较为广泛，如人口预测，疾病传播，细菌的繁殖等，其他领域如销售预测，产量增长等.