高等数学习题课讲义

●刘一勋　胡启旭　温天舜　主编

●河南大学出版社

GAODENGSHUXUEXITIKEJIANGYI

高等数学习题课讲义

主编　刘一勋　胡启旭　温天舜

河南大学出版社

（豫）新登字 09 号

高等数学习题课讲义

主　　编　刘一勋　胡启旭　温天舜
责任编辑　李若冰

河南大学出版社出版发行
（开封市明伦街 85 号）
郑州粮食学院印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米 1/32　印张:10.875　字数:273 千字
1993 年 8 月第 1 版　　1993 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—5000　　定价:6.65 元

ISBN7-81018-971-9/O·64

潘晓年

二.25.26 付

26.27 报到 注册

前　言

高等数学课程的习题课是教学诸环节中重要的一环。它不仅可以帮助复习、巩固理论课讲授的概念、定理、公式，而且通过总结、举例、练习，使学生加深对概念、定理的理解、推广和应用，总结一般的解题方法，提高解题的技巧和综合分析的能力。可以说，习题课是理论课必不可少的补充和延伸。要提高教学质量，就必须上好习题课。为此，我们在总结多年教学经验的基础上编写了这本《高等数学习题课讲义》，希望能对习题课教学有所裨益。

本书根据国家教委高等数学教学基本要求，安排了 23 讲习题课的教学内容。在编写中，我们以常见习题的类型为主线，尽力归纳出各章节常见的习题类型以及这些类型的习题可以用什么方法、技巧求解。通过解题归纳与举例，提高学生的解题能力。同时，我们在每章安排了单元测验题，供教师参考，也可供学生自测掌握知识的情况。为了使任课教师在上习题课时有一定的选择余地，每讲例题的数量一般比 2 学时一讲的容量偏多一些。此外，为了兼顾不同水平的学生的需要，还适当安排了少量难度较大的题目，这部分题目书中均加以 * 号标示。

本书由刘一勋、胡启旭、温天舜任主编。参加本书编写的还有（按姓氏笔画排序）：王有安、王艮远、史本广、伍毅、龙洪波、邱学绍、范正森、郑崇信、苏双喜、曾自强。

本书的编写得到了国内贸易部高校数学教学学会以及郑州粮食学院、武汉粮食工业学院、南京粮食经济学院、杭州商学院等院校的支持，在此我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，难免有疏漏、错误之处，恳请专家、同行和读者指正。

编者

1992年3月

目　录

第一章　函数与极限

第1讲　函数与极限的运算

一　内容提要

1　函数概念

(1) 函数的定义；

(2) 函数的特性(单值性、奇偶性、有界性、单调性、周期性)；

(3) 反函数与直接函数；

(4) 复合函数；

(5) 基本初等函数与初等函数；

(6) 分段函数.

2　极限概念　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

(1) 数列极限的概念；

(2) 函数极限的概念；

(3) 无穷小与无穷大的概念.

3　极限存在准则

(1) 单调有界函数(或数列)必有极限；

(2) 夹逼准则.

4　极限的运算法则

(1) 无穷小运算法则

i) $f(x) = A + \alpha(x), \lim\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \lim f(x) = A$;

ii) $\lim f_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

$$\Rightarrow \lim[f_1(x) + \cdots + f_n(x)] = 0,$$

$$\lim[f_1(x)\cdots f_n(x)] = 0;$$

iii) $\lim\alpha(x) = 0, \alpha(x) \neq 0 \Rightarrow \lim \dfrac{1}{\alpha(x)} = \infty$,

$\lim f(x) = \infty \Rightarrow \lim \dfrac{1}{f(x)} = 0$;

iv) $\lim\alpha(x) = 0, |f(x)| \leqslant M \Rightarrow \lim f(x)\alpha(x) = 0$.

(2) 极限的四则运算法则

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,则

i) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

ii) $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \lim g(x) = AB$;

iii) $\lim[f(x)/g(x)] = \lim f(x)/\lim g(x) = A/B(B \neq 0)$

(3) 无穷小的比较.

二　解题归纳与例题

1　有关函数概念的练习

常见的习题类型有:

(1) 求函数的定义域(含初等函数的自然定义域,抽象复合函数定义域,分段函数的定义域等);

(2) 利用函数符号的变换解有关函数的问题或求函数表达式.

例 1　求函数 $f(x) = \sqrt{\lg(x^2 - 3)} + \arcsin \dfrac{3 - 2x}{11}$ 的定义域.

解　函数的自变量 x 必须同时满足不等式:

$$x^2 - 3 > 0, \lg(x^2 - 3) \geqslant 0, |(3 - 2x)/11| \leqslant 1.$$

解之得　　$-4 \leqslant x \leqslant -2$ 或 $2 \leqslant x \leqslant 7$.

故 $f(x)$ 的定义域为 $[-4, -2] \cup [2, 7]$.

[注]　*求初等函数的定义域时,主要根据基本初等函数的定*

义域. 当函数是复合函数时，要逐层的列出有关的等式或不等式；当由有限多个函数经四则运算得到时，其定义域为有限个函数定义域的交集.

例 2　已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，试求下列函数的定义域.

(1) $f(x+1)$；　(2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x+a)+f(x-a)$　$(a>0)$.

解 (1) 由 $0\leqslant x+1\leqslant 1$ 知，$-1\leqslant x\leqslant 0$，故 $f(x+1)$ 的定义域为$[-1,0]$.

(2) 由 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$ 知，$k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，故 $f(\sin x)$ 的定义域为 $\left[k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$　$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

(3) 解联立不等式

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$$

于是，当 $a\leqslant 1-a$，即 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，函数的定义域为 $[a,1-a]$；当 $a>1-a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，不等式组无解，故函数此时无定义.

[注] i) 这类题按如下方法解是错误的：

因为 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以 $1\leqslant x+1\leqslant 2$，故 $f(x+1)$ 的定义域为$[1,2]$.

例如，$f(x)=\sqrt{\arcsin x}$ 的定义域为$[0,1]$，但函数 $f(x+1)=\sqrt{\arcsin(x+1)}$ 对于$[1,2]$中的任何 x 均无与之对应的函数值.

ii) 当定义域与参数有关时，可能要对参数的取值范围加以

讨论.

例 3 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，试求 $f(x)$.

解 方法一 （变量替换法）

令 $t=x+\dfrac{1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{2}(t\pm\sqrt{t^2-4})$，将其代入已知条件中，有

$$f(t)=\left[\frac{1}{2}(t\pm\sqrt{t^2-4})\right]^2+1\Big/\left[\frac{1}{2}(t\pm\sqrt{t^2-4})\right]^2$$
$$=t^2-2.$$

所以，$f(x)=x^2-2$.

方法二 （恒等变形法）

因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+2x\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$.

所以，$f(x)=x^2-2$，

例 4 已知对任意 $x,y\in\mathrm{R}$，有

$$2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y),$$

且 $f(x)\not\equiv 0$，证明

$$2f^2(x)=f(2x)+1.$$

证 由 x,y 的任意性，在题给等式中，令 $y=0$，得

$$2f(x)f(0)=2f(x).$$

又 $f(x)\not\equiv 0$，故有 $f(0)=1$. 再取 $x=y$，则

$$2f^2(x)=f(2x)+f(0)=f(2x)+1.$$

［注］ 解这类题关键是根据 x,y 的性质，适当地选取 x 或 y.

例 5 设

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x-1, & x<1,\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

试求：

(1) $f(x)$ 的定义域及 $f(-1),f(0),f(1),f(a+1)$；

(2) $f(x)+g(x)$ 及 $f[g(x)]$.

解 (1) $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$f(-1)=0,\quad f(0)=1,\quad f(1)=1,$$

$$f(a+1)=\begin{cases}1+(a+1), & a+1<0,\\ 1, & a+1\geqslant 0,\end{cases}$$

即

$$f(a+1)=\begin{cases}2+a, & a<-1,\\ 1, & a\geqslant -1.\end{cases}$$

(2) 由于

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}(1+x)+(x-1), & x<0,\\ 1+(x-1), & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

故

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

由于

$$f[g(x)]=\begin{cases}1+g(x), & g(x)<0,\\ 1, & g(x)\geqslant 0,\end{cases}$$

因此,当 $x<1$ 时,$g(x)=x-1<0$,故 $f[g(x)]=x$;

当 $x\geqslant 1$ 时,$g(x)=0$,故 $f[g(x)]=1$,从而,

$$f[g(x)]=\begin{cases}x, & x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

[注] 求分段函数的复合函数时,除函数表达式用中间变量代替外,还要注意自变量的取值范围也要用中间变量代入再确定复合函数的取值范围.

2 按定义证明函数的特性

例 6 试证:如果函数 $f(x)$,$g(x)$ 具有相同的单调性,则复合函数 $f[g(x)]$ 必为单调增加函数.

证　不妨设函数 $f(x)$，$g(x)$ 都是单调增函数，故依定义，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$g(x_1) < g(x_2), \quad f[g(x_1)] < f[g(x_2)].$$

从而复合函数 $f[g(x)]$ 也是单调增函数.

当函数 $f(x)$，$g(x)$ 都是单调减函数时，同理可证.

［注］　类似地可证，如果函数 $f(x)$，$g(x)$ 具有相反的单调性，则复合函数 $f[g(x)]$ 必为单调减函数.

例 7　已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内恒大于零，且当 $k>0$ 时，$f(x+k)=\dfrac{1}{f(x)}$，证明 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的周期函数.

证　对任给 $x \in (-\infty, +\infty)$，当 $k>0$ 时，因为

$$f[(x+k)+k] = \frac{1}{f(x+k)} = f(x),$$

即
$$f(x+2k) = f(x).$$

根据定义，$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是周期函数，$2k$ 为其周期.

3　有关极限的证明题

常见的习题类型有：

(1) 按定义证明极限；

(2) 利用左、右极限证明极限的存在性；

(3) 用两个极限存在准则证明极限存在.

例 8　依定义证明下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{\pi}{n} = 0$；　(2) $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$.

证　(1) 因为 $\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{\pi}{n} - 0\right| = \left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}\right| < \dfrac{1}{n}$，所以，对 $\forall\, \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n > N$ 时，

$$\left|\frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n} - 0\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

根据 ε-N 定义可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n}=0$.

(2) 因为 $|x^2-9|=|x-3||x+3|$，又由 $x\to 3$，不妨设 $|x-3|<1$，即 $2<x<4$，从而 $|x+3|<7$，于是对 $\forall\ \varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{7}\}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，

$$|x^2-9|=|x-3||x+3|<7|x-3|<\varepsilon.$$

根据 ε-δ 定义可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x^2=9$.

[注] 类似于利用 $x\to 3$ 限制 $|x-3|<1$，是极限证明中的常用技巧. 因为极限研究的是函数的局部性质，故这种限制是合理的.

例 9 讨论下列函数极限的存在性：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases}2-\dfrac{\sin x}{x}, & x>0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0;\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. 好

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2-\dfrac{\sin x}{x})=1$,

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=0$,

$$\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}=1$$

从而 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1,$$

由此即知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 不存在.

*例 10 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$;

(2) 设 $x_1=\sqrt{2}$, $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 (1) 利用夹逼准则.

因为 $3<(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3\cdot\left(\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{2^n}{3^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}<3\cdot 3^{\frac{1}{n}}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}3=\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}}=3$, 故由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3.$$

(2) 方法一 (利用单调有界准则)

先证数列是单调增加的.

因为 $$x_{k+1}-x_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{\sqrt{2+x_k}+\sqrt{2+x_{k-1}}},$$

而 $$\sqrt{2+x_k}+\sqrt{2+x_{k-1}}>0,$$

故 $x_{k+1}-x_k$ 与 x_k-x_{k-1} 同号, 由此递推可知, 它与 x_2-x_1 同号, 但 $x_2-x_1>0$, 从而 $x_{k+1}>x_k$, 于是数列 x_n 是单调增加的.

其次证明数列是有界的.

因为 $x_1=\sqrt{2}<2$, 假设 $x_k<2$, 则

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2,$$

故由数学归纳法原理知, 对一切的自然数 n 都有 $x_n<2$, 所以数列 x_n 是有界的.

综上所述, 根据单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则由 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ 两边取极限得

$$a=\sqrt{2+a},$$

由此解得 $a=2$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

方法二　根据数列的特点，有

$$x_1=\sqrt{2}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2},$$

$$x_2=\sqrt{2+x_1}=\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{2^2})}=2\cos\frac{\pi}{2^3},\cdots,$$

$$x_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

由此取极限得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=2.$$

［注］　利用解方程的技巧求递推型数列极限的方法，其前提是极限存在，忽略这一点而盲目照搬此方法往往会导致错误的结论.

例如，$x_n=2^n$，则 $x_n=2x_{n-1}$，如果设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则两边取极限得 $a=2a$，由此解得 $a=0$. 该结论与 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n$ 不存在矛盾.

4　极限的计算

常用的方法有：

(1) 利用简单技巧(如拆项，分子、分母同乘某一因子，变量替换等)和极限的四则运算法则计算；

(2) 利用两个重要极限计算；

(3) 用无穷小的性质计算；

(4) 用等价无穷小代换.

例 11　求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$，　$(|x|<1)$.

解　(1) 利用拆项的技巧化简求和

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=1.$$

(2) 利用分母、分子同乘一因子的变形技巧

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}(1-x^{2^n+1})$$

$$=\frac{1}{1-x},\quad(|x|<1).$$

例 12　求下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解　(1) 方法一　(利用变量替换的方法)

令　$t=\sqrt[6]{x}$，则当 $x\to1$ 时 $t\to1$，于是

$$\text{原式}=\lim_{t\to1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}.$$

方法二 (利用分子、分母有理化的技巧)

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2}.$$