



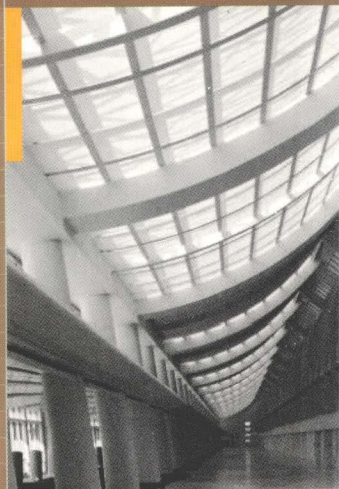
全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

大学数学系列教材

微积分

(理工类)(下册)

主 编 吴明华 胡桂华
莫国良 唐志丰



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

大学数学系列教材

微 积 分

Weijifen

(理工类)

(下册)

主 编 吴明华 胡桂华
莫国良 唐志丰



高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本教材是全国教育科学“十一五”规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题项目研究成果之一,参照了最新的“工科类数学基础课程教学基本要求”,是为独立学院微积分课程而编写的教材。

本教材分上、下两册,按教学需要,将内容编排成十四章。上册包括第一章到第七章,内容包括:函数,极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程。本书是下册,包括第八章到第十四章,内容包括:向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,二重积分,三重积分,曲线积分,曲面积分,无穷级数。以上内容为独立学院本科学生学习微积分课程必须掌握的基础知识,其中打*号的章节供选学。

本教材可作为独立学院理、工、医等非数学类专业微积分课程的教材,也可作为其他本科院校微积分课程的选用教材。

图书在版编目(CIP)数据

微积分(理工类)下册/吴明华等主编.--北京:高等教育出版社,2011.12

ISBN 978-7-04-033796-9

I. ①微… II. ①吴… III. ①微积分-高等学校-教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 217516 号

策划编辑 杨 波
责任校对 金 辉

责任编辑 杨 波
责任印制 田 甜

封面设计 赵 阳

版式设计 马敬茹

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京铭传印刷有限公司
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 16.25
字 数 300 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2011年12月第1版
印 次 2011年12月第1次印刷
定 价 22.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 33796-00

大学数学系列教材编写委员会

主 任:杨志民 吴明华

副主任(按汉语拼音排序):

柴惠文	胡桂华	金义明	林仁炳
唐志丰	王志江	徐延安	张 彤
宗云南			

编 委(按汉语拼音排序):

陈珍培	陈芝花	葛美宝	贺建辉	胡素芬
扈文佳	李春艳	李太勇	李小亮	刘 静
刘 伟	刘 怡	楼 敏	卢 军	莫国良
施晓燕	陶银罗	王 芬	魏艳辉	杨曼丽
姚永芳	余永清	袁中阳	曾平安	章月红
张云霞	赵雅因	周 尉	朱国清	

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第八章 向量代数与空间解析

几何 1

8.1 空间直角坐标系 1

8.2 向量、向量的线性运算和 向量的坐标表示 3

8.2.1 向量的概念 3

8.2.2 向量的线性运算 4

8.2.3 向量的坐标表示 5

8.3 向量的数量积与向 量积 8

8.3.1 向量的数量积 8

8.3.2 向量的向量积 10

8.3.3 向量的混合积 12

8.4 平面方程和空间直线 方程 14

8.4.1 平面及其方程 15

8.4.2 空间直线方程 18

8.4.3 平面束方程 20

8.5 曲面与空间曲线 21

8.5.1 曲面方程 22

8.5.2 空间曲线方程 25

8.5.3 二次曲面 27

第八章内容小结 30

第八章总习题 32

第九章 多元函数微分学 35

9.1 多元函数的基本概念 35

9.1.1 n 维空间及 n 维空间中 的距离和邻域 35

9.1.2 平面点集 37

9.1.3 二元函数的定义 37

9.1.4 二元函数的定义域 38

9.1.5 二元函数的图形 39

9.1.6 二元函数的极限 40

9.1.7 二元函数的连续性 42

9.2 偏导数 44

9.2.1 偏导数的定义 44

9.2.2 高阶偏导数 47

9.3 多元复合函数的偏 导数 48

9.3.1 全增量公式 49

9.3.2 多元复合函数的求导 法则 50

9.3.3 多元复合函数求导 法则的其他情形 51

9.4 隐函数的偏导数 54

9.5 全微分 56

9.5.1 全微分的定义 57

9.5.2 全微分的一阶形式 不变性 58

9.5.3 利用全微分进行 近似计算 59

9.6 空间曲线的切线与法平面, 曲面的切平面与法线 60

9.6.1 空间曲线的切线与法 平面 60

9.6.2 曲面的切平面与法线 62

9.7 多元函数的极值及 应用 63

9.7.1 多元函数的极值	63	11.1.1 三重积分的概念	105
9.7.2 多元函数的最值问题 ...	65	11.1.2 三重积分的性质	107
9.7.3 条件极值问题	66	11.2 三重积分在直角坐标系	
9.8 方向导数与梯度	70	中的算法	108
第九章内容小结	73	11.2.1 三重积分在直角坐标	
第九章总习题	74	系下的表示式	108
第十章 二重积分	77	11.2.2 三重积分在直角坐标	
10.1 二重积分的概念与		系下的算法	109
性质	77	11.3 三重积分在柱面坐标系	
10.1.1 二重积分的概念	77	中的算法	113
10.1.2 二重积分的性质	80	11.3.1 三重积分在柱面坐标	
10.2 二重积分在直角坐标		系下的表示式	114
系下的算法	82	11.3.2 三重积分在柱面坐标	
10.2.1 二重积分在直角坐标		系下的计算举例	116
系下的表示式	82	11.4 三重积分在球面坐标系	
10.2.2 x -型区域与 y -型		中的算法	118
区域	82	11.4.1 三重积分在球面坐标	
10.2.3 二重积分在直角坐标		系下的表示式	119
系下的算法	83	11.4.2 三重积分在球面坐标	
10.3 二重积分在极坐标系下		系下的计算举例	121
的算法	89	11.5 三重积分在几何和物理	
10.3.1 二重积分在极坐标系下		中的应用举例	124
的表示式	89	11.5.1 对称区域上三重积分的	
10.3.2 二重积分在极坐标下的		积分性质	124
算法	90	11.5.2 三重积分在几何和物理	
10.4 二重积分在几何和物理		上的应用举例	125
中的应用举例	95	第十一章内容小结	130
10.4.1 对称区域上二重积分的		第十一章总习题	131
积分性质	95	第十二章 曲线积分	133
10.4.2 二重积分在几何、物理		12.1 第一类曲线积分	133
上的应用举例	97	12.1.1 第一类曲线积分的	
第十章内容小结	102	基本概念	133
第十章总习题	103	12.1.2 第一类曲线积分的计算	
第十一章 三重积分	105	法及在几何和物理中的	
11.1 三重积分的概念与		应用举例	135
性质	105	12.2 第二类曲线积分	140

12.2.1 第二类曲线积分的基本 概念与性质	140	* 13.4 斯托克斯公式与旋度 ...	184
12.2.2 第二类曲线积分的计算 法及其应用举例	142	13.4.1 斯托克斯公式	184
12.3 格林公式及平面上 曲线积分与路径的 无关性	146	13.4.2 向量场的环量与旋度 ...	186
12.3.1 格林公式	146	13.4.3 空间曲线积分与 路径的无关性	189
12.3.2 格林公式的应用 举例	149	第十三章内容小结	190
12.3.3 平面上曲线积分与 路径的无关性	152	第十三章总习题	192
12.4 全微分方程	159	第十四章 无穷级数	195
12.4.1 全微分方程	159	14.1 常数项无穷级数的 概念与性质	195
12.4.2 全微分方程的求解 举例	160	14.1.1 常数项无穷级数的 概念	195
第十二章内容小结	161	14.1.2 收敛级数的性质	198
第十二章总习题	162	14.2 正项级数及其判别法 ...	202
第十三章 曲面积分	164	14.2.1 比较判别法	203
13.1 第一类曲面积分	164	14.2.2 比值判别法	206
13.1.1 第一类曲面积分的 基本概念	164	14.3 任意项级数	209
13.1.2 第一类曲面积分的计算 法及在几何和物理中的 应用举例	166	14.3.1 交错级数判别法	209
13.2 第二类曲面积分	169	14.3.2 任意项级数的判别法 ...	211
13.2.1 定侧曲面	170	14.4 幂级数	212
13.2.2 第二类曲面积分的 基本概念与性质	170	14.4.1 函数项级数的概念 ...	212
13.2.3 第二类曲面积分的 算法	172	14.4.2 幂级数	213
13.2.4 第二类曲面积分的 计算及其应用举例 ...	173	14.4.3 幂级数的运算与性质 ...	219
13.3 高斯公式与散度	177	14.4.4 初等函数的幂级数 展开	221
13.3.1 高斯公式	177	14.5 傅里叶级数	225
13.3.2 散度	181	14.5.1 函数展开成傅里叶级数 的基本理论	226
		14.5.2 以 $2l$ 为周期的函数展开 成傅里叶级数	228
		14.5.3 奇延拓与偶延拓	231
		第十四章内容小结	235
		第十四章总习题	236
		参考答案	239
		参考文献	250

第八章 向量代数与空间解析几何

在一元函数微积分学中,平面解析几何的知识,使许多代数问题与几何问题得以相互转化,人们能够通过“数形结合”理解问题的实质并进而找到解决问题的途径.同理,为了研究多元函数微积分与空间曲面、曲线等问题,我们需要学习与应用空间解析几何知识.本章首先介绍向量代数和空间解析几何的有关概念,然后以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后介绍空间曲线和空间曲面的有关内容.

8.1 空间直角坐标系

过空间某一定点 O ,作三条互相垂直的数轴 Ox, Oy, Oz ,并要求 Ox, Oy, Oz 的正向符合右手系(如图 8-1),即将右手伸直、拇指朝上并与其余四指垂直,记拇指的指向为 Oz 的正向,其余四指的指向为 Ox 的正向,四指弯曲 90° 后的指向为 Oy 轴的正向.由此,三条数轴组成了一个空间直角坐标系.

点 O 称为坐标原点,三条数轴分别称为 Ox 轴, Oy 轴, Oz 轴,统称为坐标轴.任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标平面,由 Ox 轴和 Oy 轴确定的坐标平面称为 xOy 平面,类似地有 yOz 平面和 zOx 平面.三个坐标平面将空间分成八个部分,称为八个卦限(如图 8-2).

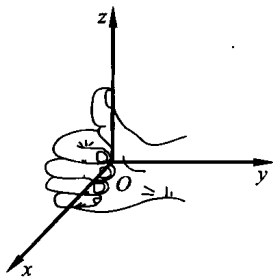


图 8-1

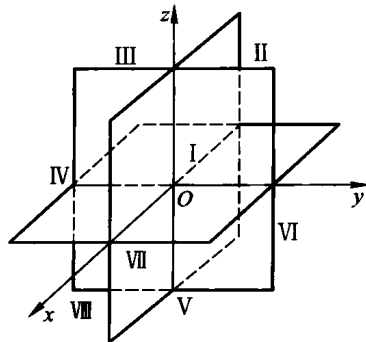


图 8-2

建立空间直角坐标系之后,可以用类似于平面直角坐标系中的方法,定义空间任意点 M 的坐标.过点 M 作三个平面(如图 8-3),分别垂直于 Ox 轴, Oy 轴,

Oz 轴, 且与这三个轴分别交于 P, Q, R 三点, 设这三点在各自所在的坐标轴上的坐标分别为 a, b, c , 则点 M 唯一确定了一个三元有序数组 (a, b, c) . 反之, 对任意一个三元有序数组 (a, b, c) , 在 Ox, Oy, Oz 轴上分别取坐标为 a, b, c 的三个点 P, Q, R , 然后过三点分别作垂直于 Ox, Oy, Oz 轴的平面, 这三个平面相交于一点 M , 则由一个三元有序数组 (a, b, c) 唯一确定了空间的一个点 M . 由此, 空间任意一个点 M 和一个三元有序数组 (a, b, c) 建立了一一对应关系. 我们将这个三元有序数组称为点 M 的坐标, 记为 $M(a, b, c)$.

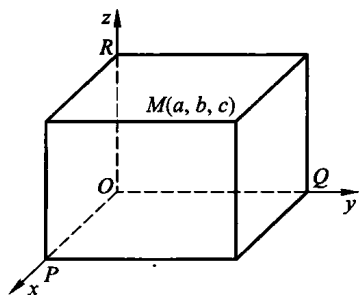


图 8-3

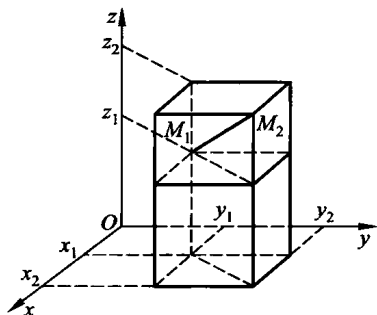


图 8-4

易知, 原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$. Ox 轴, Oy 轴, Oz 轴上的点的坐标分别为 $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$. xOy, yOz, zOx 平面上点的坐标分别为 $(a, b, 0), (0, b, c), (a, 0, c)$.

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中任意两点, 过 M_1, M_2 各作三个垂直于坐标轴的平面, 这六个平面构成一个以线段 M_1M_2 为一条对角线的长方体 (如图 8-4). 长方体的三条棱长分别为 $|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|$, 由勾股定理得线段 M_1M_2 的长为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式.

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 与原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 在 Oy 轴上求一点 P , 使之与点 $A(2, -1, 3)$ 和 $B(4, 1, 2)$ 的距离相等.

解 因为点 P 在 Oy 轴上, 所以该点的坐标为 $P(0, y, 0)$, 按题意有

$$|PA| = |PB|,$$

即

$$\sqrt{2^2 + (y+1)^2 + 3^2} = \sqrt{4^2 + (y-1)^2 + 2^2},$$

解得 $y = \frac{7}{4}$. 因此所求点的为 $P(0, \frac{7}{4}, 0)$.

习题 8.1

- 在空间直角坐标系中,指出下列各点位置的特殊性.
(1) $(0,0,0)$. (2) $(0,3,0)$. (3) $(-1,0,2)$. (4) $(1,1,0)$.
- 写出点 $P(1,-2,3)$ 的下列对称点的坐标.
(1) 关于原点对称. (2) 关于 y 轴对称. (3) 关于 yOz 平面对称.
- 分别求出点 $P(2,-1,4)$ 到坐标原点、 y 轴及 xOz 平面的距离.
- 求出以 $A(-1,2,1), B(3,2,-2), C(2,0,3)$ 为顶点的三角形各边长.
- 在 xOy 面上求点 M ,使它到点 $A(3,-4,3)$ 及点 $B(1,-5,4)$ 的距离都等于 9.

8.2 向量、向量的线性运算和向量的坐标表示

8.2.1 向量的概念

物理学中常见的量有两种:一种称为数量或标量,这种量只有大小而没有方向,例如质量、时间、温度、面积等.另一种称为向量或矢量,这种量既有大小又有方向,例如力、力矩、位移、速度、加速度等.向量不仅在物理学中有重要意义,在许多数学分支中也有重要应用.

向量常用有向线段表示.可用有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 A 为始点, B 为终点的有向线段所表示的向量,记为 $\overrightarrow{AB}$.习惯上,向量也可用一个粗体字母表示(多用于书本上的印刷体),例如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 等,又可用带箭头的字母表示(多用于书写时),例如 $\vec{a}, \vec{b}$ 等(如图 8-5).

向量的大小称为向量的模.向量 $\overrightarrow{AB}, \mathbf{a}$ 的模分别记为 $|\overrightarrow{AB}|, |\mathbf{a}|$.模等于 1 的向量称为单位向量.模等于零的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$.零向量没有确定的方向,也可以认为它的方向是任意的.

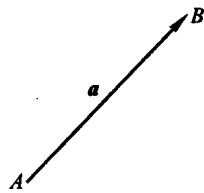


图 8-5

如果向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 方向相同,且 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$,则称 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 相等,记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.由向量相等的定义知,一个向量与它经过平移(方向不变,始点和终点位置改变)后所得到的另一个向量是相等的,这种向量称为自由向量.以后如无特别说明,我们所讨论的向量都是自由向量.由于自由向量只考虑其大小和方向,因此,我们可以把一个自由向量平移,而使它始点位置为任意点,这样,今后如有必要,就可以把几个向量移到同一个起点.

设向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 用有向线段表示,将它们平移,使得始点重合,此两有向线段之间的夹角 θ (规定 $0 \leq \theta \leq \pi$) 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角.易知,当 $\theta = 0$ 时,向量 $\mathbf{a}$ 与

b 方向相同. 当 $\theta = \pi$ 时, 向量 a 与 b 方向相反. a 与 b 方向相同或相反时称向量 a 与 b 平行, 记为 $a \parallel b$. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 称向量 a 与 b 垂直, 记为 $a \perp b$.

8.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 8.1 设有两向量 a 和 b , 将 b 平移使它的始点与 a 的终点重合, 则以 a 的始点为始点, 以 b 的终点为终点的向量 c (如图 8-6), 称为向量 a 与 b 的和, 记作 $a+b$, 即 $c=a+b$.

由定义不难看出, 如果将 a 平移, 使它的始点与 b 的终点重合, 则以 b 的始点为始点, 以 a 的终点为终点的向量也为 $a+b$.

由定义 8.1 得到两向量之和的方法称为向量加法的三角形法则. 三角形法则可以推广到空间中任意有限个向量的和的情形 (如图 8-7).

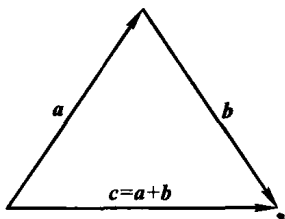


图 8-6

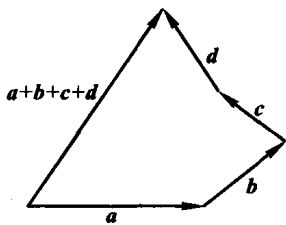


图 8-7

和 $a+b$ 还可以用如图 8-8 作平行四边形的方法得到, 即当 a 与 b 不平行时, 将 a 与 b 平移, 使它们始点移到同一点 O 处, 然后以这两个向量为邻边作平行四边形, 记 A 为与 O 成对角的另一顶点, 则 $\overrightarrow{OA}$ 即为 $a+b$. 这种求和的方法称为向量加法的平行四边形法则.

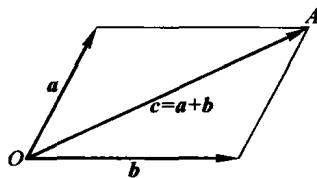


图 8-8

由向量加法定义不难证明向量的加法符合下列运算规律:

- (1) 交换律 $a+b=b+a$.
- (2) 结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$.

2. 向量的减法

定义 8.2 设有两向量 a 和 b , 若向量 c 满足 $b+c=a$, 则向量 c 称为向量 a 与 b 的差, 记作 $a-b$, 即 $c=a-b$.

另外, 与向量 a 的模相同而方向相反的向量叫做 a 的负向量, 记作 $-a$. 以上所定义向量 a 与 b 的差 $a-b$ 可记为 $a+(-b)$, 即 $a-b=a+(-b)$.

由差的定义可知, $a-b$ 可由以下方法得到: 将 a 平移使它的始点与 b 的始

点重合,以 b 的终点为始点,以 a 的终点为终点的向量即为 $a-b$ (如图 8-9).

特殊地, $a-a=a+(-a)=0$.

3. 向量与数的乘法

定义 8.3 实数 λ 与向量 a 的乘积定义为一个向量,记作 λa ,它的模 $|\lambda a|$ 等于 $|\lambda| |a|$. 它的方向规定为:当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向;当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反向;当 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$ 时, $\lambda a = 0$.

特殊地,由定义可知,当 $\lambda = \pm 1$ 时,有

$$1a = a, \quad (-1)a = -a.$$

可以证明向量与数的乘积符合以下运算规律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$.

(2) 分配律 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$, $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

设 a 为非零向量,由于 $\frac{1}{|a|}$ 为大于零的实数,因此向量 $\frac{1}{|a|}a$ 的方向与 a 相同,而模 $\left| \frac{1}{|a|}a \right| = \frac{1}{|a|} |a| = 1$. 由此可知, $\frac{1}{|a|}a$ 是与 a 具有相同方向的单位向量,将它记为 a° ,便有

$$a^\circ = \frac{1}{|a|}a = \frac{a}{|a|},$$

或

$$a = |a| a^\circ.$$

由非零向量 a 求 a° 的过程称为向量 a 的单位化.

向量的加减法和向量与数的乘法叫做向量的线性运算.

8.2.3 向量的坐标表示

为了更加方便地利用坐标讨论向量问题,下面介绍向量的坐标表示.

由于我们所讨论的是自由向量,关心的只是它的大小与方向,而与它的始点的位置无关,因此,在空间直角坐标系中引入向量的坐标表示时,不妨设向量都是以坐标原点为始点.以坐标原点 O 为始点,空间点 $P(x, y, z)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的向径.由此,空间中的点 P 与向径 $\overrightarrow{OP}$ 建立了一一对应关系.

记 i, j, k 分别为方向与 Ox 轴, Oy 轴, Oz 轴的正向一致的单位向量,它们也称为基本单位向量.如图 8-10,设点 P 坐标为 (x, y, z) ,过 P 分别作垂直于 Ox 轴, Oy 轴, Oz 轴的三个平面,与 Ox 轴, Oy 轴, Oz 轴的交点为 M, N, Q ,记 P_1 为

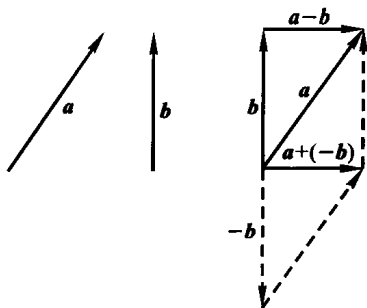


图 8-9

P 于坐标平面 xOy 上的投影, 则有

$$\overrightarrow{OM} = xi, \quad \overrightarrow{ON} = yj, \quad \overrightarrow{OQ} = zk,$$

于是

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = xi + yj + zk.$$

称 $xi + yj + zk$ 为向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标分解式, 其中 (x, y, z) 是 P 点的坐标, 而 xi, yj, zk 分别称为向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 Ox 轴, Oy 轴, Oz 轴上的分向量.

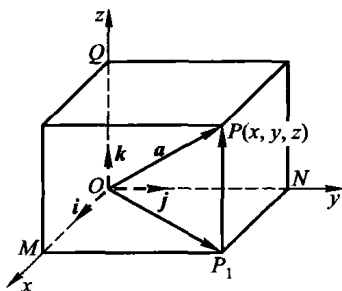


图 8-10

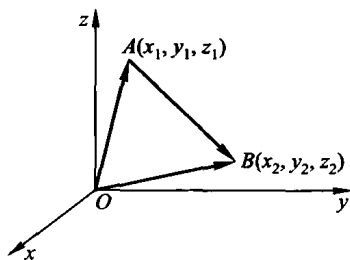


图 8-11

有时我们也将 $xi + yj + zk$ 记为 $\{x, y, z\}$, 即

$$\overrightarrow{OP} = \{x, y, z\}, \quad (8.1)$$

并称 $\{x, y, z\}$ 为向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标, 称 (8.1) 为向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标表示.

特别地, $i = \{1, 0, 0\}$, $j = \{0, 1, 0\}$, $k = \{0, 0, 1\}$.

设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中两点, 则 $\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$, 如图 8-11 所示, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表示为

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_1, y_1, z_1\} \\ &= x_2i + y_2j + z_2k - (x_1i + y_1j + z_1k) \\ &= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k, \end{aligned}$$

即

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \quad (8.2)$$

因此, 对于任一向量, 只要给定始点坐标与终点坐标, 就可以由 (8.2) 式非常方便地得到这一向量的坐标表示式.

利用向量的坐标表示, 很容易进行向量的线性运算. 设 $a = \{a_x, a_y, a_z\}$, $b = \{b_x, b_y, b_z\}$, 则可利用推导 (8.2) 式类似的方法得到

$$a + b = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\},$$

$$a - b = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\},$$

$$\lambda a = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\} \quad (\lambda \text{ 为实数}).$$

设向量 $a = \{x, y, z\}$, 则它的模就是原点到 a 的终点的距离, 即

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

当 $\mathbf{a}$ 为非零向量时, 它的方向可以由它与 x 轴, y 轴, z 轴的正向夹角 α, β, γ 决定, 称 α, β, γ 为向量 $\mathbf{a}$ 的三个方向角 (如图 8-12, $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$), 而称它们的余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦. 根据三角函数定义得到

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{x}{|\mathbf{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos \beta = \frac{y}{|\mathbf{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos \gamma = \frac{z}{|\mathbf{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \end{cases}$$

由上式可知,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

因此与 $\mathbf{a}$ 具有相同方向的单位向量为

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} = \left\{ \frac{x}{|\mathbf{a}|}, \frac{y}{|\mathbf{a}|}, \frac{z}{|\mathbf{a}|} \right\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$

例 1 设 $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 3, 5)$, 求 $\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}|$, $\overrightarrow{AB}^\circ$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 的三个方向角.

解 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{-1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{-2, 1, 2\},$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3,$$

$$\overrightarrow{AB}^\circ = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\},$$

$$\text{三个方向角: } \alpha = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right), \beta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right), \gamma = \arccos\left(\frac{2}{3}\right).$$

例 2 向量 $\mathbf{b}$ 和 y 轴, z 轴的正向夹角分别为 $\beta = 60^\circ, \gamma = 150^\circ$, 且模 $|\mathbf{b}| = 6$, 求向量 $\mathbf{b}$ 的另一个方向角 α 和坐标分解式.

$$\text{解 } \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0,$$

所以 $\alpha = 90^\circ$.

$$x = |\mathbf{b}| \cos \alpha = 6 \times 0 = 0, \quad y = |\mathbf{b}| \cos \beta = 6 \times \frac{1}{2} = 3,$$

$$z = |\mathbf{b}| \cos \gamma = 6 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3},$$

由此向量 $\mathbf{b}$ 的坐标分解式为

$$\mathbf{b} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = 3\mathbf{j} - 3\sqrt{3}\mathbf{k}.$$

习题 8.2

1. 设 $\mathbf{a} = \{1, -2, 3\}$, $\mathbf{b} = \{2, -1, 0\}$, 求 (1) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$. (2) $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

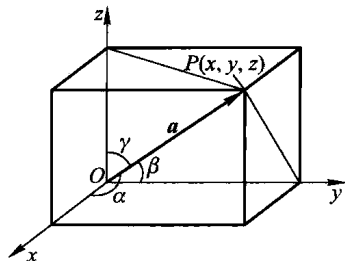


图 8-12

2. 设 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, 求 $|\mathbf{a}|$ 和与 $\mathbf{a}$ 平行的单位向量.
3. 设点 $P_1(1, -2, 3), P_2(-1, 1, 0)$, 求向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标.
4. 一向量模为 5, 且其方向与向量 $\{2, -1, 2\}$ 相同, 求此向量的坐标分解式.
5. 已知向量 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, 其起点坐标为 $(-1, 0, 2)$, 求 $\mathbf{a}$ 的终点坐标及其方向余弦.
6. 设向量 $\mathbf{a}$ 与 x 轴, y 轴正向夹角分别为 $\alpha = 30^\circ, \beta = 120^\circ$, 且模 $|\mathbf{a}| = 4$, 求向量 $\mathbf{a}$ 的另一个方向角 γ 和坐标.
7. 设有一位于原点质量为 m 的质点和一位于点 (x, y, z) 质量为 M 的质点, 求出质点 m 对质点 M 的引力 $\mathbf{F}$ 的表示式.
8. 设平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点为 $A(2, -3, 1), B(-2, 4, 3), C(3, -1, -3)$, 求 D 点坐标.
9. 已知点 $A(3, 2, -1)$ 和点 $B(7, -2, 3)$, 取点 M 使 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$, 求向量 $\overrightarrow{OM}$.
10. 给定 $A(1, -2, 3), B(1, 1, -1), C(1, 4, 3)$, 求 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 平分线上的单位向量.

8.3 向量的数量积与向量积

向量除上节介绍的线性运算外, 还有两种特殊意义的“乘积”——数量积和向量积. 向量的数量积和向量积叫做向量的非线性运算.

8.3.1 向量的数量积

如图 8-13 所示, 设有质点在常力 $\mathbf{F}$ 的作用下从 A 移动到 B , 产生的位移为 $\mathbf{s}$, 若 $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{s}$ 的夹角为 θ , 则力 $\mathbf{F}$ 所做的功为

$$W = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos \theta.$$

由物理学知道, 力与位移都是向量, 而由这两个向量作上述运算之后得到的功是一个数量. 这种运算在其他实际问题中还会常常遇见. 为此我们给出以下定义

定义 8.4 设有向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 它们的夹角为 θ , 乘积 $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$ 称为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**数量积**(又称**点积**、**内积**), 记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta. \quad (8.3)$$

“ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ”读作“ $\mathbf{a}$ 点乘 $\mathbf{b}$ ”.

由定义 8.4 可知, 上述问题中的功 W 是力 $\mathbf{F}$ 与位移 $\mathbf{s}$ 的数量积, 即

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}.$$

向量 $\mathbf{a}$ 与一单位向量 $\mathbf{b}^\circ$ 的数量积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\circ$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 方向上的**投影**, 或称向量 $\mathbf{a}$ 在以向量 $\mathbf{b}$ 为方向轴上的投影. 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\circ = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}^\circ| \cos \theta = |\mathbf{a}| \cos \theta \stackrel{\text{d}}{=} (\mathbf{a})_{\mathbf{b}}.$$

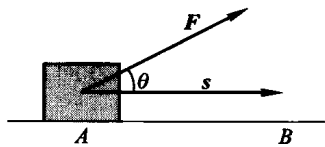


图 8-13

从而有

$$a \cdot b = |b|(a)_b = |a|(b)_a,$$

即 a 与 b 的数量积即为 b 的模与 a 在 b 方向上的投影的乘积, 这就是数量积的几何意义.

由数量积的定义可以证明, 数量积满足下列运算规律:

(1) 交换律 $a \cdot b = b \cdot a$.

(2) 分配律 $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(3) 结合律 $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b)$ (这里 λ 为数值).

由(8.3)还可得到:

(1) $a \cdot a = |a|^2$, $a \cdot a$ 可简记为 a^2 .

(2) 两个非零向量 a 和 b 的夹角 θ 的余弦 $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$.

(3) 对于两个非零向量 a 与 b , $a \cdot b = 0$ 的充要条件是 $a \perp b$.

由此, 三个基本单位向量 i, j, k 满足:

$$\begin{cases} i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1; \\ i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0. \end{cases}$$

设 $a = \{x_1, y_1, z_1\}$, $b = \{x_2, y_2, z_2\}$, 则

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \{x_1, y_1, z_1\} \cdot \{x_2, y_2, z_2\} = (x_1 i + y_1 j + z_1 k) \cdot (x_2 i + y_2 j + z_2 k) \\ &= x_1 x_2 i \cdot i + x_1 y_2 i \cdot j + x_1 z_2 i \cdot k + y_1 x_2 j \cdot i + y_1 y_2 j \cdot j + y_1 z_2 j \cdot k \\ &\quad + z_1 x_2 k \cdot i + z_1 y_2 k \cdot j + z_1 z_2 k \cdot k \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \end{aligned}$$

即

$$a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad (8.4)$$

(8.4)称为两向量数量积的坐标表示式.

由(8.4), 对于非零向量 a 和 b , 它们的夹角 θ 满足

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

进而得到

$$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

例1 已知 $a = \{2, -1, 3\}$, $b = \{3, 1, 4\}$, 求(1) $a \cdot b$. (2) $b^2 a - a^2 b$

解 (1) $a \cdot b = 2 \times 3 + (-1) \times 1 + 3 \times 4 = 17$.

(2) 由于 $a^2 = 2^2 + (-1)^2 + 3^2 = 14$, $b^2 = 3^2 + 1^2 + 4^2 = 26$, 因此

$$b^2 a - a^2 b = 26\{2, -1, 3\} - 14\{3, 1, 4\} = \{10, -40, 22\}.$$

例2 已知空间三点 $A(2, 1, -2)$, $B(1, 1, -1)$, $C(1, 2, -2)$, 求 $\angle ACB$.

解 $\overrightarrow{CA} = \{2-1, 1-2, -2-(-2)\} = \{1, -1, 0\}$,