工业和信息化普通高等教育“十二五”规划教材立项项目

概率论与数理统计

谭福锦　农吉夫　主编

莫愿斌　黎进香　方丽菁　邓艳平　副主编

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信[redacted]”规划教材
立项项目[redacted]

概率论与数理统计

谭福锦 农吉夫 主 编
莫愿斌 黎进香 方丽菁 邓艳平 副主编

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 谭福锦，农吉夫主编. -- 北京
人民邮电出版社，2012.9
ISBN 978-7-115-28847-9

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①谭… ②农… Ⅲ. ①概率论②数理统计 Ⅳ. ①021

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第177698号

内 容 提 要

本书共有 8 章，包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的联合概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验.

本书在内容的总体安排上做到循序渐进，衔接自然，层次分明. 各章内容编写力求由浅入深，联系实际，简明易懂，便于老师教学和学生自学. 各章后配备了习题及测试题，并给出了解答. 附录部分收集了近 7 年来全国硕士研究生入学统一考试高等数学试题中与概率论和数理统计相关的试题，供读者自测以及考研者参考.

本书可作为高等院校理、工、农、医、经、管等各专业的概率论与数理统计课程教材，也可供自学者参考.

概率论与数理统计

◆ 主　　编　谭福锦　农吉夫
副 主 编　莫愿斌　黎进香　方丽菁　邓艳平
责任编辑　李海涛

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编　100061　电子邮件　315@ptpress.com cn
网址　http //www ptpress com cn
北京艺辉印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：14　2012 年 9 月第 1 版
字数：334 千字　2012 年 9 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-28847-9

定价：29.80 元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言

Preface

概率论与数理统计是高等学校的一门重要基础课程，也是应用性极强的一门学科，它在理学、工学、农学、医学、经济学、管理学、军事学和体育科学等学科领域具有广泛的应用. 针对这门课程的特点，我们编写本书的基本思路：着重概率统计思想和方法的阐述，着重学生应用能力的培养. 结合各门数学课程教学时数普遍被压缩减少的趋势，本书在介绍概率论与数理统计中的主要概念、思想和方法时力求简明易懂，选例注重联系实际，解析问题深入浅出，突出解决问题的思路，详尽介绍各种概率统计方法及其应用.

教材改革是教学改革的重要内容之一. 面向 21 世纪的概率统计教材一方面要在培养和提高学生应用能力上有较大突破，另一方面要在培养学生的数学素质，增强学生学习数学的兴趣上进行探索. 我们参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制订的《非数学类专业数学基础课程教学基本要求》，并按照教育部面向 21 世纪课程教材规划的要求，组织多位长期在教学第一线的教师，集大家多年教学之经验，并博取多家优秀教材之长，循序渐进，编写了这本简明易懂的教材. 本书内容较为全面，对于不同的教学对象和不同专业类别，可根据实际情况在教学中进行取舍. 为方便读者检测学习效果以及扩大视野，我们在各章后配备了习题及测试题并给出了解答，附录部分收集了近 7 年来全国硕士研究生入学统一考试高等数学试题中与概率论和数理统计相关的试题，供考研者参考. 这也是本书在传承各版本教材传统特色基础上的又一新特色.

本书各章节的具体编写人员如下：第一章（含习题、测试题及答案）由莫愿斌编写；第二章、第三章和第五章（含习题、测试题及答案）由农吉夫编写；第四章由邓艳平编写；第六章由方丽菁编写；第七章（含习题与答案）和附录 C 由黎进香编写；第四章习题、测试题及答案，第八章（含习题、测试题及答案）由谭福锦编写；附表（常用分布表）由农吉夫编写. 全书最后由谭福锦进行统稿、修改和校审.

我们深知在众多概率论与数理统计经典教材面前，要写出一本体系结构新颖，特色鲜明，简明易懂，深受欢迎的教材是十分困难的，这本教材的编写仅仅是我们对教材改革探索工作的开始，我们将不断努力，为概率论与数理统计课程的教学改革尽一份力量.

由于编者水平有限，书中难免有缺点和错误，欢迎广大读者批评指正.

编　者

2012 年 6 月

目录

Contents

第一章　随机事件与概率

在自然界和人们的生产实践或科学试验活动中，经常遇到各种各样的现象，这些现象大体可分为两类：一类是在一定条件下必然会发生的现象，我们称这类现象为**确定性现象**或**必然现象**．例如，重物在高处总是垂直落到地面；树上苹果成熟后，在地心引力作用下一定下落；在标准大气压下，水在100℃时必然会沸腾等．另一类则是在一定条件下可能会出现也可能不会出现的现象，称为**随机现象**．例如，在相同的条件下抛掷一枚硬币，可能出现正面，也可能不出现正面；掷一颗骰子，观察出现的点数，可能是“1 点”、“2 点”、……、“6 点”，这 6 种结果会出现哪一种，在投掷前是不能确定的等．

由于随机现象的结果事先不能预知，仅就一次试验或观察而言，随机现象带有不确定性，但这仅仅是随机现象的一个方面，随机现象还有规律性的另一个方面．人们发现同一随机现象大量重复出现时，它的结果呈现某种规律性．人们把随机现象在大量重复观察时，所得的结果呈现的某种规律性称为随机现象的**统计规律性**．概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一个数学分支，它在自然科学和社会科学的诸多领域有着广泛的应用．

第一节　随机事件

一、随机试验

要想了解随机现象的统计规律性，就要对随机现象进行重复观察．为了叙述方便，我们把对某种自然现象作一次观察或进行一次科学试验，统称为一个**试验**．

例如，记录某学生 10 次投篮投中的次数；抛一枚硬币 5 次，观察出现正面的次数；观察某一段时间内经过某地的车辆数等均为试验．

上述试验具有以下特征．

（1）可重复性：可以在相同条件下重复进行；

（2）可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且在试验之前能明确试验的所有可能结果；

（3）不确定性：进行一次试验之前不能预知哪一个结果会出现，但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个．

在概率论中，我们将具有上述 3 个特征的试验称为**随机试验**，记为 E .以后我们所说的试验都是随机试验．

二、样本空间

要认识一个随机试验，首先需要弄清楚它所有可能出现的结果．我们把随机试验的每一种可能的结果称为一个**样本点**，记为 ω ，随机试验中所有样本点的全体称为这个随机试验的样本空间，记为 S（或 Ω）．

例如:（1）在抛掷一枚硬币观察其出现正面或反面的试验中，所有可能出现的结果为正面或反面．则试验有两个样本点：正面、反面．样本空间为$S=\{$正面，反面$\}$．

（2）投掷一颗均匀的骰子一次，观察出现的点数，则样本点为ω_1="1点"，ω_2="2点"，ω_3="3点"，ω_4="4点"，ω_5="5点"，ω_6="6点"，于是样本空间为$S=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$．

（3）记录某位播音员在某个播音节目中发音错误次数，其样本点为无穷多个，即i（次）（$i=0,1,2,3\cdots$），样本空间可简记为

$$S=\{0,1,2,3\cdots\}$$

（4）设随机试验从两个男生（记号为1,2）与三个女生（记号为3,4,5）中任选两人．

① 若观察选出两个的性别，则样本点为ω_{00}（两个男生），ω_{11}（两个女生），ω_{01}（一男一女），于是，样本空间为

$$S=\{\omega_{00}, \omega_{11}, \omega_{01}\}$$

② 若观察选出两人的号码，则样本点为ω_{ij}（选出第i号与第j号）$1\leqslant i<j\leqslant 5$.于是样本空间共有$C_5^2=10$个样本点，样本空间为

$$S=\{1\leqslant i<j\leqslant 5\}$$

由此可见，由于所观察的随机试验不同，因而相应的样本空间可能很简单也可能很复杂，即使在同一随机试验中，由于所关心的问题的不同，对于样本空间也可以有不同的选取．

三、随机事件

在随机试验中，人们除了关心试验的结果本身外，往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征．在概率论中，把具有某一可观察特征的随机试验的结果称为**事件**．样本空间S是随机试验的所有可能结果的全体，每个样本点是该集合的一个**元素**．一个事件是由具有该事件按所要求的特征的那些可能结果所构成的，所以一个事件是对应于S中具有相应特征的样本点所构成的集合，它是S的一个子集．于是，**任何一个事件都可以用S的某个子集来表示**．我们称仅含一个样本点的事件为**基本事件**，含有两个或两个以上的事件为**复合事件**．

事件可以分为以下三类．

（1）**随机事件**：在试验中可能发生也可能不发生的事件称为随机事件．常用A，B，$C\cdots$大写字母表示．

例如，在抛硬币的试验中，用A表示"出现正面"这一事件，则A是一个随机事件．

（2）**必然事件**：每次试验中都必然发生的事件称为必然事件．

例如，样本空间S包含所有的样本点，它是S自身的子集，每次试验中都必然发生，故它就是一个必然事件．

（3）**不可能事件**：在每次试验中都不可能发生的事件称为不可能事件．

例如，空集ϕ不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中都不可能发生，故它可看成是一个不可能事件．

四、事件的关系与运算

进行一个试验，因为事件是样本空间的一个集合，故事件之间的关系与运算可按集合之间的关系与运算来处理．下面我们引进事件之间的一些重要关系和运算．

（1）如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生，记为 $A\cap B=\phi$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的，或称是**互斥**的．

例如：必然事件 Ω 与不可能事件 ϕ 是互不相容的．

（2）如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A **包含于**事件 B，或称事件 B **包含**事件 A，记作 $A\subset B$．

（3）如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，且若事件 B 发生必然导致事件 A 发生，即 $A\subset B$ 且 $A\supset B$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A=B$．

（4）若 C 表示“事件 A 与 B 中至少有一个发生”这一事件，称它为 A 与 B 的**和**（**或并**），记为 $C=A\cup B$，$A\cup B$ 有时也记作 $A+B$．

类似地，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的**和事件**．

（5）若 D 表示“事件 A 与 B 同时发生”这一事件，称它为 A 与 B 的**积**（或交），记为 $D=A\cap B$．

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的**积事件**．

（6）若 E 表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件，则称为事件 A 与事件 B 的**差**，记为 $E=A-B$．

例如，在记录某学生 10 次投篮投中次数的试验中，记事件

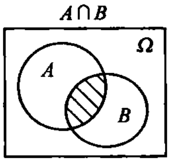
A：“投中次数为奇数”，B：“投中次数小于 5”．

则
$$A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,7,9\}，\quad A\cap B=\{1,3\}，\quad A-B=\{5,7,9\}．$$

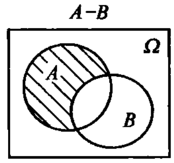
（7）若对每次试验而言，事件 A、B 中必有一个发生，且仅有一个发生，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，或称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**．记为 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\phi$．事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，于是 $\overline{A}=S-A$．

事件的关系与运算可用以下维恩图形象表示．若用平面上一个矩形表示样本空间，矩形内的点表示样本点，圈 A 和圈 B 分别表示事件 A 与事件 B．

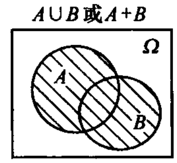
$A\cap B$



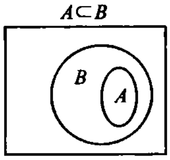
$A-B$



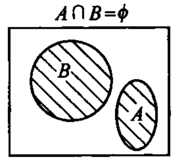
$A\cup B$ 或 $A+B$



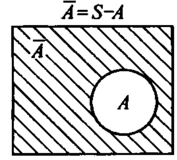
$A\subset B$



$A\cap B=\phi$



$\overline{A}=S-A$



五、事件的运算规律

事件的运算规律与集合的运算规律相同，设A、B、C为同一随机试验E中的事件，则有：

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（3）分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

（4）自反律　$\overline{\overline{A}}=A$；

（5）对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$．

上述各运算律可推广到有限个或可数个事件的情形．

例 1.1　甲、乙、丙三门炮各向同一目标发射一发炮弹，设事件A表示甲炮击中目标，事件B表示乙炮击中目标，事件C表示丙炮击中目标，问：

（1）和事件$A+B+C$表示什么？

（2）和事件$AB+AC+BC$表示什么？

（3）积事件$\overline{ABC}$表示什么？

（4）和事件$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$表示什么？

（5）恰好有一门炮击中目标应如何表示？

（6）恰好有两门炮击中目标应如何表示？

（7）三门炮都击中目标应如何表示？

（8）目标被击中应如何表示？

解　（1）和事件$A+B+C$表示三门炮中至少有一门炮击中目标；

（2）和事件$AB+AC+BC$表示三门炮中至少有两门炮击中目标；

（3）积事件$\overline{ABC}$表示三门炮不都击中目标；

（4）和事件$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$表示三门炮至多有两门击中目标；

（5）恰好有一门炮击中目标：可用事件$A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$表示；

（6）恰好有两门炮击中目标：可用事件$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$表示；

（7）三门炮都击中目标：可用积事件ABC表示；

（8）目标被击中：可用和事件$A+B+C$表示．

第二节　随机事件的概率

对于一个随机试验中的各种随机事件，一般总会发现有些事件出现的可能性较大，有些事件出现的可能性较小，有些事件出现的可能性大致相同，那么这些可能性到底有多大？我们希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小．为此，我们先引入频率的概念．

一、频率及其性质

定义 1.1　在相同的条件下进行n次试验，其中事件A发生的次数为m，称m为A发生的**频数**，而$f(A)=\dfrac{m}{n}$称为事件A的**频率**．

显然，频率有以下性质：

（1）$0 \leq f(A) \leq 1$；

（2）$f(S)=1$；

（3）若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 为互不相容的事件，则

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = f(A_1) + f(A_2) + \cdots + f(A_n) .$$

抛掷质地均匀的硬币，也就是假设硬币的两面是对称的，若试验次数较少，很难发现什么规律．但若试验次数增多，就可以发现规律．以下是前人做抛掷硬币试验的结果（见表 1-1)。

表 1-1　　抛掷硬币试验结果

	抛掷次数 n	出现正面次数 m	频率 $\frac{m}{n}$
蒲丰（Buffon）	4040	2048	0.5069
皮尔逊(Person)	12000	6019	0.5016
皮尔逊(Person)	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

从表 1-1 容易看出，当抛掷次数 n 很大时，出现正面的频率总在 0.5 左右摆动．而且随着抛掷次数的逐渐增加，出现正面的频率与 0.5 的偏差越来越小，这说明频率具有稳定性，而频率的稳定性的事实说明了随机事件发生的可能性大小的数的存在性．

二、概率的定义

定义 1.2（概率的统计定义）　在确定条件下多次重复试验中，如果 A 发生的频率稳定在确定常数 $p(0 \leq p \leq 1)$ 附近摆动，且随着试验次数的增加，摆动的幅度越来越小，则称这个确定常数 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)=p$.

显然，统计概率有与频率完全相同的 3 条性质．

例如，事件 A 发生的概率为 p，p 的大小反映了在一次试验中 A 发生的可能性的大小．在 n 次重复试验中，事件 A 发生的次数约为 np ．例如，在抛掷质地均匀的硬币的试验中，正面出现的概率为 0.5，则在 10000 次重复试验中，出现正面的次数约为 $10000 \times 0.5 = 5000$ 次．

定义 1.3　（概率的公理化定义）设 E 为随机试验，S 为它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A，与 A 对应的一个实数 $P(A)$，若满足

（1）非负性：有 $P(A) \geq 0$；

（2）完备性：$P(S)=1$；

（3）可列可加性：设 A_1，A_2，…互不相容，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) .$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率．

三、概率的性质

由概率的公理化定义可以推出概率的一些重要的性质．

性质 1　$P(\phi)=0$.

证明 令 $A_n=\phi(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\phi$，且 $A_iA_j=\phi(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$.由概率的可列可加性得

$$P(\phi)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\phi).$$

由概率的非负性知 $P(\phi)\geqslant 0$，所以由上式可得 $P(\phi)=0$.

这个性质说明不可能事件的概率为 0，但反之不然.

性质 2（有限可加性）设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个互不相容的事件，则有 $P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$.

证明 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\phi$，$A_iA_j=\phi$，当 $i\neq j,i,j=1,2,\cdots$ 时，由可列可加性

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}P(A_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+0=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).$$

性质 3 设 A，B 为两个事件，若 $A\subset B$，则

（1） $P(B-A)=P(B)-P(A)$；

（2） $P(A)\leqslant P(B)$.

证明 因为 $A\subset B$，可知 $B=A\bigcup(B-A)$ 且 $A\bigcap(B-A)=\phi$，由有限可加性知 $P(B)=P(A\bigcup(B-A))=P(A)+P(B-A)$，即

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

又因为 $$P(B-A)\geqslant 0,$$

所以 $$P(A)\leqslant P(B).$$

性质 4 （加法公式）对任意两个事件 A，B，有

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明 因为 $A\bigcup B=A\bigcup(B-AB)$ 且 $A\bigcap(B-AB)=\phi$，由性质 2，性质 3 得

$$P(A\bigcup B)=P(A\bigcup(B-AB))=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 4 可以推广到任意 n 个事件的并的情形：对任意 n 个事件 $A_1,A_2\cdots,A_n$，由归纳法可证得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_1)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}^{n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

性质 5 对任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明 因为 $\overline{A}\bigcup A=S$，$\overline{A}\bigcap A=\phi$，由有限可加性知

$$1=P(S)=P(A\bigcup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$

故

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 6 对任一事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$.

证明 因为 $A\subset S$，由性质 3 得 $P(A)\leqslant P(S)=1$.

例 1.2 某公司在业余时间组织外语和计算机两个培训班，该公司 80 名员工中有 40 名参加外语班，26 名参加计算机班，其中同时参加两个班学习的有 10 名职工，在该公司任抽取一名员工，问他是参加培训班学习的员工的概率是多少？

解 设 A={参加外语学习}，B={参加计算机学习}，那么 $A \cup B$={参加培训班学习}．则 $P(A)=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{26}{80}=\frac{13}{40}$，$P(AB)=\frac{10}{80}=\frac{1}{8}$．

所以

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{13}{40}-\frac{1}{8}=\frac{7}{10}.$$

第三节 古典概型

对于事件 A，我们所关心的是在一次试验当中其发生的可能性大小，这个可能性大小是可以度量的，这种度量就是“概率”，我们用符号 $P(A)$ 表示．那么如何计算事件 A 的概率 $P(A)$ 呢？一般情况下，计算随机事件的概率是比较复杂的，而且对于不同类型的试验其计算事件概率的方法是不同的．在本节中我们讨论一类比较简单的随机试验，随机试验中每个样本点的出现是等可能的情形．

引例 （1）抛掷一枚质地均匀的硬币，只有“正面向上”或“反面向上”两种结果，而且这两种结果出现的可能性相同，均为 1/2．

（2）从 100 件同类型的产品中，任意抽取一件进行质量检查，则有 100 种抽法，且每种出现的可能性大小相同，均是百分之一．

这一类随机试验是一类最简单的概率模型，它曾经是概率论发展初期的主要研究对象．

一、古典概型

首先我们给出古典概型定义及古典概率计算公式．

定义 1.4 如果随机试验满足下述两条：

（1）随机试验只有有限个可能的结果．即样本空间可以写成如下形式

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\};$$

（2）基本事件 $\{\omega_1\}$，$\{\omega_2\}$，…，$\{\omega_n\}$ 发生的可能性相等．

则称此试验为**古典概型或等可能概型**．在概率论的产生和发展过程中，它是最早的研究对象，而且在实际应用中也是最常用的一种概率模型．

在古典概型中，因为每个基本事件发生的概率相等，对于有 n 个基本事件的样本空间，每个事件发生的概率都是 $1/n$，若事件 A 包含 m 个基本事件，则随机事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}.$$

我们称由上式给出的概率为**古典概率或古典概率计算公式**．

二、计算古典概率的方法——排列与组合

1. 基本计数原理

（1）**加法原理** 设完成一件事有 m 种方式，第 i 种方式有 n_i 种方法，则完成该事件的方

法总数为 $n_1+n_2+\cdots+n_m$.

（2）**乘法原理** 设完成一件事有 m 个步骤，其中第 i 步有 n_i 种方法，则必须通过 m 个步骤的每一步才能完成该事件，则完成该事件的方法总数为 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_m$.

2. 排列组合方法

（1）**排列公式**

从 n 个不同元素中任取 k 个 $(1\leqslant k\leqslant n)$ 元素的不同排列总数为

$$\mathrm{P}_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

$k=n$ 时称其为**全排列**

$$\mathrm{P}_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!.$$

（2）**组合公式**

从 n 个不同元素中任取 k 个 $(1\leqslant k\leqslant n)$ 元素的不同组合总数为

$$\mathrm{C}_n^k=\frac{P_n^k}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!},$$

C_n^k 有时记作 $\binom{n}{k}$，称为**组合系数**.

注：$\mathrm{P}_n^k=\mathrm{C}_n^k\cdot k!$.

例 1.3 一个盒子中有 10 把钥匙，其中 3 把能打开门，7 把不能打开门，求：

（1）从盒子中任取一把钥匙，这把钥匙能打开门的概率；

（2）从盒子中任取两把钥匙，刚好一把能打开一把不能打开的概率以及两把都能打开的概率.

解（1）10 把钥匙中任取一把，共有 $\mathrm{C}_{10}^1=10$ 种取法，10 把钥匙中有 3 把能打开门，取得能打开门的钥匙的取法有 $\mathrm{C}_3^1=3$ 种，从而根据古典概率计算公式，事件 A："取到能打开门的钥匙"的概率为

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_{10}^1}=\frac{3}{10}.$$

（2）10 把钥匙中任取两把的取法有 C_{10}^2 种，其中刚好一把能打开一把不能打开的取法有 $\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_7^1$ 种，两把都能打开的取法有 C_3^2 种，记 B 为事件"刚好一把能打开一把不能打开"，C 为事件"两把均能打开"，则

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_7^1}{\mathrm{C}_{10}^2}=\frac{3}{10},\quad P(C)=\frac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_{10}^2}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}.$$

例 1.4 20 件产品中有 3 件次品，现从中随机地抽取两件．求：

（1）其中恰有一件次品的概率；

（2）其中至少有一件次品的概率.

解 从 20 件产品中任意抽取两件，基本事件总数为 C_{20}^2.

（1）设 A 为所抽取的"2 件中恰有 1 件是次品"的事件，则 A 包含基本事件数 $\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_{17}^1$，所以

$$P(A)=\frac{C_3^1\cdot C_{17}^1}{C_{20}^2}=\frac{51}{190}.$$

（2）设B为所抽取的两件中至少有一件是次品的事件，这包括“恰有一件是次品”和“两件都是次品”两种情况，它包含的基本事件数$C_3^1\cdot C_{17}^1+C_3^2\cdot C_{17}^0$，则

$$P(B)=\frac{C_3^1\cdot C_{17}^1+C_3^2\cdot C_{17}^0}{C_{20}^2}=\frac{27}{95}.$$

例 1.5 袋中有形状相同的10个小球，其中4个红球，6个白球，今按下述取法连续从袋中取3个球，分别求下列事件的概率：

$A=$“3个都是白球”；

$B=$“2个红球，1个白球”.

（1）每次抽取一个，检查后放回，然后再抽取下一个，这种抽取方法称为**有返回抽样**；

（2）每次抽取一个，检查后不放回，再在剩下的球中再抽取一个，这种抽取方法称为**不返回抽样**.

解 （1）有返回抽样

由于每次抽取出的小球看过颜色后放回袋中，因此每次都是从10个小球中抽取，由乘法原理，从10个小球中有放回地抽取3个的所有可能的取法共有$C_{10}^1\cdot C_{10}^1\cdot C_{10}^1=1000$种，若$A$发生，即3次取的小球都是白球，则$A$中所含样本点个数为$C_6^1\cdot C_6^1\cdot C_6^1=6^3$，所以

$$P(A)=\frac{C_6^1\cdot C_6^1\cdot C_6^1}{C_{10}^1\cdot C_{10}^1\cdot C_{10}^1}=\left(\frac{6}{10}\right)^3=0.216.$$

若B发生，即3次取的小球有两次取的是红球，一次取的是白球，考虑到红球出现的次序，B中所含样本点个数为$C_3^2\cdot C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_6^1$，所以

$$P(B)=\frac{C_3^2\cdot C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_6^1}{C_{10}^1\cdot C_{10}^1\cdot C_{10}^1}=0.288.$$

（2）无返回抽样

第一次从10个小球中抽取一个，由于不再放回，因此第二次从9个小球中抽取1个，第三次从8个小球中抽取1个，因而样本空间Ω中的元素有$C_{10}^1\cdot C_9^1\cdot C_8^1$个. 类似讨论可知，$A$中所含样本点个数为$C_6^1\cdot C_5^1\cdot C_4^1$，所以

$$P(A)=\frac{C_6^1\cdot C_5^1\cdot C_4^1}{C_{10}^1\cdot C_9^1\cdot C_8^1}=\frac{6\times5\times4}{10\times9\times8}\approx0.167,$$

B中所含样本点个数为$C_3^2\cdot C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_6^1$，所以

$$P(B)=\frac{C_3^2\cdot C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_6^1}{C_{10}^1\cdot C_9^1\cdot C_8^1}=0.3.$$

第四节 条件概率

一、条件概率

设A，B为两个事件，常常会求“事件B发生的条件下A发生”的概率，由于B发生可