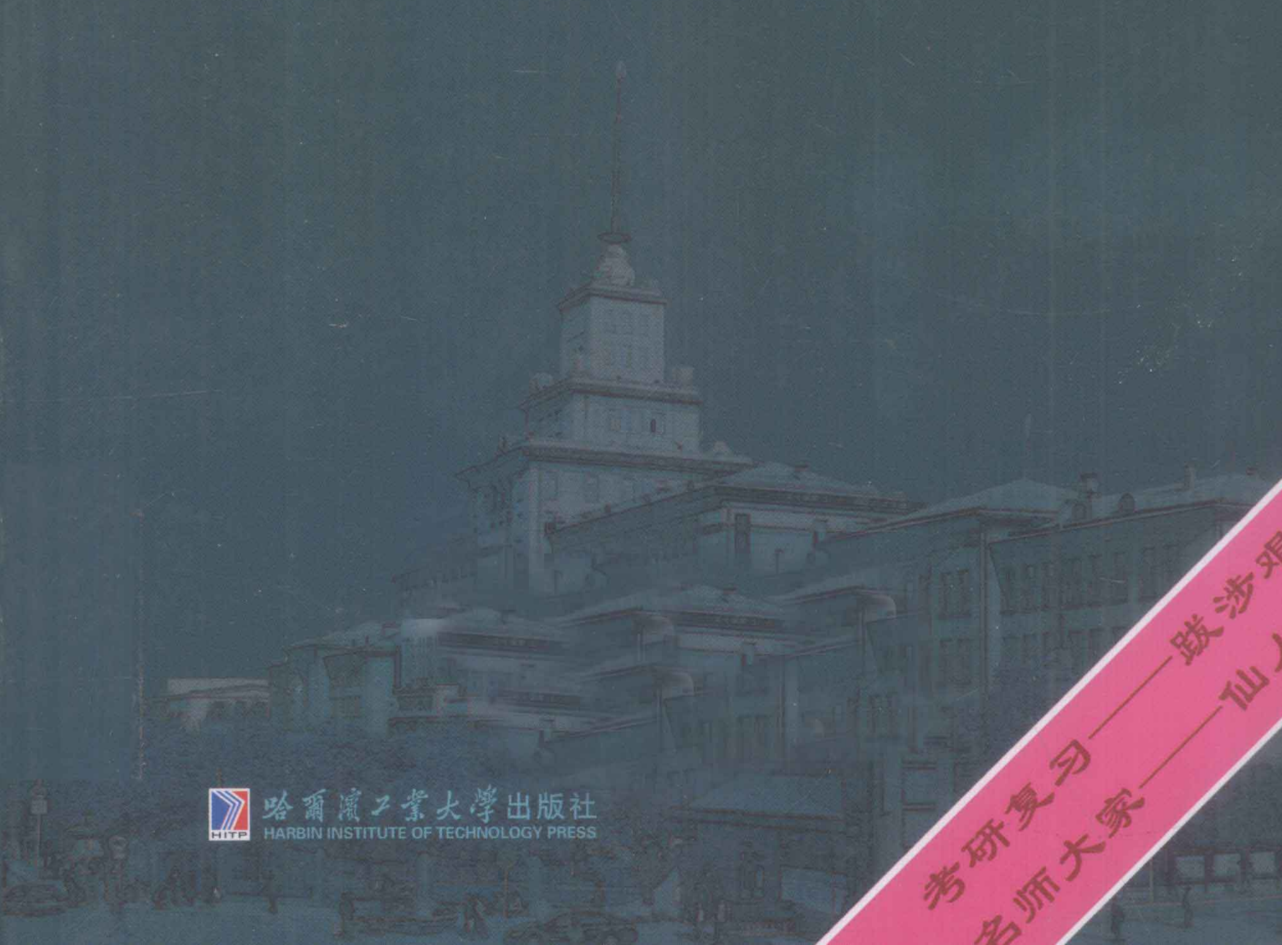
线性代数卷

吴振奎高等数学解题真经

◎ 吴振奎 编著



考研复习——跋涉艰难

名师大家——仙人

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

吴振奎高等数学解题真经

◎ 吴振奎 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

高等数学是大学理工科及经济管理类专业的重要基础课，是培养学生形象思维、抽象思维、创造性思维的重要园地.

本书具有以下特点：广泛使用表格法，使有关内容、解题方法和技巧一目了然；从浩瀚的题海中归纳、总结出的题型解法，对同学们解题具有很大的指导作用；用系列专题分析对教材的重点、难点进行了诠释，对同学们掌握这方面知识起到事半功倍的效果.

本书是针对考研，参加数学竞赛的同学撰写的，对在读的本科生、专科生及数学教师同仁也具有很高的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

吴振奎高等数学解题真经. 线性代数卷/吴振奎编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-5603-3447-9

Ⅰ.①吴… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①高等数学—高等学校—题解②线性代数—高等学校—题解Ⅳ.① O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 258562 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　刘　瑶
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 26.5　字数 784 千字
版　　次　2012 年 1 月第 1 版　2012 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3447-9
定　　价　58.00 元

⊙前言

怎样解(数学)题？这是一个十分沉重，而又不得不去面对的话题，尤其是对青年学子.

我们熟知：干活不能光凭手巧，还要借助家什；做数学题也不能只凭靠聪明，还要注意(掌握运用)方法.数学中的“方法”正如干活的“家什”、过河的“船”和“桥”.

面对浩瀚的题海，不少人(特别是初学者)会觉得茫无所措、叫苦不迭.要学好数学，除了掌握基础知识外，更重要的是做题，可关键是怎样去做.是就题论题、按部就班、多多益善？还是择其典型、分析实质、积累经验、掌握方法？当然应取后者.因为只有掌握了方法，才能做到融会贯通、举一反三；只有掌握了方法，才能学以致用、应付万变.

多年的学习与教学实践使我体会到：“方法”对于数学学习的重要，它像天文学中的望远镜，物理学中的实验、观察设备，化学中的试剂、仪器等.应该看到：如果不掌握方法，即使你熟悉解答个别类型问题的手段，纵然你所遇到的是似曾相识的题型，可一旦题目稍稍改动，你也将会一筹莫展——因为你没能了解问题的实质，没有掌握独立解决新问题的本领.

在学习数学的过程中你会发现：看十道题，不如做一道题；而做十道题，不如分析透一道题.只要细心、认真，你在求解任何问题过程中，都会有点滴体会，细微发现.把这些点点滴滴的东西积累起来，去分析、去筛选、去归纳、去总结，你也就得到了方法.

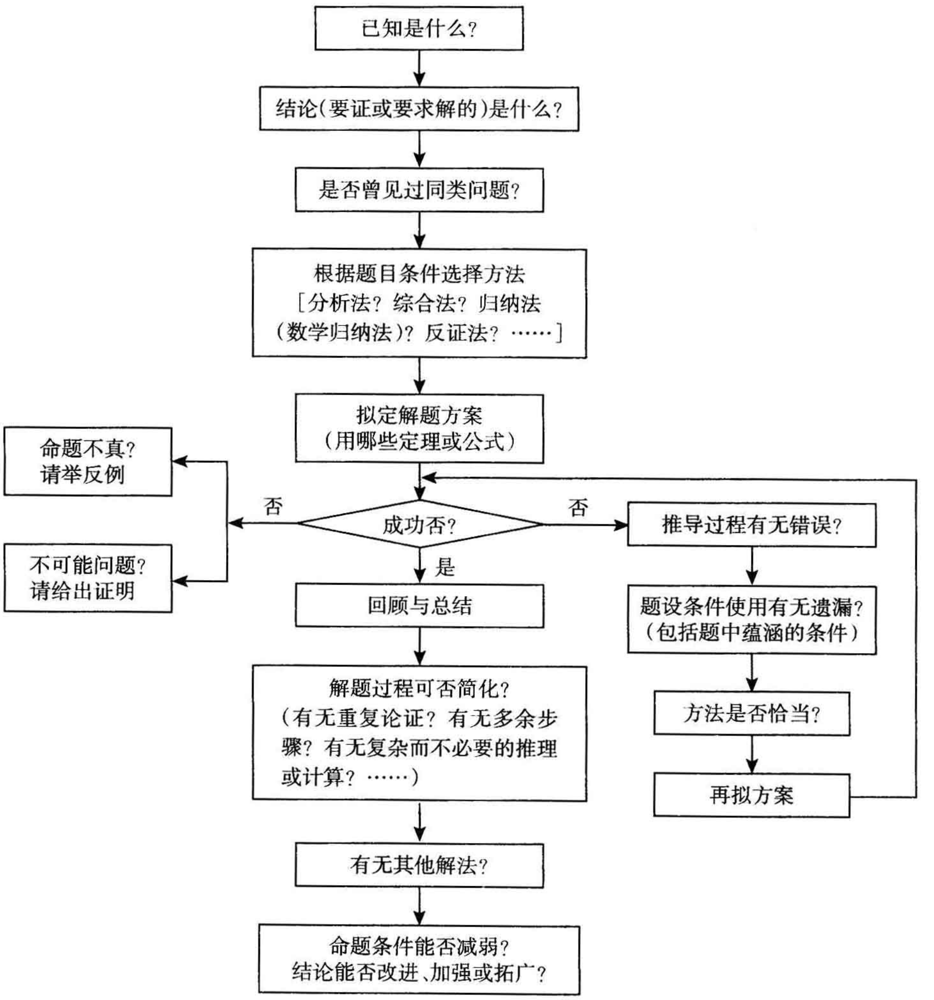
俗话说“熟能生巧”.在熟练掌握了方法的同时，你也就有了技巧.正是：方法源于实践，技巧来自经验.把经验的涓涓细流汇聚起来，便能涌出技巧的小溪——这恰是智慧江河的源头.

笔者几十年来的经历：学数学、练解题、读文章、做数学、教数学……无论成功与失败、经验与教训、顺利与挫折……它们都成了宝贵的财富.

本书奉献给读者的正是这些.

当然，解数学问题绝对没有什么普遍的、万能的模式，但它仍然存在着某些规律、方法和技巧，掌握了它们，至少可以在大的方向上有所选择，这势必会大大加快解题速度，这对学好数学无疑是重要的. 但愿这些能给读者带来益处，这正是笔者撰写本书的目的与愿望.

话再讲回来，方法虽然千变万化、五彩缤纷，但解题步骤却大多雷同. 下面给出一个解题步骤的框图——其实你在解题过程中正在或已经自觉不自觉地履行它，不是吗？

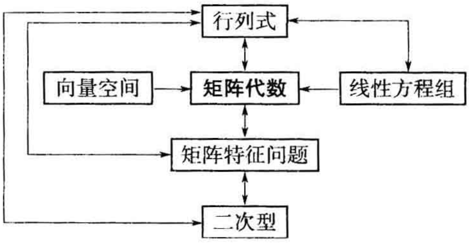


诚挚的批评与指教正是笔者所期待的.

吴振奎

2011 年 5 月于天津

本书各章内容间的关系图



本 书 常 用 记 号

$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$表示向量

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$表示矩阵

$\mathbf{Z}$ 表示整数集

$\mathbf{R}$ 表示实数集

$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维实向量集

$\mathbf{R}^{m\times n}$表示 $m\times n$ 阶实矩阵集

$\mathbf{0}$ 表示零向量

$\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵

$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}_n)$表示($n$ 阶)单位阵

$\det\boldsymbol{A}$ 或$|\boldsymbol{A}|$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$\mathrm{Tr}\boldsymbol{A}$ 或 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的迹

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置

$\boldsymbol{A}^{-1}$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩

$\boldsymbol{A}^*$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$\Longleftrightarrow$表示充要条件

$\mathrm{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$表示以 a_i 为元素的对角阵

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBQ}$(其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆)表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价于矩阵 $\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}$(其中 $\boldsymbol{P}$ 可逆)表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于矩阵 $\boldsymbol{B}$

目 录

第 1 章 行列式

第 2 章 矩阵代数

第3章　向量空间

第4章　线性方程组

第5章　矩阵的特征问题

第 6 章　二次型

专题 1　线性代数中的填空题解法

专题 2　线性代数中的选择题解法

第 1 章 行列式

行列式的出现已有 300 余年历史了.

1674,年日本数学家关孝和在其所著《发微算法》中首先引入此概念.

1693 年,莱布尼兹(G. W. Leibniz)著作中也有行列式叙述,但人们仍多认为此概念在西方源于数学家柯西(A. L. Cauchy).

1750 年,克莱姆(G. Cramer)出版《线性代数分析导言》一书中已给出行列式的今日形式.

1841 年,雅可比(C. G Jacobi)在《论行列式形成与性质》一书中对行列式及其性质、计算作了较系统的阐述.

此后,范德蒙(A. T. Vandermonde)、裴蜀(E. Bezout)、拉普拉斯(P. S. M. de Laplace)等人在行列式研究中也做了许多工作.

但行列式在当今线性代数中似已被淡化,其原因是:首先它的大多数功能已被矩阵运算取代,而矩阵(代数)理论与计算已相当成熟;再者是电子计算机的出现与飞速发展,已省去人们许多机械而繁琐的计算.

然而行列式也有其自身的魅力:技巧性强、形式漂亮,因而它在历年考研中屡有出现.

行列式的主要应用是:①求矩阵(或向量组)的秩;②解线性方程组;③求矩阵特征多项式等.

行列式与矩阵有着密不可分的连带关系,尽管它们在本质上不是一回事(矩阵是数表,而行列式是数).

内容提要

一、矩阵

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的(m 行 n 列的)矩形表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做 m 行 n 列的矩阵. 简记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. 其中 a_{ij} 叫做 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、第 j 列元素.

当 $m=n$ 时，称 $\mathbf{A}$ 为方阵，简称 n 阶矩阵. 且记 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 为含实元素 $m\times n$ 阵的全体(集合). 特别地，$1\times n$ 的矩阵称为行向量，$n\times 1$ 的矩阵称为列向量. 向量空间常记 $\mathbf{R}^{1\times n}$ 或 $\mathbf{R}^{n\times 1}$.

二、行列式

1. 行列式的定义

行列式的定义很多，其中较为直接的(构造性的)定义是

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(i_1 i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

其中$(i_1 i_2\cdots i_n)$是数字 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列；$\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$为排列$(i_1 i_2\cdots i_n)$的**逆序数**.

矩阵(方阵)$\mathbf{A}$ 的行列式常记为 $\det \mathbf{A}$ 或简记成$|\mathbf{A}|$.

注 我们想再强调一点：矩阵与行列式本质区别在于：行列式是数；矩阵只是一个数表.

对于方阵 $\mathbf{A}$ 而言，若 $\mathbf{A}_{ij}$ 为 $\mathbf{A}$ 中划去第 i 行、第 j 列剩下的 $n-1$ 阶矩阵，则$(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$称为 a_{ij} 的**代数余子式**，它常简记成 A_{ij}. 又 $\mathbf{A}^*=(A_{ji})_{n\times n}=(A_{ij})^{\mathrm{T}}_{n\times n}$ 为 $\mathbf{A}$ 的**伴随矩阵**.

2. 行列式性质

①行、列互换(行变列、列变行)，其值不变，即$|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$，这里 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\mathbf{A}$ 转置；

②交换列行式两行(或列)位置，行列式值变号；

③某数乘行列式一行(或列)，等于该数乘行列式值；

④将某行(或列)倍数加到另外一行(或列)，行列式值不变；

⑤若两行(或列)对应元素成比例，则行列式值为零；

⑥(拉普拉斯展开)行列式可按某一行(或列)展开，且

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}\ |\mathbf{A}|$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$$

这里 δ_{ij} 称为 Kronecker 符号. 特别地

$$|\mathbf{A}|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

注 拉普拉斯展开实际上是指行列式可以按照某几行(或列)展开，这里只是该展开的特例情形.

⑦若 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均为 n 阶方阵，则$|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.

⑧$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$，$\mathbf{A}$ 为 n 阶方程，且 $\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵.

⑨$|\mathbf{A}^{-1}|=|\mathbf{A}|^{-1}$，$\mathbf{A}$ 为 n 阶非奇异阵.

⑩$|a\mathbf{A}|=a^n|\mathbf{A}|$，$a\in\mathbf{R}$，且 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵.

3. 行列式常用计算方法

①用行列式定义(多用于低阶行列式)；

②利用行列式性质，将行列式化成特殊形状(上三角形或下三角形)；

③用拉普拉斯(Laplace)展开；

④利用不同阶数行列式间的递推关系(常结合数学归纳法)；

⑤利用著名行列式(如范德蒙(Vandermonde)行列式)的展开式；

⑥利用矩阵性质等.

4. 几个特殊的行列式*

(1) Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

它的推广情形为：

若

$$f_k(x) = a_{k0}x^k + a_{k1}x^{k-1} + \cdots + a_{k,k-1}x + a_{kk} \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

则

$$\begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_0(x_2) & \cdots & f_0(x_n) \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = D \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)$$

其中，D 为 $f_k(x)(k=0,1,\cdots,n-1)$ 的系数组成的行列式.

(2) Gram 行列式

设向量 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in \mathbf{R}^{n\times 1}$，又 $a_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j$ 的内积，则

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(3) 循环(矩阵)行列式

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} (x_0 + x_1\zeta^k + x_2\zeta^{2k} + \cdots + x_{n-1}\zeta^{(n-1)k})$$

这里 ζ 是 1 的 n 次原根 $\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}} = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$ $\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}\right.$ 又可记为 $\left.\exp\left\{\dfrac{2\pi}{n}\mathrm{i}\right\}\right)$.

(4) 交错矩阵行列式

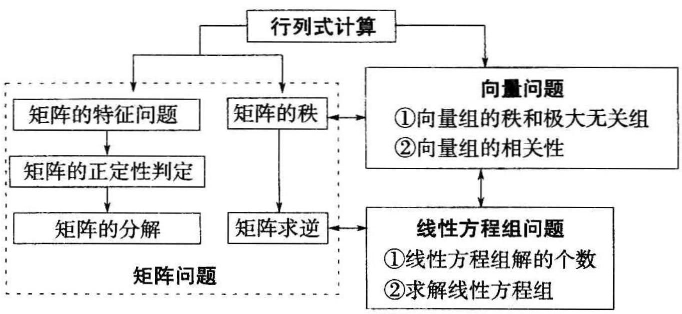
$$\begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{14} & 0 & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & -x_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & (n \text{ 是奇数}) \\ P_n(\cdots, x_{ij}, \cdots)^2 & (n \text{ 是偶数}) \end{cases}$$

这里 $P_n(\cdots, x_{ij}, \cdots)$ 是变量 x_{ij} 的多项式，称为 Pfaff 多项式.

例 题 分 析

一、简单的行列式计算

计算行列式的本身，也许只是一种运算或技巧，它多依据如何巧妙运用行列式性质. 然而就其作为问题本身来讲，似乎意义不大，关键还是在于它的应用. 下图为行列式的应用关系图，图中"→"表示转化为或相关于等含义：



尽管如此，我们还是想介绍一些较为经典的行列式计算问题. 它的常用计算方法前文已述，下面来看例题.

一些简单的行列式的计算问题，主要依据行列式的某些性质，结合矩阵初等变换，利用数学归纳法将其降阶. 例文之后，我们会提出一些相关问题，目的是通过这些例子、问题，突现"举一反三"之效.

例 1 求行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值.

解 这是一个 4 阶行列式，其第一行(或列)仅有两个非 0 元，故可按 Laplace 展开、降阶. 按行列式第一行展开，有

$$原式=(-1)^{1+1}a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}+(-1)^{1+4}b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$$

注 例 1 的推广情形如(计算方法仿例，改为证明问题的目的是将结果告知)：

问题 1 证明行列式 $\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}_{2n\times 2n}=(a^2-b^2)^n$.

解 按 D_{2n} 第一行展开后，再各自按最后一行展开有

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{2n+1}b\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(a^2-b^2)D_{2(n-1)}$$

从而$D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2(n-1)}$，递推后可有

$$D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2(n-1)}=(a^2-b^2)^2D_{2(n-2)}=\cdots=(a^2-b^2)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=(a^2-b^2)^n$$

它的推广情形，即两对角线上的元素分别换为$a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$和$b_1,b_2,\cdots,b_{2n}$，此时行列式的值为

$$D_{2n}=\prod_{k=1}^{n}(a_k a_{2n+1-k}-b_k b_{2n+1-k})$$

即下面问题.

问题 2 证明行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_k & b_k & & \\ & & b_{k+1} & a_{k+1} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b_{2k} & & & & & a_{2k} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{k}(a_i a_{2k+1-i}-b_i b_{2k+1-i}).$$

对于它们的计算又可由先建立递推关系，再归纳地计算原行列式值，具体方法可见后例.

例 2 证明行列式等式

$$a_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

证 按行列式性质逆推可有(从式右推向式左)

$$\text{式右}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}(a_1c_3-a_3c_1)-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}(a_1c_2-a_2c_1)=$$

$$a_1\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}c_3-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}c_1\right)-$$

$$c_1\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}a_3-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}a_2+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}a_1\right)=$$

$$a_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}-c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}=$$

(上一步中加减同一项)

(后一行列式有两列相同)

$$a_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

此方法并不常用，但它还是遵循“化繁为简”的解题原则操作的.

例 3 试计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab+c) & 2(ca-b) \\ 2(ab-c) & 1+b^2-c^2-a^2 & 2(bc+a) \\ 2(ac+b) & 2(bc-a) & 1+c^2-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

解 将 D 第 1 行加上第 3 行乘以 b,减去第 2 行乘以 c,得

$$D=\begin{vmatrix}1+a^2+b^2+c^2 & c(1+a^2+b^2+c^2) & -b(1+a^2+b^2+c^2)\\ 2ab-2c & 1+b^2-c^2-a^2 & 2bc+2a\\ 2ac+2b & 2bc-2a & 1+c^2-a^2-b^2\end{vmatrix}=$$

$$(1+a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix}1 & c & -b\\ 2ab-2c & 1+b^2-c^2-a^2 & 2bc+2a\\ 2ac+2b & 2bc-2a & 1+c^2-a^2-b^2\end{vmatrix}=(1+a^2+b^2+c^2)\cdot$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2ab-2c & 1+b^2+c^2-a^2-2abc & 2ab^2+2a\\ 2ac+2b & -2a-2ac^2 & 1+c^2-a^2+b^2+2abc\end{vmatrix}=$$

$$(1+a^2+b^2+c^2)[(1+b^2+c^2-a^2)^2+4(a+ac^2)(ab^2+a)]=$$

$$(1+a^2+b^2+c^2)[(1+b^2+c^2-a^2)^2-4a^2b^2c^2+4a^2(b^2+1)(c^2+1)]=$$

$$(1+a^2+b^2+c^2)^3$$

例 4 若 a,b,c,d,e,f 皆为实数,试证行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & a & b & c\\ -a & 0 & d & e\\ -b & -d & 0 & f\\ -c & -e & -f & 0\end{vmatrix}$$

是非负的.

证 不妨设 $f\neq0$,考虑 f 除以 D 的第 3 行、第 3 列,得

$$\frac{D}{f^2}=\begin{vmatrix}0 & a & b/f & c\\ -a & 0 & d/f & e\\ -b/f & -d/f & 0 & 1\\ -c & -e & -1 & 0\end{vmatrix}=\text{(第 1 行减 }c\text{ 乘第 3 行;第 2 行减 }e\text{ 乘第 3 行)}$$

$$\begin{vmatrix}bc/f & a+dc/f & b/f & 0\\ -a+be/f & de/f & d/f & 0\\ -b/f & -d/f & 0 & 1\\ -c & -e & -1 & 0\end{vmatrix}=\text{(对列实施上述变换)}$$

$$\begin{vmatrix}0 & a+dc/f+be/f & b/f & 0\\ -a+be/f-dc/f & 0 & -d/f & 0\\ -b/f & -d/f & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}0 & a+cd/f-be/f\\ -a+be/f-cd/f & 0\end{vmatrix}=\text{(分块计算)}$$

$$\left(a+\frac{cd}{f}-\frac{be}{f}\right)^2$$

即

$$D=(af+cd-be)^2\geqslant0$$

若 $f=0$,由分块矩阵行列式知

$$D=(be-cd)^2\geqslant0$$

例5 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

解 此例虽也为4阶式,然诸行(列)中0元皆无,按行列展开不妥.稍细观察可发现:每行诸元素和为定值,可用行列变换化简.将2,3,4列加至第1列,有

$$原式=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\text{(将第1列加至第2,4列,第1列乘“-”号加至第3列)}=$$

$$x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\text{(按第4行展开)}=(-1)^{4+1}x\begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix}=x^4$$

例6 若5阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}=a$,计算下列行列式(其中$b\neq 0$)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & (1/b)a_{12} & (1/b^2)a_{13} & (1/b^3)a_{14} & (1/b^4)a_{15} \\ ba_{21} & a_{22} & (1/b)a_{23} & (1/b^2)a_{24} & (1/b^3)a_{25} \\ b^2a_{31} & ba_{32} & a_{33} & (1/b)a_{34} & (1/b^2)a_{35} \\ b^3a_{41} & b^2a_{42} & ba_{43} & a_{44} & (1/b)a_{45} \\ b^4a_{51} & b^3a_{52} & b^2a_{53} & ba_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

解 将D的第一行提出$1/b^4$,第2行提出$1/b^3$,第3行提出$1/b^2$,第4行提出$1/b$,得

$$D=1/b^{10}\begin{vmatrix} b^4a_{11} & b^3a_{12} & b^2a_{13} & ba_{14} & a_{15} \\ b^4a_{21} & b^3a_{22} & b^2a_{23} & ba_{24} & a_{25} \\ b^4a_{31} & b^3a_{32} & b^2a_{33} & ba_{34} & a_{35} \\ b^4a_{41} & b^3a_{42} & b^2a_{43} & ba_{44} & a_{45} \\ b^4a_{51} & b^3a_{52} & b^2a_{53} & ba_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

从上行列式第1,2,3,4列分别提出b^4,b^3,b^2,b有

$$D=b^{10}/b^{10}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}=a$$

我们再来看一个例子.例7中行列式相应的矩阵称为三对角阵.

例7 计算5阶行列式$\begin{vmatrix} 1-a & a & & & \\ -1 & 1-a & a & & \\ & -1 & 1-a & a & \\ & & -1 & 1-a & a \\ & & & -1 & 1-a \end{vmatrix}$①.

解1 该行列式第1行(列)中有较多的0,故可先按行列展开后再作考虑.令原式为D_5,按第1行

① 行列式空白处为0,下同.