普通高等教育独立学院“十二五”规划教材

Higher Mathematics

高等数学

（下册）

主编　何志芳　施宜生　杨纪龙

教学资源库
http://js.ndip.cn

国防工業出版社
National Defense Industry Press

普通高等教育独立学院"十二五"规划教材

高等数学

（下册）

主编　何志芳　施宜生　杨纪龙
参编　孟凤娟　王春梅　许　华
　　　王志刚　毛铭桦　朱寿国

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是高等学校独立学院理工、经管等非数学专业的高等数学课程的教材. 全书分上、下两册,上册包括一元函数微积分学;下册包括空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数和微分方程.

本书根据作者多年的教学经验,结合独立学院学生的特点,将一些重要的定理、公式等知识点进行诠释、总结,力求通俗易懂,更有利于学生学习和掌握,也便于教师使用.

本书可供独立学院、二级学院用作高等数学教材,也可供各类大学生用作学习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 何志芳,施宜生,杨纪龙主编. —北京:国防工业出版社,2012. 1
普通高等教育独立学院"十二五"规划教材
ISBN 978-7-118-07807-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①何…②施…③杨… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 282079 号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 18¼ 字数 428 千字
2012 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 34.00 元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776
发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前　言

本书分上、下两册.上册包括一元函数微积分学,下册包括空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数和微分方程.各章均配有一定数量的习题,习题分两部分,各节的习题为基本要求,各章的总习题为较高要求(供准备考研的部分同学选用),书末附有习题参考答案.

本书可用作独立学院、二级学院各非数学专业的高等数学教材,也可供各类大学生用作学习参考书.

南京师范大学何志芳副教授、施宜生副教授、杨纪龙副教授、颜世建教授给出了本书的整体思路、知识体系、各章节的目录、主要知识点的分布与衔接等.南京师范大学泰州学院的部分教师编写了各章节.其中第 1 章、第 7 章由毛铭桦老师编写,第 2 章、第 8 章由朱寿国老师执笔,第 3 章、第 12 章由孟凤娟老师执笔,第 4 章、第 10 章由王春梅老师执笔,第 5 章、第 9 章由许华老师执笔,第 6 章、第 11 章由王志刚老师执笔.全书由何志芳、施宜生、杨纪龙负责统稿.

书稿完成后,2010 年—2011 年在南京师范大学泰州学院经过一轮试用,在此期间各任课教师提出了不少宝贵意见,我们在此一并表示衷心的感谢!

本书将一些重要的定理、公式等知识点进行诠释、总结,力求通俗易懂,便于学生学习掌握,也便于教师使用.

由于编者水平所限,书中肯定会有不少疏漏和不妥之处,诚恳期待专家和读者不吝赐教.

目　录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

像平面解析几何一样，空间解析几何通过建立空间直角坐标系，把空间的几何图形与图形上的点所满足的代数方程对应起来，从而利用代数工具来研究空间几何问题. 本章内容对于学习多元函数微积分学是比较重要的. 我们首先介绍向量的相关概念及运算，然后利用向量来研究平面和空间直线的方程，最后介绍空间曲面和空间曲线的有关知识.

7.1　向量及其线性运算

7.1.1　向量的概念

客观世界中有这样的一种量，例如质量、时间、体积等，它们只有大小没有方向，这样的量称作**标量**. 大量实际问题中，也还存在另外一种量，例如位移、速度、力、力矩等，它们既有大小又有方向，这样的量称作**向量**.

通常用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 如图 7 - 1，起点为 A，终点为 B 的有向线段 AB 表示一个向量，我们把这个向量记作$\overrightarrow{AB}$. 有时也用一个黑体字母来表示向量，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{F}$ 等.

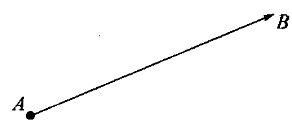

图 7 - 1

向量的共性是所有的向量都有大小和方向，数学上讨论的向量并不涉及它的起点，即与它的起点位置无关，这类向量也称为**自由向量**. 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，只要大小相等，方向相同，都看作是相同的向量，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 如果一个向量在保持大小和方向不变的条件下经过平行移动后可以与另外一个向量重合，那么这两个向量就是相等的，如图 7 - 2，在平行四边形 $ABCD$ 中，向量$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

向量$\overrightarrow{AB}$或 $\boldsymbol{a}$ 的大小也称作向量$\overrightarrow{AB}$或 $\boldsymbol{a}$ 的**模**，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$. 模为零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量没有确定的方向，它的方向是任意的. 模等于 1 的向量称为**单位向量**.

设两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，把它们的起点放在同一点 O，它们的终点分别是 A 和 B，如图 7 - 3，则有向线段 OA 与 OB 所形成的度数不超过 π 的夹角 $\angle AOB$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. 规定零向量与任意非零向量的夹角是任意的. 如果 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 如果 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 或者 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi$，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**，也称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **共线**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

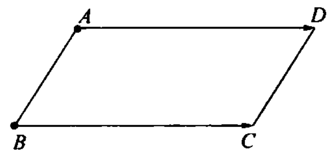

图 7 - 2

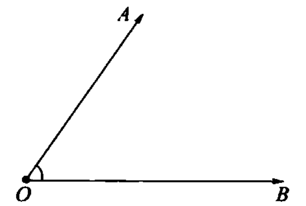

图 7 - 3

7.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加法和减法

我们知道,两个力的合力按照**平行四边形法则**确定,力是一种向量,向量的加法运算与力的合成类似,按照如下法则确定:设两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,如图 7 - 4,任意取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB,AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$,则向量 $\overrightarrow{AC}$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

在图 7 - 4 中,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,于是我们得到求两个向量和的**三角形法则**:设两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,如图 7 - 5,作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 B 为起点作向量 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则向量 $\overrightarrow{AC}$ 即是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 三角形法则对于两个共线的向量也是适用的.

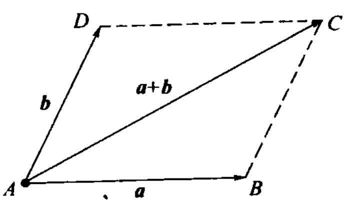

图 7 - 4

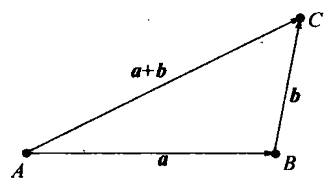

图 7 - 5

由向量加法的三角形法则,我们可以对多个向量进行求和,如 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}$,只要先作出第一个向量 $\boldsymbol{a}$,然后按照先后顺序,将前一个向量的终点作为后继向量的起点,依次作出其余的向量,直到作出最后一个向量,那么以向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点作为起点,以向量 $\boldsymbol{e}$ 的终点作为终点的有向线段就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}$,见图 7 - 6.

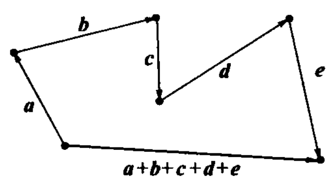

图 7 - 6

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相同方向相反的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$. 我们规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$,因此由向量求和的三角形法则,可以得到 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,见图 7 - 7. 从图上不难发现,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的起点是 $\boldsymbol{b}$ 的终点,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的终点是 $\boldsymbol{a}$ 的终点,也即若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在同一点,那么由向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向 $\boldsymbol{a}$ 的终点的有向线段就表示 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由图 7 - 5 和图 7 - 7,以及三角形三边之间的关系,不难得到下面的结论:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|;\quad \big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|.$$

向量的加法有下列运算律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由图 7－4 容易验证交换律是成立的，下面验证结合律. 如图 7－8 所示，可知

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD};$$

因此结合律也成立.

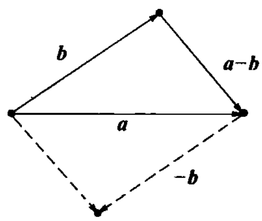

图 7－7

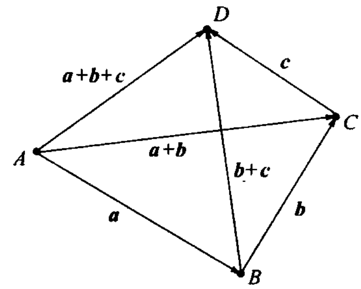

图 7－8

2. 向量与数的乘法

设 λ 是一个实数，$\boldsymbol{a}$ 是一个向量，规定 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，并且当 $\lambda>0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，当 $\lambda<0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，当 $\lambda=0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 这样规定的运算也简称为向量的数乘运算.

与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量称为 **$\boldsymbol{a}$ 的单位向量**，通常记作 $\boldsymbol{a}_0$. 由向量与数的乘法规则可知，$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0$，并且 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

向量与实数的乘法运算满足下面的运算律：

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加减法运算和向量的数乘运算统称为向量的线性运算.

注意到向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，我们有下面判断两个向量平行的充要条件.

定理 1　设向量 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，则向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是：存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　根据向量的数乘运算规则，充分性是显然的，下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，如果 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，取实数 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，那么 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相同，又 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向，因此 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 如果 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，则取实数 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，那么 $|\lambda\boldsymbol{a}|=-\lambda|\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，而且 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，因此 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. **证毕.**

例 1　利用向量证明三角形中位线定理.

证　如图 7－9，在 $\triangle ABC$ 中，D、E 是 AB、AC 上的中点，因此 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

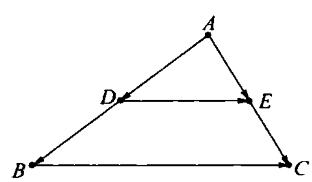

图 7－9

注意到$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,因此$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,也就是 $DE/\!/BC$,且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

习 题 7-1

1. 什么是单位向量？什么是零向量？
2. 如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,那么 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 是否成立？如果 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,那么 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 是否成立？
3. 已知平行四边形两对角线向量为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,利用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示平行四边形四边的向量.
4. 利用向量证明对角线互相平分的四边形是平行四边形.
5. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.
6. 设 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$,求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

7.2 向量的坐标

本节在引进空间直角坐标系的基础上,介绍空间点的坐标、向量的坐标及利用向量的坐标进行向量的线性运算,最后介绍向量的方向角与方向余弦.

7.2.1 空间直角坐标系与点的坐标

通过平面直角坐标系,平面上的一个点与一个有序实数对建立了一一对应的关系,从而用代数的方法来解决大量平面几何的问题. 作为平面直角坐标系的推广,我们引进空间直角坐标系,将空间中的点用一个有序实数组来表示.

在空间中取一定点 O,过该点作三条互相垂直的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴,确定它们的正向符合右手系,也就是当右手的四指从 x 轴正向旋转 90°握向 y 轴的正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向,这样的坐标系称为空间直角坐标系,记作 $Oxyz$. O 称为**坐标原点**,x 轴、y 轴和 z 轴统称为**坐标轴**,每两个坐标轴决定的平面称为**坐标面**,共有三个坐标面,x 轴与 y 轴确定的平面叫 xOy 面,另外两个分别叫做 yOz 面、zOx 面,如图 7-10 所示.

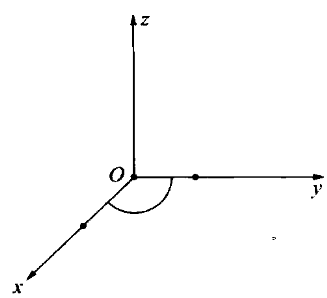

图 7-10

三个坐标面互相垂直,将空间分为八个部分,每一部分称为一个卦限. 通常将含有 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴的卦限称为第一卦限,在 xOy 面的上方依逆时针方向确定第二、第三、第四卦限,第五卦限在第一卦限的下方,第六、第七、第八卦限在 xOy 面的下方,按照逆时针方向得到. 这八个卦限常常用罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示,见图 7-11.

空间直角坐标系提供了空间位置的参照系统,下面我们就来描述空间点的位置. 设 M 为空间中的任意一点,过 M 分别作与三条坐标轴垂直的平面,这些平面与三条坐标轴交

于三点分别为 P,Q,R，设 $OP=x,OQ=y,OR=z$，则空间中的点 M 唯一确定了一个有序实数组 (x,y,z)；反之，给定一个有序实数组 (x,y,z)，则可分别在三条坐标轴上得到点 P,Q,R，过此三点分别作垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴的平面，这三个平面交于一点 M，点 M 就是有序实数组 (x,y,z) 唯一确定的点，见图 7－12.

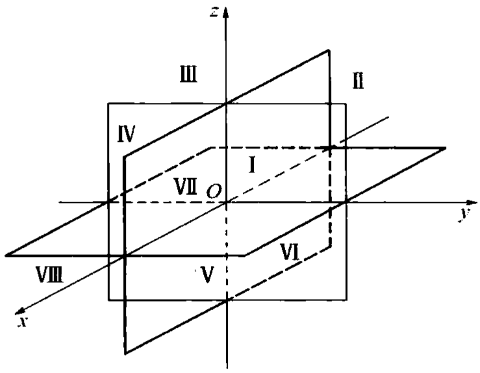

图 7－11

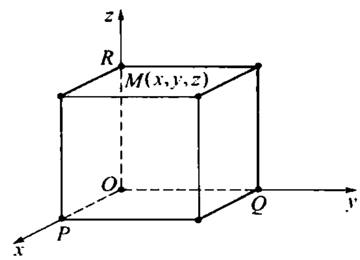

图 7－12

通过空间直角坐标系，空间中的点 M 与一个有序实数组 (x,y,z) 一一对应. (x,y,z) 称为**点 M 的坐标**，而数 x,y 和 z 分别称为点 M 的**横坐标，纵坐标，竖坐标**. 显然，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$，xOy 面上的点的竖坐标为 0，yOz 面上点的横坐标为 0，zOx 面上点的纵坐标为 0，x 轴上的点的坐标为 $(x,0,0)$，y 轴上的点的坐标为 $(0,y,0)$，z 轴上的点的坐标为 $(0,0,z)$. 空间中八个卦限的点的坐标的符号分别为：Ⅰ(＋,＋,＋)、Ⅱ(－,＋,＋)、Ⅲ(－,－,＋)、Ⅳ(＋,－,＋)、Ⅴ(＋,＋,－)、Ⅵ(－,＋,－)、Ⅶ(－,－,－)、Ⅷ(＋,－,－).

设空间中有两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，我们用点的坐标来表示两点之间的距离 d.

如图 7－13 所示，过点 M_1，M_2 分别作垂直于坐标轴的平面，这些平面构成以 M_1M_2 为对角线的长方体. 根据勾股定理有

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PQ|^2+|QM_2|^2,$$

因此 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 两点的距离公式为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

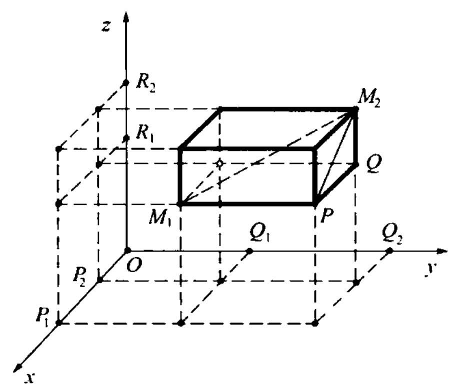

图 7－13

特别地，点 $M(x,y,z)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

7.2.2 向量的坐标表示及其线性运算的坐标表示

前面已经用几何方法讨论了向量的概念和线性运算. 几何方法虽然比较直观，但是不方便计算和解决复杂的问题，因此我们引进向量的坐标表示，也就是用一个有序实数组来

表示向量,从而可以用代数方法来进行向量的运算.

先介绍空间一点在直线上和在平面上的投影. 设 P 为空间中一点,l 为空间一直线,过点 P 作垂直于直线 l 的平面 α,平面 α 与直线 l 的交点 P'称为**点 P 在直线 l 上的投影**(图 7-14). 设 Q 为空间中一点,π 为空间中一平面,过 Q 作垂直于平面 π 的直线 n,平面 π 与直线 n 的交点 Q'称为**点 Q 在平面 π 上的投影**(图 7-15).

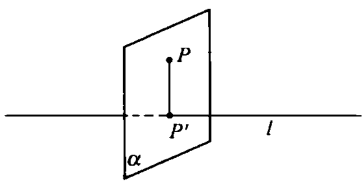

图 7-14

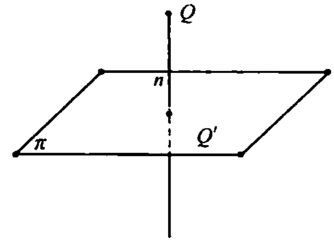

图 7-15

在空间取定一个直角坐标系 $Oxyz$,设 $\boldsymbol{a}$ 为空间中任意给定的一个向量,将它平移使其起点为坐标原点 O,终点为 $M(x,y,z)$,则向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$唯一确定了空间一点 M;反之,设 M 为空间中任意给定的一点,则 M 唯一确定了一个向量$\overrightarrow{OM}$. 于是空间中的所有向量与空间中的所有的点之间建立了一一对应的关系. 我们把起点为坐标原点的向量$\overrightarrow{OM}$称为**点 M 的向径**,记作 $\boldsymbol{r}$.

直角坐标系 $Oxyz$ 中,在 x 轴,y 轴和 z 轴的正方向上分别取三个单位向量,记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,称为**基本单位向量**. 如图 7-16,设向量 $\boldsymbol{a}$ 与点 $M(x,y,z)$ 的向径$\overrightarrow{OM}$相等,并设点 M 在 x 轴,y 轴和 z 轴上的投影分别为 A,B,C,在 xOy 面上的投影为 P. 由向量的加法可知

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

而$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$,因此

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

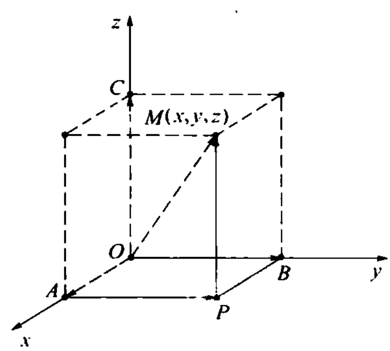

图 7-16

我们称上式为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式,$x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 分别称为 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的分向量.

由上我们已经看到,通过建立空间直角坐标系,空间中的向量 $\boldsymbol{a}$ 确定了空间中的一个点 M,以及 x,y,z 这三个有序实数;反过来,给定三个有序实数 x,y,z 也可以确定点 M 以及向量 $\boldsymbol{a}$,因此向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序实数组 $\{x,y,z\}$ 一一对应. 于是可用有序实数组 $\{x,y,z\}$ 来表示向量 $\boldsymbol{a}$,即

$$\boldsymbol{a}=\{x,y,z\},$$

称之为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示式**,x,y,z 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**.

利用向量的坐标表示式,我们可以把向量的线性运算转化为数量计算.

设 $$\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\quad \boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\},$$

则 $\quad \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \pm (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k})$

$$= (x_1 \pm x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 \pm y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 \pm z_2)\boldsymbol{k} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) = \lambda x_1\boldsymbol{i} + \lambda y_1\boldsymbol{j} + \lambda z_1\boldsymbol{k}$$

$$= \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}.$$

因此两个向量之间的加减和向量的数乘运算可转化成对应坐标之间的加减以及这个数与对应坐标的数乘运算.

对于空间中的一般向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,如果每次都要将它平移,使得起点在坐标原点,然后依据终点的坐标来确定向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标,这样不仅麻烦而且也没有必要,下面我们给出向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式.

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为直角坐标系 $Oxyz$ 中两点,则$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\}$,$\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$,因此

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \{x_2,y_2,z_2\} - \{x_1,y_1,z_1\} = \{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\},$$

向量的坐标等于其终点的坐标减去其起点的坐标.

显然,两个向量相等当且仅当两个向量对应的坐标相等,根据7.1节定理1有下面的结论. 设向量$\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$,$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$,且$\boldsymbol{a}$非零,则$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$平行的充分必要条件是:存在实数$\lambda$,使得$\{x_2,y_2,z_2\}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$,即

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}(=\lambda).$$

因此,向量$\boldsymbol{b}$与向量$\boldsymbol{a}$平行的充分必要条件是它们的对应坐标成比例,如果分母中有一个为0,则对应的分子也为0,比如$x_1=0$,则$x_2=0$,同时$\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}$;如果分母中有两个为0,比如$x_1=0,y_1=0$,则$x_2=0,y_2=0$,且$z_2=\lambda z_1$.

例1 已知两点$A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,以及实数$\lambda\neq-1$,在点A与点B的连线上求一点M,使得$\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{MB}$.

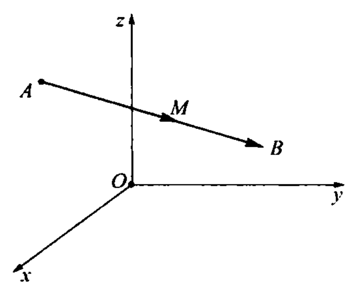

图7-17

解 设点M的坐标为(x,y,z),则

$$\overrightarrow{AM} = \{x-x_1, y-y_1, z-z_1\},$$

$\overrightarrow{MB}=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$. 根据题设$\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{MB}$可知

$$\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\} = \lambda\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\},$$

于是

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\quad y-y_1=\lambda(y_2-y),\quad z-z_1=\lambda(z_2-z),$$

解得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点M称为线段AB的定比分点. 当$\lambda=1$时,可得有向线段AB的中点坐标,即

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

7.2.3 向量的方向角与方向余弦

我们先给出向量的模的坐标表示式. 设向量 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$, 点 M 的坐标是 (x,y,z), 则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$, 根据两点之间的距离公式就有

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

非零向量 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$ 与 x 轴, y 轴和 z 轴正向的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**, 分别记作 α,β,γ(规定这三个角都在 0 与 π 之间); 称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 下面我们推导方向余弦的计算公式.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$, 如图 7－18, α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角, 点 M 在 x 轴, y 轴和 z 轴上的投影分别为 A,B,C. 由立体几何可知, $OA\perp MA, OB\perp MB, OC\perp MC$, 因此 $\cos\alpha=\frac{OA}{|\overrightarrow{OM}|}$, $\cos\beta=\frac{OB}{|\overrightarrow{OM}|}$, $\cos\gamma=\frac{OC}{|\overrightarrow{OM}|}$.

注意到 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$, 则 $OA=x, OB=y, OC=z$, 因此根据 $\boldsymbol{a}$ 的模的坐标表示式可知

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

上面三个等式是向量的**方向余弦的坐标表示式**, 不难得出方向余弦满足下面的关系:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

另一方面, 向量 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}\right\}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{x,y,z\}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$, 也即向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦构成的向量 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量.

例 2 已知 $\boldsymbol{a}=\{3,-2,6\}$, 求它的单位向量.

解 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{9+4+36}=7$, 因此 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha=\frac{3}{7}$, $\cos\beta=-\frac{2}{7}$, $\cos\gamma=\frac{6}{7}$, 于是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量是 $\left\{\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right\}$.

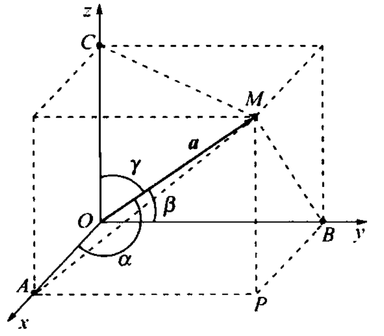

图 7－18

习 题 7-2

1. 求点 $P(x,y,z)$ 相对于各坐标面的对称点的坐标.

2. 在直角坐标系 $Oxyz$ 中,画出下列各点的位置: $A(1,2,3)$, $B(-2,1,1)$, $C(-2,-1,0)$.

3. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

4. 求点 $M(3,-4,-5)$ 到各坐标轴的距离.

5. 已知两个力 $F_1=\{2,-3,1\}$ 与 $F_2=\{1,1,3\}$ 作用于同一点,求要用怎样的力才能使它们平衡.

6. 已知两点 $M_1(4,1,1)$ 和 $M_2(0,1,2)$,求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模,方向余弦.

7. 设向量 $\boldsymbol{a}=\{2,-2,1\}$, $\boldsymbol{b}=\{4,-2,2\}$, $\boldsymbol{c}=\{6,-3,-3\}$,求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$ 的坐标.

8. 求向量 $\boldsymbol{a}=\{3,1,-4\}$ 的单位向量.

9. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴所成的方向角都相等,求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

10. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=n\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+l\boldsymbol{k}$,求当 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$ 时 m,n,l 的值.

7.3 向量与向量的乘法运算

本节介绍向量的三种乘法运算: 数量积、向量积、混合积.

7.3.1 向量的数量积

空间中带有方向的直线 u 称为轴. 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点和终点在 u 轴上的投影分别为 A', B',如果 u 轴的单位向量是 $\boldsymbol{e}$,且 $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\boldsymbol{e}$,则称数值 λ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ **在 u 轴上的投影**,记作 $\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB}=\lambda$. u 轴称为**投影轴**, $\overrightarrow{A'B'}$ 称为 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的分向量.

注 1 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影 $\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB}$ 是一个数值,不是向量,其值等于 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的分向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 的数量(或值).

下面给出关于向量的投影的几个性质,这些性质的证明请读者自己思考.

性质 1 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影等于该向量的模乘以它与 u 轴夹角 φ 的余弦,即

$$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

性质 2 两个向量的和在轴上的投影等于这两个向量在轴上的投影的和,即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}.$$

这个性质也可以推广到有限个向量的情况,即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n.$$

性质 3 向量与数的乘积在轴上的投影等于该向量在轴上的投影与该数之积,即