新编高等院校高职高专公共基础课规划教材

俞礼钧 王 力 主编

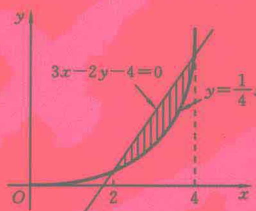
应用高等数学

题解与学习指导同步训练

（第3版）

YINGYONG GAODENG SHUXUE

TIJIE YU XUEXI ZHIDAO TONGBU XUNLIAN



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

新编高等院校高职高专公共基础课规划教材

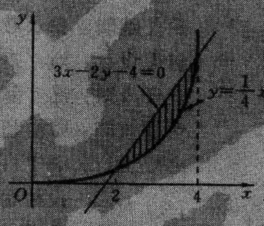
主　编　俞礼钧　王　力
副主编　赵丽君　彭祥光　王叔宝

应用高等数学

题解与学习指导同步训练

（第3版）

YINGYONG GAODENG SHUXUE
TIJIE YU XUEXI ZHIDAO TONGBU XUNLIAN



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学题解与学习指导同步训练(第3版)/俞礼钧　王　力　主编.—武汉:华中科技大学出版社,2010.9

ISBN 978-7-5609-6274-0

Ⅰ.应…　Ⅱ.①俞…　②王…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第114643号

应用高等数学题解与学习指导同步训练(第3版)　　俞礼钧　王　力　主编

责任编辑:史永霞
封面设计:刘　卉
责任校对:祝　菲
责任监印:周治超
出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437
录　　排:武汉兴明图文信息有限公司
印　　刷:华中科技大学印刷厂
开　　本:787mm×960mm　1/16
印　　张:24
字　　数:495千字
版　　次:2010年9月第1版第1次印刷
定　　价:39.50元

华中出版

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118　竭诚为您服务

第 3 版前言

本书原来编写时把读者群定格在学习高等学校三类本科经济类高等数学课程和高职高专数学课程的学生上，以此确定上册内容是一元函数微积分学与多元函数微积分学，下册内容包括线性代数和概率论与数理统计。本教材因为取材精简恰当、文字流畅易读，自发行以来普遍受到好评。其后不少工程等类专业的行家认为其实把本教材用于其他专业，较之于有些教材更为适宜。

几经斟酌，为感谢同仁、社会的厚爱，便于教师开展教学工作，遂决定再次改版、修订本书。一方面删去一些看似重复的繁例或冗文，使其体现删繁就简的原则；另一方面增扩工程等类专业所需的基本内容。改版时编者希望整个教材内容能体现培养第一线应用型技术人才的特点，体现从工程类到经济类各类专业的数学意识、创新能力和全面素质培养的要求，使之与国家中长期教育改革和发展规划纲要的精神相契合。在保证基本要求的前提下，改编时注意把有用的内容充实到教材中去，既体现教育规格之所需，又能满足读者终身学习的需要。在当前强调对学生加强素质教育的背景下，本书结合了教学改革的实践心得。编者追求的目标是，学生能获得专业素质教育、理性思维训练、美感熏陶及数学文化的传承。

本书改版后，读者对象是各类三类本科和各类高职院校及专科学校的学生（包括理、工、师范、财经、医、农的本、专科生，电大、职大、函大及高等教育自学考生）。不同专业可根据需要自行决定取舍其中内容。

改版后，全书仍分上、下两册，并配以对应的教学指导书（包括习题解答）一本。上册内容包括极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学和多元函数积分学等 8 章；下册包括微分方程、无穷级数、行列式、矩阵与线性方程组、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、统计推断、方差分析与回归分析等 8 章。

本套书由俞礼钧、王力、王裕民担任主编，赵丽君、彭祥光、王叔宝担任副主编。其中，第 2 章、第 9 章、第 10 章和第 11 章由俞礼钧负责编写。第 5 章和第 7 章由王裕民、王叔宝负责编写。第 1 章、第 8 章和第 12 章由王力负责编写。第 3 章、第 4 章、第 6 章和第 13 章由赵丽君负责编写。第 14 章、第 15 章和第 16 章由彭祥光负责编写。负责修订者为俞礼钧、王力、赵丽君和王叔宝。全套书仍由俞礼钧统稿。

改写过程中多位使用本书的教师如王红胜、胡芳、石丽君等人提出了有价值的

建议并写出了详细的书面意见。本书得以付梓,受到武汉商贸职业学院教务处代芳处长的鼎力支持。编者在此一并致以衷心的感谢。

但愿此次改版正应"删繁就简三秋树,立异标新二月花"之寓意。

编者

花开红树之时,光谷腹地之处

2010 年 3 月武汉

第 2 版前言

《应用高等数学》上、下两册及其配套书《应用高等数学题解与学习指导同步训练》自出版发行以来，为许多大专院校采用。实践证明，该套教材取材精简恰当，文字流畅易读，在当前高等数学教学改革中受到了好评。尤其是习题与教学内容较为配合，难易适度，有利于帮助学习应用高等数学的学生更好地掌握教材。

在使用过程中，也发现存在若干不足之处，主要是部分章节内容，如中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学等虽然能满足基本教学要求，但在更加强化计算工具的使用、帮助学生更快地学会应用方面，还是有工作可做的。

本次改版修订增加了以上内容相关的应用举例。我们在增扩内容时，尽量不失原教材的特点，即提供丰富的素材，贯彻深入浅出的原则，做到简明扼要，避免烦琐，使学生的学习负担有所减轻。

本套书主编为俞礼钧、王力、王裕民。负责修订者为俞礼钧、赵丽君和王叔宝。全套书由俞礼钧统稿。

本套书在定稿、改版过程中得到学校领导梅世炎教授、教务负责人董荣城教授、袁产喜教授的帮助和指正，对此我们深表谢忱。

我们还要感谢使用初版的老师和读者，正是他们的支持和帮助，使修订工作有了改进的方向。

编者于光谷腹地

2008 年 8 月武汉

前　言

本书分为上、下两册，上册是一元函数微积分学与多元函数微积分学，下册包括线性代数和概率论与数理统计，各章节附有习题，文后附有习题答案。

本书在编写上侧重于应用，对过于复杂的定理证明及在实际问题中应用较少的部分都予以省略，不去强调论证的严密性。

本书在知识结构、教学内容、体例编写等方面，力求提供丰富的素材，贯彻深入浅出的原则，重视数形结合的方法，强化计算工具的使用；将现代生活和各类专业学习中有广泛应用的基础知识作为必学内容，以保证普通高校基础教学的教学水平。在编写过程中，编者还注意渗透现代教学的观点和方法，为方便学生深入学习奠定了较好的基础。

本教材编写具有一定的弹性，希望其适用面更为广泛。为了帮助三类本科在内的各种高职高专学校的学生根据实际情况选择不同的内容，编者在教材编写中考虑了培养应用型人才的培养目标和要求等问题。

本书可作为高等学校三类本科经济类高等数学课程和高职高专数学课程的教材或教学参考书。

本书由俞礼钧、王裕民担任主编，彭祥光、王力、赵丽君、王叔宝担任副主编。其中，第 2 章和第 7 章由俞礼钧负责编写，第 5 章和第 6 章由王裕民、王叔宝负责编写，第 11 章、第 12 章和第 13 章由彭祥光负责编写，第 1 章和第 9 章由王力负责编写，第 3 章、第 4 章、第 8 章和第 10 章由赵丽君负责编写。

本书在编写过程中，得到了编者所在学校领导和教务处的大力支持及有关教师的热情帮助，在此一并表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者和从事教学的教师提出批评和建议。

编　者

2006 年 6 月

目　　录

第 1 章　极限与连续

知识要点提示

1. 函数

1）函数概念的五个要素

自变量 x，定义域 D_f，因变量 y，因变量 y 关于自变量 x 的依存关系 f 和值域 R_f 是函数概念的五个要素.

在这五个要素中，确定一个函数的关键要素是依存关系 f 和定义域 D_f. 如果两个函数的依存关系 f 和定义域 D_f 都相同，则称这两个函数是相同的，而自变量和因变量用什么记号来表示，则是无关紧要的.

2）函数定义域的求法

3）函数的基本特性

函数的基本特性有单调性、有界性、奇偶性和周期性，通常可以用这些特性来揭示函数的性态.

4）复合函数与反函数

(1) 两个函数的复合，实际上就是中间变量介入自变量的变化过程.

设有两个函数

$$y=f(u), u\in D_f;\quad u=\varphi(x), x\in D_\varphi.$$

若 $R_\varphi\subseteq D_f$，就可以得到复合函数

$$y=f[\varphi(x)],\quad x\in D_\varphi.$$

(2) 对于函数 $y=f(x)$，其反函数的存在，取决于其值域 R_f 中的任一值 y，都可以通过关系式 $y=f(x)$ 在其定义域 D_f 中确定唯一的一个 x 与之对应.

5）基本初等函数

基本初等函数是指常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

6）简单的经济函数

《应用高等数学(上)》[①]中只介绍了总成本函数、总收入函数、总利润函数、需

---

① 俞礼钧，王裕民. 应用高等数学(上). 武汉：华中科技大学出版社，2008.

求函数和供给函数.

2. 极限

1) 数列极限

如果数列$\{x_n\}$的项数 n 无限增大(记为 $n\to\infty$),通项 x_n 无限地趋近于一个确定的常数 A,那么常数 A 就称为当 $n\to\infty$时数列$\{x_n\}$的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

如果数列没有极限,就说数列是发散的.

2) 函数的极限

如果当 $x\to x_0$(x 可以不等于 x_0)时,函数 $f(x)$无限地趋近于一个确定的常数 A,则常数 A 称为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件为 $f(x)$在点 x_0 处的左、右极限存在且相等,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

3) 无穷小与无穷大

(1) 无穷小.

若函数 $f(x)$在自变量 x 的某个变化过程中以零为极限,则称在该变化过程中 $f(x)$为无穷小量,简称无穷小.

(2) 无穷小的性质.

性质 1 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质 2 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 3 有界变量与无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 4 常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

(3) 无穷大.

若在自变量 x 的某个变化过程中,函数 $f(x)$的绝对值无限增大,则称在自变量 x 的变化过程中,$f(x)$为无穷大量,简称无穷大,记为

$$\lim f(x)=\infty.$$

(4) 无穷小与无穷大的关系.

在自变量的同一变化过程中,无穷大的倒数是无穷小,恒不为零的无穷小的倒数是无穷大.

(5) 无穷小的比较.

设 α,β 是在同一变化过程中的无穷小,$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$是在这个变化过程中的极限.

① 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记为 $\beta=o(\alpha)$.

② 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

③ 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c$（$c$ 是不等于零的常数），则称 β 是与 α 同阶的无穷小.

④ 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 是与 α 等价的无穷小，记为 $\beta\sim\alpha$.

4）极限的性质与运算法则

（1）极限的性质.

① **唯一性**　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则极限值唯一.

② **局部有界性**　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则存在点 x_0 的某一去心邻域，在该去心邻域内函数 $f(x)$有界.

③ **局部保号性**　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），则存在点 x_0 的某个去心邻域，在该去心邻域内函数 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

若在点 x_0 的某去心邻域内，$f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$（或$A\leqslant 0$）.

（2）极限的运算法则.

设$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$（假定 x 在同一变化过程中），则有下列运算法则：

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B;$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B;$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0).$$

5）极限存在的准则及两个重要极限

准则 1（夹逼准则）　设函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$在点 x_0 的某个邻域内（x_0 可以除外）满足条件

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

且极限$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

准则 2　单调有界数列必有极限.

两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\ (或\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}).$$

6）函数的连续性

（1）函数连续的概念.

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，如果当自变量的改变量无限地趋近于零时，相应函数的改变量也无限地趋近于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 是连续的,或者称 x_0 是函数 $f(x)$的连续点. 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数$f(x)$在点 x_0 是连续的.

(2) 函数的间断点.

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某去心邻域内有定义,如果函数 $f(x)$具有下列三种情况之一:

① 在点 $x=x_0$ 没有定义;

② 虽然在点 $x=x_0$ 有定义,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

③ 虽然在点 $x=x_0$ 有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$,

则称函数$f(x)$在点 x_0 不连续,而点 x_0 称为函数 $f(x)$的不连续点或间断点.

函数的间断点可分为如下两类.

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点 } x_0\begin{cases}\text{可去间断点}\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\text{存在,但 } f(x_0)\text{无定义}\\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)\text{存在,}f(x_0)\text{有定义,但}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)\end{cases}\\ \text{跳跃间断点:}\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\text{与}\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\text{均存在,但}\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\end{cases}\\ \text{第二类间断点 } x_0\text{:}\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\text{与}\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\text{中至少有一个不存在}\end{cases}$$

(3) 初等函数的连续性.

一切初等函数在它们的定义区间上都是连续的.

(4) 闭区间上连续函数的性质.

有界性定理　在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

最值定理　如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则它在$[a,b]$上一定能取到最大值和最小值.

介值定理　如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则它在$[a,b]$上一定能取到最大值 M 和最小值 m 之间的任何一个中间值C,即至少存在一点 $\xi(\xi\in[a,b])$,使 $f(\xi)=C$.

零点存在定理　如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在(a,b)内至少存在一点 $\xi(\xi\in(a,b))$,使 $f(\xi)=0$.

典型例题分析

【例 1】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$;

(3) $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$.

【解】 (1) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geqslant 0\Rightarrow 0<x-2\leqslant 1\Rightarrow 2<x\leqslant 3$,故函数的定义域为 $(2,3]$.

(2) 要使函数有意义,必须使 $\sin x-\cos x\neq 0$,即 $\sin x\neq\cos x$,$\tan x\neq 1$,从而

$$x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

因此,函数的定义域为

$$\left(k\pi+\frac{\pi}{4},(k+1)\pi+\frac{\pi}{4}\right)\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

(3) 要使函数有意义,必须使

$$\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0,\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-3)(x+2)\geqslant 0,\\ -7\leqslant 2x-1\leqslant 7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -2\text{ 或 }x\geqslant 3,\\ -3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

$$\Rightarrow -3\leqslant x\leqslant -2\text{ 或 }3\leqslant x\leqslant 4,$$

所以函数的定义域为 $[-3,-2]\cup[3,4]$.

【例 2】 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=3^{x^2+1}$;　　(2) $y=2\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

【解】 (1) 函数 $y=3^{x^2+1}$ 是由函数 $y=3^u$ 和 $u=x^2+1$ 复合而成.

(2) 函数 $y=2\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=2\arcsin u$,$u=\sqrt{v}$ 及 $v=1-x^2$ 复合而成.

【例 3】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$.

【解】
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【注】 这里和式的项数随着 n 在变化,所以要先求和,然后求极限.

【例 4】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

【解】 (1) x 是 $x\to 0$ 时的无穷小,$\cos\dfrac{1}{x}$ 是有界函数,无穷小与有界函数的积为无穷小,所以

$$\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0.$$

(2) $\dfrac{1}{x}$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小,$\arctan x$ 是有界函数,无穷小与有界函数的积为

无穷小,所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0.$$

【例 5】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(8x^2+1)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$.

【解】 当 $x\to\infty$时,对于两个多项式相除的极限,其极限仅与分子、分母的次数最高项有关,故原式可简化为

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{(8x^2)^3\cdot(3x)^4}{(6x^2)^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{8^3\cdot x^6\cdot 3^4x^4}{6^5x^{10}}=\frac{16}{3}.$$

【注】 当 $n\to\infty$时,对两个多项式相除的极限,一般地有($a_0\neq0,b_0\neq0$)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\infty, & m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n.\end{cases}$$

【例 6】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}$;　　(2) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

【解】 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{3-1}{3-2}=2$.

(2) 原式$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2xh+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x$.

【注】 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,当 $A=0,B=0$ 时,求$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$,即可考虑$f(x)$与 $g(x)$有无公因式 $x-x_0$,因 $x\to x_0$,所以 $x\neq x_0$,同时约去公因式$(x-x_0)$即可求解.

【例 7】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

【解】 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to16}\dfrac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt[4]{x}+2)}{\sqrt{x}-4}=\lim\limits_{x\to16}(\sqrt[4]{x}+2)=4$.

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$.

【注】 以上各题是利用有理化将因式进行变形,化简后求解的.

【例 8】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$;　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$.

【解】 (1) 原式$=4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{4x}=4\times1=4$.

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2$.

(3) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}=x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}=x$.

【注】 以上各题是利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$求解的.

【例 9】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

【解】 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-x)]^{-\frac{1}{x}\cdot(-2)}=\{\lim\limits_{x\to 0}[1+(-x)]^{-\frac{1}{x}}\}^{-2}=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$.

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=e^2$.

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$=e\cdot 1=e$.

【注】 以上是利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\left(或\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e\right)$来求解的.

【例 10】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{(x-3)^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{3x+1}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(4x^2+x-3)$.

【解】 (1) 因$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2}{x^2+1}=0$，所以$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{(x-3)^2}=\infty$.

(2) 因$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{3x+1}=\infty$.

(3) 因$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{4x^2+x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}(4x^2+x-3)=\infty$.

【注】 以上是利用无穷小与无穷大的关系求解的.