Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学历届真题权威解析（数学三）

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

由多次参加命题及阅卷的专家亲自编写

精析20年真题试卷，内容全面，重点突出

赠送MP3盘

考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

2013 考研专家指导丛书

考研数学历届真题权威解析

（数学三）

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历届真题权威解析.数学三/王欢,王德军,童武主编.—北京:中国石化出版社,2012.2

ISBN 978-7-5114-1381-9

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… ②王… ③童… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 011613 号

中国石化出版社出版发行

地址:北京市东城区安定门外大街 58 号

邮编:100011 电话:(010)84271850

读者服务部电话:(010)84289974

http://www sinopec-press com

E-mail:press@ sinopec com

北京科信印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787×1092 毫米 16 开本 14.75 印张 373 千字

2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷

定价:30 00 元(赠送 MP3 盘)

前　　言

中国加入WTO之后,改革开放逐步深化,经济发展速度日益加快,社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进,我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大,这方面的教育也在稳步发展,规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化,考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说,全国硕士研究生入学统一考试应是"常模参照"考试,即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才,又有利于高等学校教学的原则,强调在考查知识的基础上,重点考查考生分析问题和解决问题的能力,并且要采用科学的办法,保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习,顺利通过数学考试、赢取高分,我们根据国家教育部制定的《考试大纲》,基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验,以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路,倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济

类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲,反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上,力求反映最新考试要求,紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,为考生全程领航和理性分析,引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔,编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作,积累了丰富的教学辅导经验,对历年考试情况比较了解,对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序,力求达到完美,但限于时间和水平,仍可能存在不足,纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　　录

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (1)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (5)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (11)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (14)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (21)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (24)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (32)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (35)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (43)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (46)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (54)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (58)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (65)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (68)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (78)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (81)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (91)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (95)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (106)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (109)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (119)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (122)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (130)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (133)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……………………………… (142)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………… (145)

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ………………………………（154）
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………（157）
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ………………………………（166）
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………（169）
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ………………………………（178）
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………（181）
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ………………………………（189）
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………（192）
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ………………………………（202）
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………（204）
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ………………………………（212）
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………（215）
1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ………………………………（223）
1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案与解析 …………（225）

2012 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

一、选择题(1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求)

(1) 曲线 $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2)\cdots(e^{nx} - n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0) = $(　　).

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　(B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$　　(D) $(-1)^n n!$

(3) 设函数 $f(t)$ 连续,则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{2} f(r^2) r dr = $(　　).

(A) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dy$

(B) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy$

(C) $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dy$

(D) $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy$

(4) 已知级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛,$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛,则 α 的取值范围为(　　).

(A) $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$

(C) $1 < \alpha \leqslant \dfrac{3}{2}$　　(D) $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$,其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$

(6)设A为3阶矩阵,P为3阶可逆矩阵,且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$,若$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$,则$Q^{-1}AQ=$(　　).

(A)$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$　(B)$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　(C)$\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　(D)$\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

(7)设随机变量X与Y相互独立,且都服从区间$(0,1)$上的均匀分布,则$P\{X^2+Y^2\leqslant1\}=$(　　).

(A)$\frac{1}{4}$　(B)$\frac{1}{2}$　(C)$\frac{\pi}{8}$　(D)$\frac{\pi}{4}$

(8)设X_1,X_2,X_3,X_4为来自总体$N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$的简单随机样本,则统计量$\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$服从的分布为(　　).

(A)$N(0,1)$　(B)$t(1)$　(C)$\chi^2(1)$　(D)$F(1,1)$

二、填空题(9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(9)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________.

(10)设函数$f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x},x\geqslant1\\2x-1,x<1\end{cases}$,$y=f(f(x))$,求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=e}=$________.

(11)设连续函数$z=f(x,y)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$,则$\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$________.

(12)由曲线$y=\frac{4}{x}$和直线$y=x$及$y=4x$在第一象限中所围图形的面积为________.

(13)设A为3阶矩阵,$|A|=3$,A^*为A的伴随矩阵,若交换A的第一行与第二行得到矩阵B,则$|BA^*|=$________.

(14)设A,B,C是随机事件,A,C互不相容,$P(AB)=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{1}{3}$,则$P(AB\mid\overline{C})=$________.

三、解答题(15 ~ 23 小题,共 94 分,解答应写出证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

计算$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D e^x xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$是以曲线$y=\sqrt{x}$,$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$及$y$轴为边界的无界区域.

(17)(本题满分 10 分)

某企业为生产甲、乙两种型号的产品,投入的固定成本为10 000(万元),设该企业生产

甲、乙两种产品的产量分别为x(件)和y(件),且固定两种产品的边际成本分别为$20+\frac{x}{2}$(万元/件)与$6+y$(万元/件).

(1)求生产甲乙两种产品的总成本函数$C(x,y)$(万元).

(2)当总产量为50件时,甲乙两种的产量各为多少时可使总成本最小?求最小成本.

(3)求总产量为50件时且总成本最小时甲产品的边际成本,并解释其经济意义.

(18)(本题满分10分)

证明:$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2},\quad -1<x<1.$

(19)(本题满分10分)

已知函数$f(x)$满足方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$及$f'(x)+f(x)=2e^x$,

(1)求$f(x)$的表达式;

(2)求曲线$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,dt$的拐点.

(20)(本题满分11分)

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

(Ⅰ)求$|\boldsymbol{A}|$;

(Ⅱ)已知线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解,求实数$a$的值,并求$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

(21)(本题满分11分)

已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$,二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$的秩为2.

(1)求实数a的值;

(2)求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$将$f$化为标准形.

(22)(本题满分11分)

设二维离散型随机变量X、Y的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(Ⅰ)求 $P\{X=2Y\}$;

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$ 与 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立,且均服从参数为 1 的指数分布,$V=\min(X,Y)$,$U=\max(X,Y)$

求(1)随机变量 V 的概率密度 $f_V(v)$;

(2)$E(U+V)$.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题
参考答案与解析

(1)【考点】 函数的渐进线

【解析】 根据渐近线的定义可知,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$,得直线 $y=1$ 为已知曲线的水平渐近线. 又根据$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$,得直线 $x=1$ 为垂直渐近线. 没有斜渐近线,因此选(C).

(2)【考点】 导数的定义

【解析】 根据题意,$x=0$ 时,$f(0)=0$,由函数在一点处导数的定义,有

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$. 其中用到 $x\to 0$ 时,$e^x-1\sim x$. 因此选(A).

(3)【考点】 二重积分的计算

【解析】 根据题意,由 $2\cos\theta\leqslant r\leqslant 2$,得 $2x\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$,又 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,则$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)r\,dr=\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\,dy$,故应选(B).

(4)【考点】 级数的绝对收敛与条件收敛

【解析】 根据题意,因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}$绝对收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$收敛,则$\alpha-\dfrac{1}{2}>1$,得 $\alpha>\dfrac{3}{2}$. 又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$条件收敛,则有 $0<2-\alpha\leqslant 1$,得 $1\leqslant\alpha<2$. 综合起来,就有 $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$. 故选(D).

(5)【考点】 向量组的线性相关性

【解析】 根据题意,由于$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,c_3+c_4)^{\mathrm{T}}$,而$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,0,c_1)^{\mathrm{T}}$,因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关. 应选(C).

(6)【考点】 求逆矩阵

【解析】 根据题意有,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,所以

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

所以选(B).

(7)【考点】 多维随机变量的概率密度

【解析】 根据题意有,X 与 Y 的概率密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases}1,0<x<1,\\0. & 其他.\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}1,0<y<1,\\0. & 其他.\end{cases}$ 由于 X 与 Y 是相互独立的,则 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1,0<x<1,0<y<1,\\0. & 其他.\end{cases}$

那么 $P\{X^2+Y^2\leqslant 1\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{4}$,其中 $D=\{x^2+y^2\leqslant 1\mid 0<x<1,0<y<1\}$.

因此选(D).

(8)【考点】 统计量的分布

【解析】 根据题意有,$X_i\sim N(1,\sigma^2)$,$(i=1,2,3,4)$,则 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$,$\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$. 因此有:$\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}=\dfrac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}\sim t(1)$.

(9)【考点】 求极限

【解析】 根据题意有,$(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\exp\left[\dfrac{1}{\cos x-\sin x}\ln(\tan x)\right]$,而 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}型}{\underset{洛必达法则}{=\!=\!=}}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x}{-\sin x-\cos x}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)\tan x\cos^2 x}=-\sqrt{2}$. 因此,原极限值 $=\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$

(10)【考点】 分段函数求导

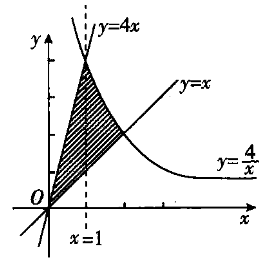
【解析】 根据题意有,$y=f(f(x))=\begin{cases}\ln\sqrt{f(x)}, & f(x)\geqslant 1\\2f(x)-1, & f(x)<1\end{cases}=\begin{cases}\ln\sqrt{\ln\sqrt{x}}, & x\geqslant \mathrm{e}^2\\2\ln\sqrt{x}-1, & 1\leqslant x<\mathrm{e}^2\\2(2x-1)-1, & x<1\end{cases}$

$=\begin{cases}\ln\sqrt{\ln\sqrt{x}}, & x\geqslant \mathrm{e}^2\\\ln x-1, & 1\leqslant x<\mathrm{e}^2\\4x-3, & x<1.\end{cases}$ 因此,$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=(\ln x-1)'\Big|_{x=\mathrm{e}}=\left.\dfrac{1}{x}\right|_{x=\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

(11)【考点】 全微分

【解析】 根据题意有,$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$,有 $f(x,y)-2x+y-2=o(\sqrt{x^2+(y-1)^2})$,则 $f(x,y)=2x-y+2+o(\sqrt{x^2+(y-1)^2})$,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=2$,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=-1$,因此 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

(12)【考点】 二重积分的计算



【解析】 如右图,阴影部分面积即为所求,由直线 $x=1$ 将阴影分为两部分,则所求面积

$$S=\int_0^1 dx\int_x^{4x}dy+\int_1^2 dx\int_x^{\frac{4}{x}}dy$$

$$=\frac{3}{2}+4\ln2-\frac{3}{2}$$

$$=4\ln2$$

(13)【考点】 矩阵的计算

【解析】 根据题意,设 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则由题知 $PA=B$,A 为 3 阶矩阵,又 $|A|=3$,所以 $|A^*|=|A|^2=9$. 因此 $|BA^*|=|B||A^*|=|PA||A^*|=|P||A||A^*|=-27$.

(14)【考点】 条件概率

【解析】 根据题意,由条件概率定义,有 $P(AB\mid\overline{C})=\dfrac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}$,由题设 A、C 互不相容,则 $AC=\varnothing$,$P(AC)=0$,$P(ABC)=0$,而 $P(AB)=P(ABC)+P(AB\overline{C})$,得 $P(AB\overline{C})=\dfrac{1}{2}$,而 $P(\overline{C})=1-P(C)=\dfrac{2}{3}$,因此 $P(AB\mid\overline{C})=\dfrac{3}{4}$.

(15)【考点】 求极限

【解析】 根据题意,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}e^{x^2}\cdot\dfrac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-(e^{2-2\cos x-x^2}-1)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-(2-2\cos x-x^2)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{6x^2}=\frac{1}{12}.$$

(16)【考点】 二重积分的计算

【解析】 根据题意,$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x\leqslant1,\sqrt{x}<y<\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right\}$.

则 $\iint\limits_D e^x xy\,dxdy=\int_0^1 e^x x\,dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}y\,dy=\dfrac{1}{2}\int_0^1 e^x(1-x^2)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 e^x dx-\dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2e^x dx$

$$=\frac{1}{2}e^x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\left(x^2e^x\Big|_0^1-2\int_0^1 xe^x dx\right)=-\frac{1}{2}+\int_0^1 xe^x dx$$

$$=-\frac{1}{2}+xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=-\frac{1}{2}+e-e^x\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}+e-e+1=\frac{1}{2}.$$

(17)【考点】 函数的最值

【解析】 (1) 根据题意,设生产甲产品成本为 $C(x)$(万元),生产乙产品成本为 $C(y)$(万元).

则总成本函数 $C(x,y) = C(x) + C(y) + C_0 = \int_0^x (20 + \frac{t}{2})\mathrm{d}t + \int_0^y (6 + t)\mathrm{d}t + 10\ 000$

$$= \frac{1}{4}x^2 + 20x + \frac{1}{2}y^2 + 6y + 10\ 000$$

(2) $x + y = 50$,求 $C(x,y)$ 的最小值.

设 $F(x,y,\lambda) = \frac{1}{4}x^2 + 20x + \frac{1}{2}y^2 + 6y + 10\ 000 + \lambda(x + y - 50)$

令 $\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 20 + \lambda = 0 \\ y + 6 + \lambda = 0 \\ x + y - 50 = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 24 \\ y = 26 \\ \lambda = -32. \end{cases}$

因此(24,26)为极值点,而由于实际问题一定存在最值,所以(24,26)即为所求的最小值点,即甲产品产量为 24 件,乙产品产量为 26 件时,可使总成本最小,最小成本为 $C(24,26) = 11\ 118$(万元).

(3) 由(2),总产量为 50 件且总成本最小时,甲产品为 24 件,则此时甲产品的边际成本为 $20 + \frac{24}{2} = 32$(万元/件)

经济意义:当生产甲产品 24 件时,每多生产一件甲产品,成本增加 32 万元.

(18)【考点】 一元函数微分学的应用

【证明】根据题意,设 $f(x) = x\ln\frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$,对其求一阶导数,

$$f'(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x = \ln\frac{1+x}{1-x} + x\frac{1+x^2}{1-x^2} - \sin x$$

$0 < x < 1$ 时,有 $\ln\frac{1+x}{1-x} \geqslant 0, \frac{1+x^2}{1-x^2} > 1$,因此有 $x\frac{1+x^2}{1-x^2} - \sin x \geqslant 0$,得 $f'(x) \geqslant 0$,所以

$$f(x) = x\ln\frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geqslant f(0) = 0,$$

即 $x\ln\frac{1+x}{1-x} + \cos x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}, \quad 0 < x < 1.$

而 $-1 < x < 0$ 时,有 $\ln\frac{1+x}{1-x} \leqslant 0, \frac{1+x^2}{1-x^2} > 1$,因此有 $x\frac{1+x^2}{1-x^2} - \sin x \leqslant 0$,得 $f'(x) \geqslant 0$.

同样有 $f(x) = x\ln\frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geqslant f(0) = 0.$

综上,可证得结论.

(19)【考点】 微分方程、曲线的拐点

【解析】 (Ⅰ)根据题意,齐次方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$,得特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$,则有通解 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$,代入方程 $f'(x) + f(x) = 2e^x$ 得

$2C_1e^x - C_2e^{-2x} = 2e^x$，则 $C_1 = 1, C_2 = 0$. 因此 $f(x) = e^x$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x) = e^x$，则曲线 $y = f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t = e^{x^2}\int_0^x e - t^2\mathrm{d}t$，分别求它的一阶、二阶导数.

得 $y' = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t + 1, y'' = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t + 2x$

令 $y'' = 0$，得 $x = 0$. 又当 $x > 0, y'' > 0$；$x < 0$ 时，$y'' < 0$.

$x = 0$ 时，$y(0) = 0$，因此 $(0,0)$ 为曲线拐点.

(20)【**考点**】 线性方程组的通解

【**解析**】 (1) 根据题意，$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$

(2) 根据题意，设矩阵 A 的增矩阵为 $\overline{A}$，则

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a-a^2 \end{array}\right) \to$$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a-a^2 \end{array}\right)$ 要使方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解，必须有 $1 - a^4 = 0$ 且 $-a - a^2 = 0$，得 $a = -1$，代入 $\overline{A}$

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

得 $Ax = \beta$ 的一个特解为 $(1,0,1,1)^T$，$Ax = 0$ 的通解为 $k(1,1,1,1)^T$，因此 $Ax = \beta$ 的通解为 $k(1,1,1,1)^T + (1,0,1,1)^T$，$k$ 为任意常数.

(21)【**考点**】 二次型特征值、特征向量

【**解析**】 (1) 根据题意，二次型的秩为 2，意即矩阵 A^TA 的秩也为 2，$|A^TA| = 0$

$$|A^TA| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & a^2+3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & a^2+3 \end{vmatrix} + (1-a)\begin{vmatrix} 0 & 1-a \\ 1+a^2 & 1-a \end{vmatrix} =$$

$(a^2 + 3)(a + 1)^2 = 0$

得 $a = -1$

(2) 根据题意，将 $a = -1$ 代入 A^TA 中，得 $A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

令$|\lambda E-A^TA|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$得$A^TA$的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$

分别将特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$代入$(\lambda_iE-A^TA)x=\mathbf{0}$,求得对应各自特征值的特征向量为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\quad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\quad \xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

再分别将ξ_1,ξ_2,ξ_3单代化得$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

则令$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$,则$f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x=(Qy)^T(A^TA)(Qy)=y^TQ^TA^TAQy$

$=2y_2^2+6y_3^2$　即为f的标准形

(22)【考点】　多维随机变量的分布、相关系数

【解析】　(Ⅰ)根据题意,$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y)=(EXY-EXEY)-[EY^2-(EY)^2]$

由题意可得X、Y及XY的分布

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

再分别求得$EXY=\frac{2}{3},EXEY=\frac{2}{3},EY^2=\frac{5}{3},EY=1$,

因此$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=-\frac{2}{3},\mathrm{Cov}(X,Y)=0,\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=0$

(23)【考点】　随机变量的数字特征

【解析】　(1)根据题意,X,Y均服从参数为1的指数分布,则有

$f(x)=\begin{cases}e^{-x},x>0\\0,\text{其他}\end{cases}\quad f(y)=\begin{cases}e^{-y},y>0\\0,\text{其他}\end{cases}$

$F_V(v)=P\{V\leqslant v\}=P\{\min(X,Y)\leqslant v\}=1-P\{\min(X,Y)>v\}$

$=1-P\{X>v,Y>v\}=1-P\{x>v\}P\{Y>v\}$

当$v\leqslant0$时,$F_V(v)=0$;

$v>0$时,$F_V(v)=1-\int_v^{+\infty}e^{-x}dx\int_v^{+\infty}e^{-y}dy=1-e^{-2v}$

因此$F_V(v)=\begin{cases}1-e^{-2v},v>0,\\0,\quad\text{其他},\end{cases}\quad f_V(v)=F'_V(v)=\begin{cases}2e^{-2v},v>0\\0,\quad\text{其他}.\end{cases}$

(2)$E(U+V)=E[\max(X,Y)+\min(X,Y)]$

$=E(X+Y)=EX+EY=1+1=2$