总主编◎李朝东

精讲精练

学生用书

选修2-1

高中数学

人A国标

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

总主编◎李朝东

精讲精练

本册主编：李军合

学生用书

选修2-1

高中数学

人 A 国标

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

精讲精练：高中数学．2－1：选修/ 李朝东主编．--银川：宁夏人民教育出版社，2009.8(2011.11 重印)

ISBN 978－7－80764－174－2

Ⅰ．①精… Ⅱ．①李… Ⅲ．①数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．① G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 153893 号

精讲精练——数学 选修 2－1(人 A 国标) **李朝东 主编**

责任编辑 柳毅伟

装帧设计 杭永鸿

责任印制 刘 丽

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社 出版发行

地　　址 银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)

网　　址 www.yrpubm.com

网上书店 www.hh－book.com

电子信箱 jiaoyushe@yrpubm.com

邮购电话 0951－5014294

经　　销 全国新华书店

印刷装订 马鞍山新华印务有限公司

开　本 880mm×1230mm 1/16　**印　张** 10　**字　数** 200 千　**印　数** 5000 册

版　次 2009 年 8 月第 1 版　**印　次** 2011 年 11 月第 2 次印刷

书　号 ISBN 978－7－80764－174－2/G·1112

定　价 27.50 元

前言

高中阶段的师生对教学过程的需求呈现出与其他学段不同的特点，我们理解为以下两个方面：

1. 科目增多，单科学习时间减少，教师上课，一个知识点可能只能讲一遍，高中学习更多地体现在老师进行方法点拨，学生自主学习，举一反三，不会像初中那样面面俱到。

2. 现在新课标的教材内容都是不确定的，短短的课堂时间，老师不能够把重难点知识和这些不确定知识讲明白，或者是讲明白了，学生没有听懂。学生没听懂，还没有办法从教材上获取解决的方法。

我们依此设计本套丛书，主要的功能就是解决复习的问题，课后对课堂知识进行及时复习、消化，弥补课堂教学不足，弥补教材讲解的不足，同时还兼顾预习功能和提高功能。课前引导学生进行有效预习，课后对部分重难点知识进行拓展、解题方法进行归纳总结，起到提高、升华的作用。

与同类书相比，本套丛书有三大特色：

一、练习更加注重针对性和有效性。同类图书一般只注重知识点讲解部分，忽视练习部分。我们认为这类图书的关键部分应该是练习，其次是知识点的讲解。我们的练习，紧扣教材，知识点全面，重难点突出，层次清晰，考查方式多样，材料新颖。形式上更加好用，单元测试卷和参考答案活页装订，便于阶段测试。

二、讲解的深度符合同步教学。本套丛书的定位在于新课的内容讲解，适度拓展，不像同类书，一讲就达到高考的程度。其目的是帮助学生巩固课堂所学。

三、每个学科都有其鲜明的学科特点。每个学科的栏目设置不同，以充分体现本学科的学科特点为原则，例如：地理增加了对图表的解读，政治增加了对热点问题的链接，语文、英语也各具特点。

一本好书的形成不光是编者的事情，更多的是使用者积极参与，您在使用过程中有好的建议，请不吝赐教。

我们的联系方式：www.jing-lun.cn，jinglun@yahoo.cn

编　者

读者反馈表

尊敬的读者：

您好！感谢您使用《经纶学典·精讲精练》！

为了不断提高图书质量，恳请您写下使用本书的体会与感受，我们将真诚地吸纳。**在修订时将刊登您的意见，并予以一定的奖励，以表达我们诚挚的谢意。**

读者简介	姓　名		性　别		出生年月	
	所在学校			通讯地址		
	联系方式	(H)： 手机：		(O)： E－mail：		
本书情况		学科		版本		年级

您对本书栏目的评价：	您对本书体例形式的评价：	您的购买行为：
1. 课标导学： 需要□　不需要□ 2. 知识梳理： 不够详细□　正好□ 过于详细□ 3. 疑难剖析： 易□　正好□　难□ 4. 典型题解： 全面□　不全面□ 5. 提升训练： 难□　合理□　易□	1. 栏目设置： 过多□　适中□　过　少□ 2. 题空： 过大□　正好□　过　小□ 3. 版式： 美观□　一般□　不美观□ 4. 封面： 美观□　一般□　不美观□	1. 您购买本书的途径： 广　告□　教师推荐□ 家长购买□　学校统一购买□ 自己购买□　同学推荐□ 2. 您购买本书的主要原因(可多选)： 广告宣传□　包装形式□ 内　容□　图书价格□ 封面设计□　书　名□

您对本书的其他意见：

欢迎登录：www. jing-lun. cn

通信地址：南京红狐教育传播研究所(南京市租用 16－02#信箱)　　**邮编**：210016

目 录

CONTENTS

第一章　常用逻辑用语

1.1　命题及其关系

1.1.1　命　　题

—————自·主·探·究—————

课标导学
kebiaodaoxue

1. 了解命题的意义，能够判断一个语句是否为命题.
2. 了解“若 p，则 q”型的命题的意义，能够判断这种形式的命题的真假.

基础梳理
jichushuli

1. 命题的概念

一般地，在数学中，我们把用语言、符号或式子表达的，可以________的________叫做命题．其中________的语句叫做真命题，________的语句叫做假命题.

2. 命题的形式

命题的一般形式为__________，其中 p 叫做命题的条件，q 叫做命题的结论.

【参考答案】

1. 判断真假　陈述句　判断为真　判断为假
2. 若 p，则 q

—————重·难·点·突·破—————

疑难剖析
yinanpouxi

1. 对命题概念的理解

(1)并不是任何语句都是命题，只有那些能判断真假的陈述句才是命题，一般来说，疑问句、祈使句、感叹句都不是命题.

(2)一个命题的真假是唯一确定的，要么是真的，要么是假的，不能模棱两可无法判断其真假，当一个命题改写成“若 p，则 q”的形式后，判断真假的方法如下：

①若由 p 经过逻辑推理得出 q，则可判定“若 p，则 q”是真；判定“若 p，则 q”为假，则只需举一个反例说明.

②从集合的观点看，建立集合 A、B 与命题中的 p，q 之间的一种特殊关系．设 $A=\{x|p(x)\}$，$B=\{x|q(x)\}$，此时，命题“若 p，则 q”为真当且仅当 $A\subseteq B$ 时满足.

2. 若将含有大前提的命题改写成“若 p，则 q”的形式时，大前提不变，仍作大前提，不能写在条件 p 中.

典型题解
dianxingtijie

题型1　命题的概念与判断

例 1　判断下列语句哪些是命题.

(1)矩形难道不是平行四边形吗？

(2)垂直于同一条直线的两条直线必平行吗？

(3)一个数不是合数就是质数；

(4)大角所对的边大于小角所对的边；

(5)$x+y$ 是有理数，则 x、y 也都是有理数；

(6)求证 $x\in\mathbf{R}$，方程 $x^2+x+1=0$ 无实根；

(7)$x>7$；

(8)指数函数的图象真漂亮！

[解析]　判断一个语句是不是命题，就是要看它能不能判断真假.

[答案]　(1)通过反问句，对矩形是平行四边形作出判断，是命题.

(2)疑问句，没有对垂直于同一条直线的两条直线平行作出判断，不是命题.

(3)是命题.

(4)是命题.

(5)是命题.

(6)祈使句,不是命题.

(7)开语句不是命题.

(8)感叹句,不是命题.

[点评] 判定一个语句是否是命题,一定要紧扣定义.

(1)一个命题,要么真、要么假,二者只有其一.

(2)一般来说,疑问句、祈使句、感叹句都不是命题.

(3)像题(7)这种,在没有给 x 赋值前,没有办法判断真假的语句,称为开语句,不是命题.

[借题发挥1] 下列语句:①$\sqrt{2}$是无限循环小数;②$x^2-3x+2=0$;③当 $x=4$ 时,$2x>0$;④三角形的三条中线的交点可以在三角形外;⑤$3.1415>\pi$;⑥把门关上. 其中不是命题的是________.

题型2 命题的结构

例2 把下列命题改写成"若 p,则 q"的形式.

(1)$ac>bc\Rightarrow a>b$;

(2)已知 x、y 为正整数,当 $y=x+1$ 时,$y=3$,$x=2$;

(3)当 $m>\frac{1}{4}$时,$mx^2-x+1=0$ 无实数根;

(4)当 $abc=0$ 时,$a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$;

(5)负数的立方是负数.

[解析] 找准命题的条件和结论是解决这类题目的关键.

[答案] (1)若 $ac>bc$,则 $a>b$.

(2)已知 x、y 为正整数,若 $y=x+1$,则 $y=3$ 且 $x=2$.

(3)若 $m>\frac{1}{4}$,则 $mx^2-x+1=0$ 无实数根.

(4)若 $abc=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$.

(5)若一个数是负数,则这个数的立方是负数.

[点评] 解决此类题目,首先要分清命题的条件和结论,尤其是(2)中大前提不能作为条件来处理;(5)还可以改写成若一个数是负数的立方,则这个数是负数. 一个命题改写成"若 p,则 q"的形式时,改法不一定唯一.

[借题发挥2] 把下列命题改写成"若 p,则 q"的形式.

(1)线段的垂直平分线上的点,到线段两端点的距离相等;

(2)偶函数的图象关于 y 轴成轴对称.

题型3 判定命题的真假

例3 判断下列命题的真假.

(1)如果学好了数学,那么就会使用电脑;

(2)若 $x=3$ 或 $x=7$,则 $(x-3)(x-7)=0$;

(3)正方形既是矩形又是菱形;

(4)若 a、b 都是奇数,则 ab 必是奇数.

[解析] 判定一个命题是真命题还是假命题,关键是看能否由命题的条件推出命题的结论,若能推出则是真命题,否则为假命题.

[答案] (1)是假命题,学好数学与会使用电脑不具有因果关系,因而无法推出结论,故为假命题.

(2)是真命题,$x=3$ 或 $x=7$ 能得到 $(x-3)(x-7)=0$.

(3)是真命题,由正方形的定义知正方形既是矩形又是菱形.

(4)是真命题,令 $a=2k_1+1$,$b=2k_2+1$ $(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$,

则 $ab=2(2k_1k_2+k_1+k_2)+1$,

显然 $2k_1k_2+k_1+k_2$ 是一个整数,故 ab 是奇数.

[点评] 判断一个命题为假命题,只要举出一个反例即可,而判断一个命题为真命题,一定要进行严格的逻辑推理.

[借题发挥3] 判断下列命题的真假.

(1)0 不能作除数;

(2)没有一个无理数不是实数;

(3)若两直线不相交,则这两条直线平行;

(4)集合 A 是集合 $A\cap B$ 的子集.

提·升·训·练

1. 下列语句是命题的是 ( )

A. 对角线相等的四边形

B. 同位角相等

C. $x \geqslant 2$

D. $x^2-2x-3<0$

2. 下列命题中,是真命题的是 ( )

A. $\{\varnothing\}$是空集

B. $\{x \mid |x-1|<3, x \in \mathbf{N}\}$是无限集

C. π是有理数

D. $x^2-5x=0$的根是自然数

3. 若$a,b \in \mathbf{R}$,且$a^2+b^2 \neq 0$,则

①a,b全为0;

②a、b不全为0;

③a,b全不为0;

④a,b至少有一个不为0,

其中真命题的个数为 ( )

A. 0　B. 1

C. 2　D. 3

4. 若M、N是两个集合,则下列命题中是真命题的是 ( )

A. 如果$M \subseteq N$,那么$M \cap N = M$

B. 如果$M \cap N = N$,那么$M \subseteq N$

C. 如果$M \subseteq N$,那么$M \cup N = M$

D. 如果$M \cup N = N$,那么$N \subseteq M$

5. 已知命题"非空集合M的元素都是集合P的元素"是假命题,那么下列命题:

①M的元素都不是P的元素;

②M中有不属于P的元素;

③M中有P的元素;

④M中元素不都是P的元素.

其中真命题的个数为 ( )

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

6. 下列语句中是命题的有________.

①等边三角形难道不是等腰三角形吗;

②一个数不是正数就是负数;

③大角所对的边大于小角所对的边;

④$x+y$为有理数,则x、y也都是有理数;

⑤作$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

7. 下列命题:

①若$k>0$,则方程$x^2-2x-k=0$有实数根;

②若$a>b$,则$a+c>b+c$;

③对角线相等的四边形是矩形;

④若$xy=0$,则x、y中至少有一个为0.

其中真命题的序号是________.

8. 指出下列命题中的条件p与结论q.

(1)若四边形是正方形,那么它的四边相等;

(2)若四边形的四边相等,则它是一个正方形;

(3)如果$a>0$,则$a^2>0(a \in \mathbf{R})$;

(4)如果$a^2+b^2=0$,则$a=b=0(a,b \in \mathbf{R})$.

9. 将下列命题改写成"若p,则q"的形式,并判断其真假.

(1)偶数能被2整除;

(2)奇函数的图象关于原点对称;

(3)同弧所对的圆周角不相等.

10. 已知"$x_1<x_2<0$,则$\frac{a}{x_1}>\frac{a}{x_2}$"是假命题,求$a$满足的条件.

1.1.2 四 种 命 题

1.1.3 四种命题间的相互关系

自·主·探·究

课标导学

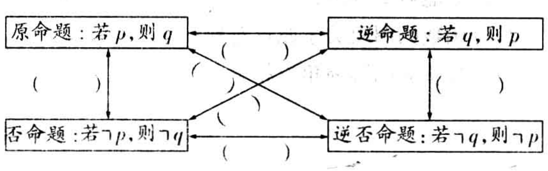
1. 了解命题的逆命题、否命题和逆否命题的意义及其相互关系.
2. 掌握四种命题真假性定理，特别是互为逆否命题的等价性定理.

基础梳理

1. 四种命题的概念

如果原命题为“若 p，则 q”，则逆命题____________，否命题____________，逆否命题____________.

2. 四种命题的相互关系



3. 四种命题的真假性定理

(1)两个命题互为逆否命题，它们有________的真假性.

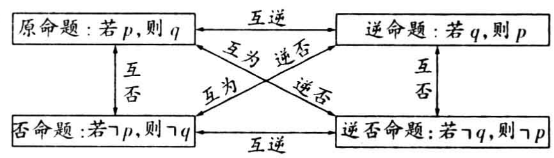
即若 p，则 $q\Leftrightarrow$________.

(2)两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性________.

【参考答案】

1. 若 q，则 p　若 $\neg p$，则 $\neg q$　若 $\neg q$，则 $\neg p$

2.



3. (1)相同　若 $\neg q$，则 $\neg p$　(2)没有关系

重·难·点·突·破

疑难剖析

1. 书写四种命题应注意的问题

(1)一定要分清命题的条件与结论，注意大前提是不能作为条件来对待的，它在四种形式里是不变的.

例如：判断命题“若 $a>b$，则 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$”的逆否命题的真假.

如果忽视命题的大前提 a，b 为实数，则会给出如下错误解答：

其逆否命题为“若 $\sqrt{a}$ 不大于 $\sqrt{b}$，则 a 不大于 b”. 由于“不大于”就是“小于等于”，所以这个逆否命题可变形为：若 $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$，则 $a\leq b$，逆否命题为真.

由条件可知，原命题为假，而逆否命题为真，这与教材的相关结论矛盾，原因在于：

命题的大前提是 a、b 为实数，对于逆否命题：若 $\sqrt{a}$ 不大于 $\sqrt{b}$，则 a 不大于 b. 应分下列两种情况进行讨论：

①$\sqrt{a}$ 不大于 $\sqrt{b}$ 有意义，即 $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$，推出 $a\leq b$.

②$\sqrt{a}$ 不大于 $\sqrt{b}$ 无意义（如 a、b 出现负值），整个命题就无意义，$a\leq b$ 不一定成立.

由①②可得，该命题的逆否命题为假.

(2)一定要注意条件与结论的否定形式.

2. 命题的逆否证法

因为命题与它的逆否命题的真假性相同，所以我们可以利用这一点，通过证明命题的逆否命题正确来肯定命题，这种证明方法叫做逆否证法，这也是一种间接的证明方法.

典型题解

题型1　四种命题及其相互关系

例1　分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断这些命题的真假.

(1)已知 a、b 是实数，若 $ab>0$，则 $a>0$ 且 $b>0$；

(2)若 $a^2+b^2=0$，则 a、b 全为零.

［解析］　写出命题四种形式主要是分清命题的条件与结论.

［答案］　(1)逆命题：已知 a、b 是实数，若 $a>0$ 且 $b>0$，则 $ab>0$. 此命题是真命题.

否命题:已知 a、b 是实数,若 $ab\leqslant 0$,则 $a\leqslant 0$ 或 $b\leqslant 0$. 此命题是真命题.

逆否命题:已知 a、b 是实数,若 $a\leqslant 0$ 或 $b\leqslant 0$,则 $ab\leqslant 0$. 此命题是假命题.

(2)逆命题:若 a、b 全为零,则 $a^2+b^2=0$. 此命题是真命题.

否命题:若 $a^2+b^2\neq 0$,则 a、b 不全为零. 此命题是真命题.

逆否命题:若 a、b 不全为零,则 $a^2+b^2\neq 0$. 此命题是真命题.

[**点评**] 判定命题四种形式的真假,方法有二. 一是写出命题直接判定;二是利用命题真假性之间的关系,互为逆否的两个命题同真同假. 从而只要判定两个命题即可.

[**借题发挥1**] 把下列命题写成"若 p,则 q"的形式,并写出它们的逆命题、否命题与逆否命题.

(1)方程 $x^2+2x+1=0$ 有实根;

(2)全等三角形的面积相等.

题型2 逆否命题的等价性

例2 写出下列命题的等价命题.

(1)圆内接四边形的对角互补;

(2)若 $x=1$ 或 $x=-3$,则 $x^2+2x-3=0$;

(3)奇数不能被2整除.

[**解析**] 因为命题与它的逆否命题等价,所以写出它的逆否命题即可.

[**答案**] (1)对角不互补的四边形,不是圆内接四边形.

(2)若 $x^2+2x-3\neq 0$,则 $x\neq 1$ 且 $x\neq -3$.

(3)能被2整除的数不是奇数.

[**点评**] 写逆否命题要注意以下几点:

(1)分清命题的条件与结论.

(2)将条件与结论否定.

(3)交换否定的条件与否定的结论.

[**借题发挥2**] 试判断命题"若 $x\neq 1$ 或 $x\neq 2$,则 $x^2-3x+2\neq 0$"的真假.

题型3 命题的逆否证法

例3 求证:若 $p^2+q^2=2$,则 $p+q\leqslant 2$.

[**解析**] 将"若 $p^2+q^2=2$,则 $p+q\leqslant 2$"视为原命题,要证明原命题为真命题,可以考虑证明它的逆否命题"若 $p+q>2$,则 $p^2+q^2\neq 2$"为真命题. 从而达到证明原命题为真命题的目的.

[**答案**] 逆否命题:若 $p+q>2$,则 $p^2+q^2\neq 2$.

由 $p^2+q^2=\dfrac{1}{2}[(p+q)^2+(p-q)^2]\geqslant\dfrac{1}{2}(p+q)^2$,

$\because p+q>2$,$\therefore (p+q)^2>4$,$\therefore p^2+q^2>2$.

即 $p+q>2$ 时,$p^2+q^2\neq 2$ 成立.

故原命题成立.

[**点评**] 逆否证法与反证法不同,逆否证法是利用了命题的等价性,而反证法是通过否定命题的否定形式来肯定命题.

[**借题发挥3**] 已知奇函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数,a、$b\in\mathbf{R}$,若 $f(a)+f(b)\geqslant 0$,求证:$a+b\geqslant 0$.

提·升·训·练

1. 给出命题:已知 a、b、c、d 是实数,若 $a\neq b$ 且 $c\neq d$,则 $a+c\neq b+d$,原命题、逆命题、否命题、逆否命题中,真命题有 ( )

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 4 个

2. 当命题"若 p,则 q"为真时,下列命题中一定正确的是 ( )

A. 若 q,则 p　　B. 若 $\neg p$,则 $\neg q$

C. 若 $\neg q$,则 $\neg p$　　D. 若 $\neg p$,则 q

3. 命题"若 $x^2<1$,则 $-1<x<1$"的逆否命题是 ( )

A. 若 $x^2\geqslant 1$,则 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$

B. 若 $-1<x<1$,则 $x^2<1$

C. 若 $x>1$ 或 $x<-1$,则 $x^2>1$

D. 若 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$,则 $x^2\geqslant 1$

4. 如果命题 p 的否命题为 r,命题 r 的逆命题是 s,则 s 是 p 的逆命题 t 的 ( )

A. 逆否命题　　B. 逆命题

C. 否命题　　D. 原命题

5. 命题"两条对角线相等的四边形是矩形"是命题"矩形是两条对角线相等的四边形"的 ( )

A. 逆命题　　B. 否命题

C. 逆否命题　　D. 等价命题

6. 与命题"能被 6 整除的整数,一定能被 2 整除"等价的命题是 ( )

A. 能被 2 整除的整数,一定能被 6 整除

B. 不能被 6 整除的整数,一定不能被 2 整除

C. 不能被 6 整除的整数,不一定不能被 2 整除

D. 不能被 2 整除的整数,一定不能被 6 整除

7. 下列命题正确的是 ( )

①"若 $x^2+y^2\neq 0$,则 x、y 不全为零"的否命题;

②"若 $x+y=0$,则 x、y 互为相反数"的逆命题;

③"若 a^b 是无理数,则 a、b 是无理数"的逆命题;

④"若 $a+\sqrt{5}$是有理数,则 a 是无理数"的逆否命题.

A. ①②③　　B. ①②④

C. ②③④　　D. ①③④

8. 设 α、β 为两个不同的平面,l、m 为两条不同的直线,且 $l\subset\alpha$,$m\subset\beta$,有下面两个命题:

①若 $\alpha/\!/\beta$,则 $l/\!/m$;

②若 $l\perp m$,则 $\alpha\perp\beta$,

那么它们的逆否命题是真命题的是 ( )

A. ①　　B. ②

C. ①②　　D. 都是假命题

9. 如果否命题为"若 $x+y\leqslant 0$,则 $x\leqslant 0$ 或 $y\leqslant 0$",则相应的原命题是____________________.

10. 命题"奇函数的图象关于原点对称"的逆否命题是____________________.

11. 命题"若 $a>b$,则 $2^a>2^b-1$"的否命题为____________.

12. 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断它们的真假.

(1)若 $q<1$,则方程 $x^2+2x+q=0$ 有实根;

(2)若 $ab=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$.

13. 求证:若 $a^2+b^2=c^2$,则 a、b、c 不可能都是奇数.

1.2 充分条件与必要条件

1.2.1 充分条件与必要条件

1.2.2 充 要 条 件

——自·主·探·究——

课标导学 kebiaodaoxue

1. 理解充分条件、必要条件、充要条件的意义.
2. 会判断所给条件是否是充分条件、必要条件、充要条件.

基础梳理 jichushuli

1. 充分条件与必要条件

一般地,"若 p,则 q"为真命题,是指由 p 通过推理可以得出 q. 这时,我们就说,由 p 可推出 q,记作________,并且说 p 是 q 的__________,q 是 p 的__________.

2. 充要条件

一般地,如果既有 $p\Rightarrow q$,又有 $q\Rightarrow p$,就记作________. 此时,我们说,p 是 q 的充分必要条件,简称__________.

若 $p\nRightarrow q$ 且 $p\nRightarrow q$,则 p 是 q 的____________________.

【参考答案】

1. $p\Rightarrow q$　充分条件　必要条件
2. $p\Leftrightarrow q$　充要条件　既不充分也不必要条件

——重·难·点·突·破——

疑难剖析 yinanpouxi

1. $p\Rightarrow q$ 的等价形式

在逻辑推理中,$p\Rightarrow q$ 还可以表达成以下 5 种形式:

(1)"若 p,则 q"为真命题.

(2)p 是 q 的充分条件.

(3)q 是 p 的必要条件.

(4)q 的充分条件是 p.

(5)p 的必要条件是 q.

这 5 种形式表示的逻辑关系是一样的,只是形式不同而已.

2. 判断命题的充要条件的三种方法

(1)定义法:直接利用定义进行判断.

①分清条件和结论.

②找推式:判断"$p\Rightarrow q$"与"$q\Rightarrow p$"的真假.

③下结论:根据推式及定义下结论.

(2)等价法:即利用 $A\Rightarrow B$ 与 $\neg B\Rightarrow\neg A$,$B\Rightarrow A$ 与 $\neg A\Rightarrow\neg B$,$A\Leftrightarrow B$ 与 $\neg B\Leftrightarrow\neg A$ 的等价关系. 对于条件或结论是不等关系(否定式)的命题,一般运用等价法.

(3)利用集合间的包含关系判断:写出集合 $A=\{x|p(x)\}$,集合 $B=\{x|q(x)\}$,若 $A\subseteq B$,则 p 是 q 的充分条件或 q 是 p 的必要条件;若 $A=B$,则 p 是 q 的充要条件.

3. 证明充要条件时的注意点

充要条件的证明问题,要证明两个方面,一是充分性,二是必要性,为此必须先搞清谁是 p,谁是 q,于是证充分性就是证 $p\Rightarrow q$,必要性就是证 $q\Rightarrow p$.

4. 四种命题的真假与充要条件的关系

若原命题"若 p,则 q"是真命题,则 p 是 q 的充分条件. 如果逆命题"若 q,则 p"是真命题,则 p 是 q 的必要条件. 原命题与逆命题都为真,则 p 是 q 的充要条件.

5. 符号的正确用法

千万不能将"若 p,则 q"与"$p\Rightarrow q$"混为一谈,只有当"若 p,则 q"是真命题时,它才可以写成"$p\Rightarrow q$"."若…,则…"是联结词,"$\Rightarrow$"是推出符号.

典型题解 dianxingtijie

题型1　充分条件、必要条件、充要条件的判定

例1　"$m=\frac{1}{2}$"是"直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直"的　(　　)

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

[解析] 本题考查条件的判断，本题把直线的位置关系与命题的条件相结合，应从位置关系入手根据充分条件、必要条件、充要条件的定义式进行判断.

解法一：当 $m=\frac{1}{2}$ 时，两直线变为 $\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}y+1=0$ 和 $-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}y-3=0$，两直线斜率之积为 -1，两直线垂直；

当 $m=-2$ 时，两直线变为 $-6y+1=0$ 和 $-4x-3=0$，仍然垂直.

则当 $m=\frac{1}{2}$ 时可推出两直线垂直，而若两直线垂直，m 还可以为 -2.

即为充分不必要条件. 选 B.

解法二：∵ 两直线互相垂直，

∴ $(m+2)(m-2)+3m(m+2)=0$，

即 $m=-2$ 或 $m=\frac{1}{2}$.

故为充分不必要条件. 故选 B.

[答案] B

[点评] (1)判断充分条件、必要条件、充要条件，应分别根据"若 p，则 q"与"若 q，则 p"的真假进行，定义是判断问题的基本依据. 对于否定性命题，注意利用等价命题来判断.

如命题 p：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A\neq 60°$.

q：$\sin A\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$，问 p 是 q 的什么条件.

$\neg p$：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60°$.

$\neg q$：$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

显然 $\neg p\Rightarrow\neg q$，∴ $q\Rightarrow p$，

∴ p 是 q 的必要不充分条件.

(2)本题在利用两直线垂直的条件时，一是利用斜率关系，二是利用两直线垂直的系数关系（方向向量）解决，我们要注意多角度考虑问题.

[借题发挥1] 对任意实数 a、b、c，给出下列命题

①"$a=b$"是"$ac=bc$"的充要条件；

②"$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"的充要条件；

③"$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件；

④"$a<5$"是"$a<3$"的必要条件.

其中真命题的个数是 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

例2 若 p：$|3x-4|>2$，q：$\frac{1}{x^2-x-2}>0$，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件.

[解析] 利用集合中子集与推出的关系判定.

[答案] 解不等式 $|3x-4|>2$，

得 p：$A=\left\{x\,\middle|\,x>2\text{ 或 }x<\frac{2}{3}\right\}$

解不等式 $\frac{1}{x^2-x-2}>0$，

得 q：$B=\{x|x>2$ 或 $x<-1\}$.

∴ $B\subset A$，

∴ q 是 p 的充分不必要条件.

∴ $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件.

[点评] 用子集来判定推出关系有时很简便.

[借题发挥2] 已知 p：$x^2-2x-3>0$，q：$|x-1|<a(a>2)$，则 q 是 $\neg p$ 的什么条件.

题型2 充分条件、必要条件、充要条件的应用

例3 已知 p：$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q$：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围.

[解析] 本题考查充要条件的应用. 关键是把 p、q 之间的关系转化为 p、q 确定的集合之间的包含关系，借助数轴解决问题.

[答案] 解法一：由 $\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，

得 $-2\leqslant x\leqslant 10$，

∴ $\neg p$：$A=\{x|x>10$ 或 $x<-2\}$，

由 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$，

得 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m(m>0)$，

∴ $\neg q$：$B=\{x|x>1+m$ 或 $x<1-m,m>0\}$.

∵ $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件，∴ $A\subset B$.

结合数轴有 $\begin{cases}m>0,\\1+m\leqslant 10,\\1-m\geqslant -2,\end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant 3$.

即 m 的取值范围是 $(0,3]$.

解法二：由 $\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$ 得 $-2\leqslant x\leqslant 10$.

∴ p：$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$.

由 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ 得 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m(m>0)$.

∴ q：$B=\{x|1-m\leqslant x\leqslant 1+m,m>0\}$.

∵ $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件，

∴ $\neg p\Rightarrow\neg q$，$\neg q\nRightarrow\neg p$，

∴ $q\Rightarrow p$，$p\nRightarrow q$.

∴ $B\subset A$，结合数轴有 $\begin{cases}m>0,\\1+m\leqslant 10,\\1-m\geqslant -2,\end{cases}$

解得 $0<m\leqslant 3$.

即 m 的取值范围是 $(0,3]$.

[点评] 解决这类问题时，一是直接求解，如解法一；二是转化为等价命题求解，即 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件等价于 q 是 p 的充分不必要条件，所以 $q\Rightarrow p$，$p\nRightarrow q$，如解法二.

[借题发挥 3] 设命题 p：$|4x-3|\leqslant 1$，命题 q：$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

题型 3 充要条件的证明

例 4 已知关于 x 的方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0(a\in\mathbf{R})$，求方程有两个正根的充要条件.

[解析] 充要条件就是等价关系，要注意转化.

[答案] 设 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0(a\in\mathbf{R})$ 有两个正根 x_1、x_2，

则 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1+x_2>0,\\ x_1x_2>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(a+2)^2+16(1-a)\geqslant 0,\\ \dfrac{a+2}{a-1}>0,\\ \dfrac{4}{a-1}>0,\end{cases}$

得 $1<a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant 10$.

反之若 $1<a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant 10$，则

$\Delta=(a+2)^2+16(1-a)\geqslant 0$，$x_1+x_2=\dfrac{a+2}{a-1}>0$，$x_1x_2=\dfrac{4}{a-1}>0$，即 x_1，x_2 为两个正根.

即 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0(a\in\mathbf{R})$ 有两个正根的充要条件是 $1<a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant 10$.

[点评] 两个正根的等价命题要联系判别式、两根之和、两根之积，三者缺一不可. 在求解充要条件的过程中，也可以不必区分充分性、必要性，但必须保证每一个步骤之间都可以用"$\Leftrightarrow$"联结.

[借题发挥 4] 求关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实根的充要条件.

例 5 设 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边，求证：方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有公共根的充要条件是 $A=90°$.

[解析] 由于在 $\triangle ABC$ 中 $A=90°$ 的充要条件是 $a^2=b^2+c^2$，于是就是由 $a^2=b^2+c^2$ 来推得这两个方程有公共根，以及由两个方程有公共根推得 $a^2=b^2+c^2$.

[答案] 充分性：

$\because A=90°$，$\therefore a^2=b^2+c^2$，

于是方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 可化为 $x^2+2ax+a^2-c^2=0$.

$\therefore x^2+2ax+(a+c)(a-c)=0$.

$\therefore [x+(a+c)][x+(a-c)]=0$.

$\therefore$ 该方程有两个根 $x_1=-(a+c)$，$x_2=-(a-c)$.

同理，另一方程 $x^2+2cx-b^2=0$ 可化为 $x^2+2cx-(a^2-c^2)=0$，

$\therefore x^2+2cx+(c+a)(c-a)=0$，

$\therefore [x+(c+a)][x+(c-a)]=0$.

$\therefore$ 该方程有两个根 $x_3=-(a+c)$，$x_4=-(c-a)$.

可以发现 $x_1=x_3$，

$\therefore$ 这两个方程有公共根.

必要性：

设 α 是两方程的公共根，

$\therefore \begin{cases}\alpha^2+2a\alpha+b^2=0, & ①\\ \alpha^2+2c\alpha-b^2=0. & ②\end{cases}$

由①＋②得 $2\alpha^2+2\alpha(a+c)=0$.

$\because \alpha\neq 0$，

$\therefore \alpha=-(a+c)$，将 $\alpha=-(a+c)$ 代入①得

$a^2=b^2+c^2$，

$\therefore A=90°$.

综上可知，方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有公共根的充要条件是 $A=90°$.

[点评] (1)充分性与必要性不要混淆，保证这一点的前提是分清题目的条件与结论.

(2)本题论证的关键是必要性，即由两方程有公共根如何推得 $A=90°$，通过引进公共根 α，并将它代入这两个方程后找到解题的突破口.

[借题发挥 5] 求证：关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个负实根的充要条件是 $m\geqslant 2$.

提·升·训·练

1. “$x>2$”是“$x^2>4$”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 设集合 $M=\{x|0<x\leqslant 3\}$，$N=\{x|0<x\leqslant 2\}$，那么“$a\in M$”是“$a\in N$”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. $p:|x|=x$，$q:x^2\geqslant -x$，则 p 是 q 的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 如果 p、q 都是 r 的必要条件，s 是 r 的充分条件，q 是 s 的充分条件，那么 s 是 q 的 ( )

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 设 $x\in\mathbf{R}$，则 $x>2$ 的一个必要不充分条件是 ( )

A. $x>1$　　B. $x<1$

C. $x>3$　　D. $x<3$

6. 函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是 ( )

A. $ab=0$　　B. $a+b=0$

C. $a=b$　　D. $a^2+b^2=0$

7. 函数 $y=x^2+bx+c$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调函数的充要条件是 ( )

A. $b\geqslant 0$　　B. $b\leqslant 0$

C. $b>0$　　D. $b<0$

8. 当 x、y 都是实数时，下列命题：

①“$x+y>0$”是“$|x+y|=x+y$”的充分不必要条件；

②“x、y 同号”是“$|x+y|=|x|+|y|$”的充要条件；

③“x、y 异号”是“$|x+y|<|x|+|y|$”的必要不充分条件；

④“$x<y$”是“$|x|<|y|$”的既不充分也不必要条件.

其中为真命题的是 ( )

A. ①②　　B. ②③

C. ③④　　D. ①④

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=p^n+q(p\neq 0$ 且 $p\neq 1)$，则 $\{a_n\}$ 为等比数列的充要条件是________.

10. 不等式 $|x-a|<1$ 成立的充分不必要条件为 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，则实数 a 的取值范围是________.

11. 已知 $p:A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$，$q:B=\{x|x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0\}$，若 p 是 q 的充分条件，求实数 a 的取值范围.

12. (1)求 $ax^2-ax+1>0(a\neq 0)$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的充要条件；

(2)求 $ax^2-ax-1<0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的充要条件.

13. 求证：方程 $x^2+ax+1=0(a\in\mathbf{R})$ 的两实根的平方和大于 3 的必要条件是 $|a|>\sqrt{3}$，这个条件是其充分条件吗？为什么？