全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

大学数学系列教材

微积分

（理工类）（下册）

主编 吴明华 胡桂华
莫国良 唐志丰

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

大学数学系列教材

微 积 分

Weijifen

（理工类）

（下册）

主 编 吴明华 胡桂华
莫国良 唐志丰

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本教材是全国教育科学"十一五"规划课题"我国高校应用型人才培养模式研究"数学类子课题项目研究成果之一，参照了最新的"工科类数学基础课程教学基本要求"，是为独立学院微积分课程而编写的教材。

本教材分上、下两册，按教学需要，将内容编排成十四章。上册包括第一章到第七章，内容包括：函数，极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程。本书是下册，包括第八章到第十四章，内容包括：向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，二重积分，三重积分，曲线积分，曲面积分，无穷级数。以上内容为独立学院本科学生学习微积分课程必须掌握的基础知识，其中打 * 号的章节供选学。

本教材可作为独立学院理、工、医等非数学类专业微积分课程的教材，也可作为其他本科院校微积分课程的选用教材。

图书在版编目(CIP)数据

微积分(理工类)下册/吴明华等主编. --北京：高等教育出版社，2011. 12

ISBN 978-7-04-033796-9

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①吴… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 217516 号

策划编辑 杨 波　　责任编辑 杨 波　　封面设计 赵 阳　　版式设计 马敬茹
责任校对 金 辉　　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京铭传印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm×960 mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	16.25	版　　次	2011年12月第1版
字　　数	300 千字	印　　次	2011年12月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	22.50 元

物 料 号　33796-00

大学数学系列教材编写委员会

目　　录

第八章　向量代数与空间解析几何

在一元函数微积分学中，平面解析几何的知识，使许多代数问题与几何问题得以相互转化，人们能够通过"数形结合"理解问题的实质并进而找到解决问题的途径．同理，为了研究多元函数微积分与空间曲面、曲线等问题，我们需要学习与应用空间解析几何知识．本章首先介绍向量代数和空间解析几何的有关概念，然后以向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲线和空间曲面的有关内容．

8.1　空间直角坐标系

过空间某一定点 O，作三条互相垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，并要求 Ox，Oy，Oz 的正向符合右手系（如图 8－1），即将右手伸直、拇指朝上并与其余四指垂直，记拇指的指向为 Oz 的正向，其余四指的指向为 Ox 的正向，四指弯曲 90°后的指向为 Oy 轴的正向．由此，三条数轴组成了一个**空间直角坐标系**．

点 O 称为**坐标原点**，三条数轴分别称为 Ox **轴**，Oy **轴**，Oz **轴**，统称为**坐标轴**．任意两条坐标轴所确定的平面称为**坐标平面**，由 Ox 轴和 Oy 轴确定的坐标平面称为 xOy 平面，类似地有 yOz 平面和 zOx 平面．三个坐标平面将空间分成八个部分，称为八个**卦限**（如图 8－2）．

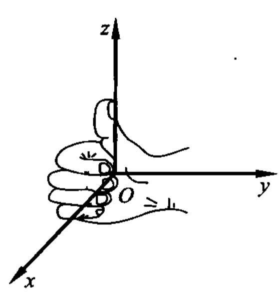

图 8－1

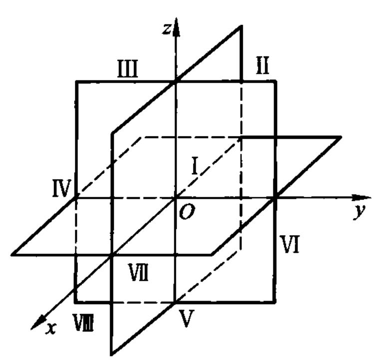

图 8－2

建立空间直角坐标系之后，可以用类似于平面直角坐标系中的方法，定义空间任意点 M 的坐标．过点 M 作三个平面（如图 8－3），分别垂直于 Ox 轴，Oy 轴，

Oz 轴，且与这三个轴分别交于 P,Q,R 三点，设这三点在各自所在的坐标轴上的坐标分别为 a,b,c，则点 M 唯一确定了一个三元有序数组(a,b,c). 反之，对任意一个三元有序数组(a,b,c)，在 Ox,Oy,Oz 轴上分别取坐标为 a,b,c 的三个点 P,Q,R，然后过三点分别作垂直于 Ox,Oy,Oz 轴的平面，这三个平面相交于一点 M，则由一个三元有序数组(a,b,c)唯一确定了空间的一个点 M. 由此，空间任意一个点 M 和一个三元有序数组(a,b,c)建立了一一对应关系. 我们将这个三元有序数组称为点 M 的**坐标**，记为 $M(a,b,c)$.

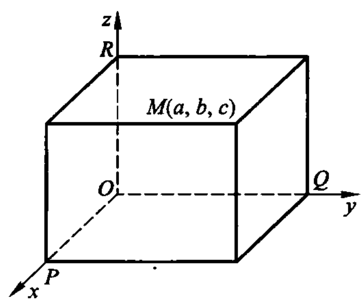

图 8-3

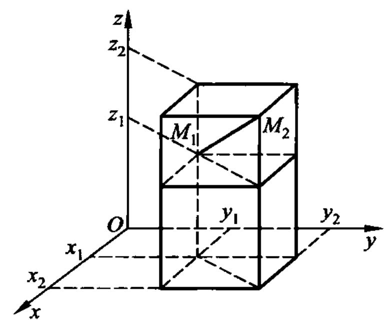

图 8-4

易知，原点 O 的坐标为$(0,0,0)$. Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴上的点的坐标分别为$(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$. xOy，yOz，zOx 平面上点的坐标分别为$(a,b,0)$，$(0,b,c)$，$(a,0,c)$.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$是空间中任意两点，过 M_1，M_2 各作三个垂直于坐标轴的平面，这六个平面构成一个以线段 M_1M_2 为一条对角线的长方体（如图 8-4）. 长方体的三条棱长分别为 $|x_2-x_1|$，$|y_2-y_1|$，$|z_2-z_1|$，由勾股定理得线段 M_1M_2 的长为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

这就是**空间两点间的距离公式**.

特别地，点 $M(x,y,z)$与原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

例 1 在 Oy 轴上求一点 P，使之与点 $A(2,-1,3)$和 $B(4,1,2)$的距离相等.

解 因为点 P 在 Oy 轴上，所以该点的坐标为 $P(0,y,0)$，按题意有

$$|PA|=|PB|,$$

即

$$\sqrt{2^2+(y+1)^2+3^2}=\sqrt{4^2+(y-1)^2+2^2},$$

解得 $y=\frac{7}{4}$. 因此所求点的为 $P\left(0,\frac{7}{4},0\right)$.

习 题 8.1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点位置的特殊性.

(1) (0,0,0). (2) (0,3,0). (3) (−1,0,2). (4) (1,1,0).

2. 写出点 $P(1,-2,3)$的下列对称点的坐标.

(1) 关于原点对称. (2) 关于 y 轴对称. (3) 关于 yOz 平面对称.

3. 分别求出点 $P(2,-1,4)$到坐标原点、y 轴及 xOz 平面的距离.

4. 求出以 $A(-1,2,1)$，$B(3,2,-2)$，$C(2,0,3)$为顶点的三角形各边长.

5. 在 xOy 面上求点 M，使它到点 $A(3,-4,3)$及点 $B(1,-5,4)$的距离都等于 9.

8.2 向量、向量的线性运算和向量的坐标表示

8.2.1 向量的概念

物理学中常见的量有两种：一种称为**数量**或**标量**，这种量只有大小而没有方向，例如质量、时间、温度、面积等. 另一种称为**向量**或**矢量**，这种量既有大小又有方向，例如力、力矩、位移、速度、加速度等. 向量不仅在物理学中有重要意义，在许多数学分支中也有重要应用.

向量常用有向线段表示. 可用有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为始点，B 为终点的有向线段所表示的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$. 习惯上，向量也可用一个粗体字母表示（多用于书本上的印刷体），例如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 等，又可用带箭头的字母表示（多用于书写时），例如$\vec{a}$，$\vec{b}$等（如图 8－5）.

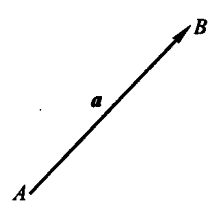

图 8－5

向量的大小称为**向量的模**. 向量$\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}$ 的模分别记为 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或$\vec{0}$. 零向量没有确定的方向，也可以认为它的方向是任意的.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 由向量相等的定义知，一个向量与它经过平移（方向不变，始点和终点位置改变）后所得到的另一个向量是相等的，这种向量称为**自由向量**. 以后如无特别说明，我们所讨论的向量都是自由向量. 由于自由向量只考虑其大小和方向，因此，我们可以把一个自由向量平移，而使它始点位置为任意点，这样，今后如有必要，就可以把几个向量移到同一个起点.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 用有向线段表示，将它们平移，使得始点重合，此两有向线段之间的夹角 θ（规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$）称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**. 易知，当 $\theta=0$ 时，向量 $\boldsymbol{a}$ 与

$\boldsymbol{b}$ 方向相同. 当 $\theta=\pi$ 时,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反时称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**,记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

8.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 8.1 设有两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,将 $\boldsymbol{b}$ 平移使它的始点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,则以 $\boldsymbol{a}$ 的始点为始点,以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$(如图 8-6),称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

由定义不难看出,如果将 $\boldsymbol{a}$ 平移,使它的始点与 $\boldsymbol{b}$ 的终点重合,则以 $\boldsymbol{b}$ 的始点为始点,以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量也为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

由定义 8.1 得到两向量之和的方法称为向量加法的**三角形法则**. 三角形法则可以推广到空间中任意有限个向量的和的情形(如图 8-7).

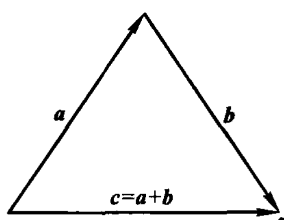

图 8-6

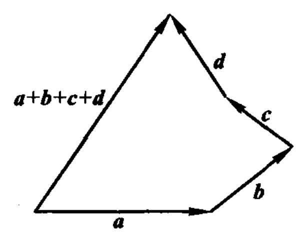

图 8-7

和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 还可以用如图 8-8 作平行四边形的方法得到,即当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平移,使它们始点移到同一点 O 处,然后以这两个向量为邻边作平行四边形,记 A 为与 O 成对角的另一顶点,则$\overrightarrow{OA}$即为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种求和的方法称为向量加法的**平行四边形法则**.

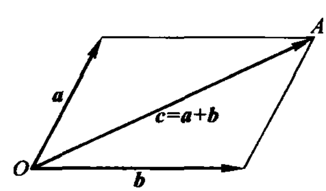

图 8-8

由向量加法定义不难证明向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. 向量的减法

定义 8.2 设有两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**,记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

另外,与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$. 以上所定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可记为 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

由差的定义可知,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可由以下方法得到:将 $\boldsymbol{a}$ 平移使它的始点与 $\boldsymbol{b}$ 的始

点重合，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为始点，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(如图 8-9).

特殊地，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

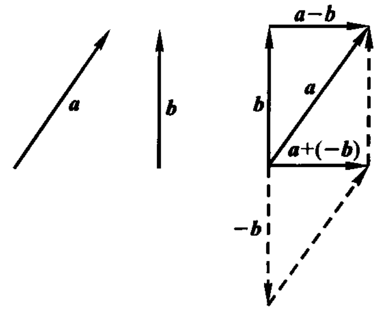

图 8-9

3. 向量与数的乘法

定义 8.3 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积定义为一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|$ 等于 $|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$. 它的方向规定为：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

特殊地，由定义可知，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, \quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

可以证明向量与数的乘积符合以下运算规律：

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，由于 $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$ 为大于零的实数，因此向量 $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，而模 $\left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=1$. 由此可知，$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 具有相同方向的单位向量，将它记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$，便有

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

或

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}.$$

由非零向量 $\boldsymbol{a}$ 求 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 的过程称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**单位化**.

向量的加减法和向量与数的乘法叫做向量的**线性运算**.

8.2.3 向量的坐标表示

为了更加方便地利用坐标讨论向量问题，下面介绍向量的坐标表示.

由于我们所讨论的是自由向量，关心的只是它的大小与方向，而与它的始点的位置无关，因此，在空间直角坐标系中引入向量的坐标表示时，不妨设向量都是以坐标原点为始点. 以坐标原点 O 为始点，空间点 $P(x,y,z)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P **的向径**. 由此，空间中的点 P 与向径 $\overrightarrow{OP}$ 建立了一一对应关系.

记 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为方向与 Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴的正向一致的单位向量，它们也称为**基本单位向量**. 如图 8-10，设点 P 坐标为 (x,y,z)，过 P 分别作垂直于 Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴的三个平面，与 Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴的交点为 M,N,Q，记 P_1 为

P 于坐标平面 xOy 上的投影，则有

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{ON}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OQ}=z\boldsymbol{k},$$

于是

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

称 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 为向量$\overrightarrow{OP}$的**坐标分解式**，其中(x,y,z)是 P 点的坐标，而 $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量$\overrightarrow{OP}$在 Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴上的**分向量**.

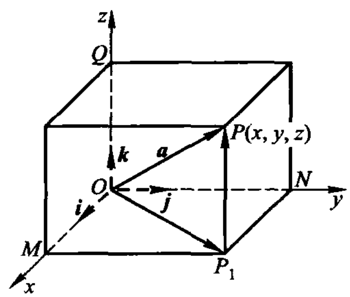

图 8－10

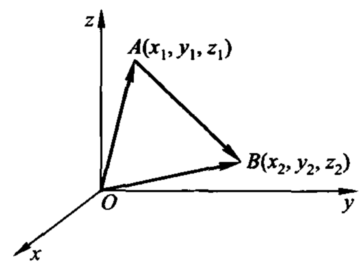

图 8－11

有时我们也将 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 记为 $\{x,y,z\}$，即

$$\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\},\tag{8.1}$$

并称 $\{x,y,z\}$ 为向量$\overrightarrow{OP}$的**坐标**，称(8.1)为向量$\overrightarrow{OP}$的**坐标表示**.

特别地，$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$，$\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$，$\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$.

设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$ 是空间中两点，则$\overrightarrow{OA}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\overrightarrow{OB}=\{x_2,y_2,z_2\}$，如图 8－11 所示，向量$\overrightarrow{AB}$的坐标表示为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{x_2,y_2,z_2\}-\{x_1,y_1,z_1\}\\&=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},\tag{8.2}$$

因此，对于任一向量，只要给定始点坐标与终点坐标，就可以由(8.2)式非常方便地得到这一向量的坐标表示式.

利用向量的坐标表示，很容易进行向量的线性运算. 设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则可利用推导(8.2)式类似的方法得到

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}\ (\lambda\ \text{为实数}).$$

设向量 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$，则它的模就是原点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的距离，即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

当 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量时，它的方向可以由它与 x 轴，y 轴，z 轴的正向夹角 α,β,γ 决定，称 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角(如图 8 - 12，$0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$)，而称它们的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 根据三角函数定义得到

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\beta=\dfrac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\gamma=\dfrac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\end{cases}$$

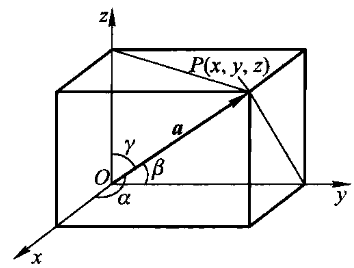

图 8 - 12

由上式可知，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

因此与 $\boldsymbol{a}$ 具有相同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\left\{\frac{x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}\right\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

例 1 设 $A(1,2,3)$，$B(-1,3,5)$，求 $\overrightarrow{AB}$，$|\overrightarrow{AB}|$，$\overrightarrow{AB}^\circ$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 的三个方向角.

解 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{-1,3,5\}-\{1,2,3\}=\{-2,1,2\}$，

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3,$$

$$\overrightarrow{AB}^\circ=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\left\{-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\},$$

三个方向角：$\alpha=\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)$，$\beta=\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$\gamma=\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

例 2 向量 $\boldsymbol{b}$ 和 y 轴，z 轴的正向夹角分别为 $\beta=60°$，$\gamma=150°$，且模 $|\boldsymbol{b}|=6$，求向量 $\boldsymbol{b}$ 的另一个方向角 α 和坐标分解式.

解 $\cos^2\alpha=1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$，

所以 $\alpha=90°$.

$$x=|\boldsymbol{b}|\cos\alpha=6\times0=0,\quad y=|\boldsymbol{b}|\cos\beta=6\times\frac{1}{2}=3,$$

$$z=|\boldsymbol{b}|\cos\gamma=6\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3\sqrt{3},$$

由此向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标分解式为

$$\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=3\boldsymbol{j}-3\sqrt{3}\boldsymbol{k}.$$

习 题 8.2

1. 设 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,-1,0\}$，求(1) $-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$. (2) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

2. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$,求 $|\boldsymbol{a}|$ 和与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量.

3. 设点 $P_1(1,-2,3)$,$P_2(-1,1,0)$,求向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标.

4. 一向量模为 5,且其方向与向量$\{2,-1,2\}$相同,求此向量的坐标分解式.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$,其起点坐标为$(-1,0,2)$,求 $\boldsymbol{a}$ 的终点坐标及其方向余弦.

6. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴,y 轴正向夹角分别为为$\alpha=30°$,$\beta=120°$,且模$|\boldsymbol{a}|=4$,求向量 $\boldsymbol{a}$ 的另一个方向角 γ 和坐标.

7. 设有一位于原点质量为 m 的质点和一位于点(x,y,z)质量为 M 的质点,求出质点 m 对质点 M 的引力 $\boldsymbol{F}$ 的表示式.

8. 设平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点为 $A(2,-3,1)$,$B(-2,4,3)$,$C(3,-1,-3)$,求 D 点坐标.

9. 已知点 $A(3,2,-1)$和点 $B(7,-2,3)$,取点 M 使$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$,求向量$\overrightarrow{OM}$.

10. 给定 $A(1,-2,3)$,$B(1,1,-1)$,$C(1,4,3)$,求$\triangle ABC$ 中$\angle A$ 平分线上的单位向量.

8.3 向量的数量积与向量积

向量除上节介绍的线性运算外,还有两种特殊意义的"乘积"——数量积和向量积. 向量的数量积和向量积叫做向量的**非线性运算**.

8.3.1 向量的数量积

如图 8-13 所示,设有质点在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下从A 移动到B,产生的位移为 $\boldsymbol{s}$,若 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为θ,则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

由物理学知道,力与位移都是向量,而由这两个向量作上述运算之后得到的功是一个数量. 这种运算在其他实际问题中还会常常遇见. 为此我们给出以下定义

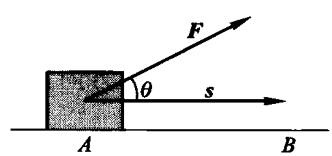

图 8-13

定义 8.4 设有向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,它们的夹角为 θ,乘积$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(又称**点积**、**内积**),记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{8.3}$$

"$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$"读作"$\boldsymbol{a}$ 点乘 $\boldsymbol{b}$".

由定义 8.4 可知,上述问题中的功 W 是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积,即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与一单位向量 $\boldsymbol{b}°$的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}°$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的**投影**,或称向量 $\boldsymbol{a}$ 在以向量 $\boldsymbol{b}$ 为方向轴上的投影. 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}°=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}°|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\overset{\mathrm{d}}{=\!=}(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}.$$

从而有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a})_{b}=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_{a},$$

即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积即为 $\boldsymbol{b}$ 的模与 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影的乘积，这就是数量积的几何意义.

由数量积的定义可以证明，数量积满足下列运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3) 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$（这里 λ 为数值).

由(8.3)还可得到：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 可简记为 $\boldsymbol{a}^2$.

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的余弦 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

(3) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

由此，三个基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 满足：

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1;\\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.\end{cases}$$

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=\{x_1,y_1,z_1\}\cdot\{x_2,y_2,z_2\}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_1z_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+y_1x_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+y_1z_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+z_1x_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+z_1y_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,\tag{8.4}$$

(8.4)称为两向量数量积的坐标表示式.

由(8.4)，对于非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}},$$

进而得到

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{3,1,4\}$，求(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. (2) $\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times3+(-1)\times1+3\times4=17$.

(2) 由于 $\boldsymbol{a}^2=2^2+(-1)^2+3^2=14$，$\boldsymbol{b}^2=3^2+1^2+4^2=26$，因此

$$\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}=26\{2,-1,3\}-14\{3,1,4\}=\{10,-40,22\}.$$

例 2 已知空间三点 $A(2,1,-2)$，$B(1,1,-1)$，$C(1,2,-2)$，求 $\angle ACB$.

解 $\overrightarrow{CA}=\{2-1,1-2,-2-(-2)\}=\{1,-1,0\}$，