天津市科协专著基金
TJST Fund For Academic Publications

Unified Representation of
Special Relativity and Quantum Theory

狭义相对论和量子理论一元化表述

于学刚 著

科学出版社

狭义相对论和量子理论一元化表述

Unified Representation of Special Relativity and Quantum Theory

于学刚　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书论述狭义相对论和量子理论的一元化问题。由双曲复数建立起一类 Minkowski 复空间，分析双曲复空间的代数结构，赋予四维复空间度量公理和泛函分析结构，抽象出一类广域 Hilbert 相空间。以广域 Hilbert 相空间作为狭义相对论和量子力学的共同数学基础，可以讨论狭义相对论、经典量子力学、相对论量子力学以及场论的物理内容。

本书可作为数学、物理以及相关专业本科生选修课教科书以及研究生专业基础课教材，也可作为数学、物理领域科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

狭义相对论和量子理论一元化表述＝Unified Representation of Special Relativity and Quantum Theory/于学刚著. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-035576-8

Ⅰ. ①狭… Ⅱ. ①于… Ⅲ. ①狭义相对论-研究②量子论-研究 Ⅳ. ①O412. 1②O413

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 220908 号

责任编辑：钱 俊 / 责任校对：张凤琴

责任印制：钱玉芬 / 封面设计：北京耕者图文设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 9 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2012 年 9 月第一次印刷 印张：22 1/4

字数：434 000

定价：85.00 元

前　言

相对论和量子理论是现代物理学的两大支柱，对于我们这个世界的构造及其运动规律，两种理论分别建立起自洽的理论体系。但两种理论之间有抵触，相互间很难协调，所以相对论和量子理论的一元化一直是人们关注的热点。Dirac 曾说过：“我们有了相对论和量子论，两个建立非常完善的理论，每一个在它自己的领域内都是非常可靠的，可是它们彼此之间却难以相互协调。如果两个理论都是正确的，那么会想到，它们马上就应该协调成一个单一的体系。但是相对论和量子力学的情况并非如此，它们之间有一定的抵触，这个抵触是最近四十年来物理学的主要问题。”Einstein 也指出：“相对论和现行量子力学的理论是不相容的，未来的理论必须把两者统一起来。”显然，要解决一元化，首先应解决融洽问题。但两论抵触的原因在哪里呢？从何处入手解决这个抵触问题是应该首先考虑和探讨的课题。近一个世纪以来人们围绕这些问题作了许多探索，Einstein 为此花费了后半生来研究统一场论，Stephen Hawking 想通过广义相对论奇点的分立结构来解决广义相对论和量子力学的一元化问题，但至今尚无被认可的结果。

本书作者经过二十余年的研究和探索，利用在 Clifford 几何代数中引入的一类双曲虚单位，发现其复数性质与 Minkowski 几何相对应，这引起了我们对两论的基础关联的关注。即两论相互抵触和不融洽可能是数学基础的缺陷造成的，传统复数性质与 Minkowski 空间的几何性质相互错位可能是造成非欧理论产生缺陷的原因。如果利用这种新的虚单位建立起相关的四维复时空间，并抽象出一类与 Minkowski 空间相融合的代数结构和泛复函分析理论，可能为狭义相对论和量子力学提供一套统一的数学框架，为两论的一元化打开一个突破口。

建立一套适用狭义相对论和量子理论的非欧系统理论，首先考虑两个切入点：一个是复数本体空间问题，另一个是奇点的局域性质。对于第一个切入点，Dirac 曾有精彩论述：“我想建议人们把单复变函数论当做基础，这一数学分支特别美，此外，与它相联系的变换群，亦即复平面的变换群，是与支配狭义相对论时空的 Lorentz 群相同的，这就导致人们猜测在单复变函数论与狭义相对论的时空之间存在着某种深刻的联系，找出这种联系是未来的一项困难任务。”显然，Dirac 早已注意到单复变函数与相对论的时空关联，但目前狭义相对论中的 Lorentz 群和时空变换关系与单复变函数的性质还缺少本质上的联系，这是因为狭义相对论的基础是建立在两个物理基本假设之上，即相对性原理和光速不变原理。时空变换性质可以不依赖于单复变函数，即不必利用单复变函数的复数性，照样能导出

Lorentz 变换并解决狭义相对论的物理问题。然而在量子力学中，几率态函数和粒子运动方程应该与单复变函数存在逻辑上的关联，如果缺少复数性，态函数的相位、几率诠释、光量子的干涉等物理量无法用实数表达。因此，狭义相对论和量子力学在利用单复变函数的性质解决物理问题上存在差异，所以讨论单复变函数与所对应复空间的联系，用以表述狭义相对论和量子力学数学基础是解决问题的关键，也是建立新的空间理论首个切入点。

第二个切入点来源于 Hawking 的量子引力论。我们感兴趣的是，Hawking 想对非 Euclidean 时空的奇点进行度量和时空量子化，从而解决相对论与量子力学的数学关联问题。不同的是，Hawking 考虑的是弯曲时空中的奇点，我们考虑的是平直 Minkowski 空间奇点问题。其实，Minkowski 空间的类光区是一类具有物理意义的奇异区。由于数学工具所限，传统的数学和物理理论都没有对非 Euclidean几何所对应的无限大奇点区域进行系统的研究。狭义相对论中，当 $v=c$ 时，相对论因子 $\frac{1}{\alpha}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$，出现 $\frac{1}{0}$ 的奇点。类光区的奇点，并不是孤立奇点，由于它延伸无穷远，不能用 Laurent 级数消除，目前仅知道类光区的奇点是光量子和电磁场的对应区域，却不能讨论它的局部性质。量子力学的数学基础是建立在以 Euclidean 几何为原空间的 Hilbert 空间，由于 Euclidean 空间的局限性，不可能讨论光量子对应区域问题，也不可能利用 Hilbert 空间讨论实物粒子与场的几何关联。追其原因，还是单复变函数的复数性与非 Euclidean 几何的时空性质不吻合。即传统的单复变函数与 Minkowski 空间不存在内在的因果关联，所以也就不可能通过其复数性来刻画 Minkowski 空间的时空性质。

两个切入点的关键是要找到一种单复变函数与非欧空间相对应，通过复数运算规则所描述的复数性质与 Minkowski 空间的时空性质相吻合，通过建立一套非 Euclidean 空间的公理体系来刻画 Minkowski 空间邻近关系和局部性质。找出类时区与类光区的逻辑关联，从几何上解释有静质量粒子和光量子的耦合问题，这涉及建立非欧几何的代数结构和分析结构。传统狭义相对论的数学基础是四维 Minkowski 几何，缺少的是分析结构；量子力学的数学基础是 Hilbert 空间，缺少的是几何结构。由于传统 Hilbert 空间的分析理论是以 Euclidean 几何为原空间，或以 Euclidean 空间的公理化体系抽象出的一类泛函分析理论，它与 Minkowski 几何性质是不吻合的。显然，如果能以 Minkowski 几何为原空间，建立起一套非 Euclidean 几何的公理化体系，并抽象出相应的泛函分析以及代数理论，使狭义相对论和量子力学在这套统一的非 Euclidean 数学理论中描述物理问题，两论的抵触问题就可能得以解决。值得关注的是，如何将经典量子力学中低速运动的微观客体纳入 Minkowski 几何，并能解释波粒二象性、不确定关系以及态函数几率诠释等物理问题，是制约狭义相对论与量子力学一元化的瓶颈。

本书引入 Clifford 代数中的一种双曲虚单位 j($j^2=1, j\neq 1, j^*=-j$)，它对应的双曲复数与 Minkowski 空间的时空性质相吻合，我们期待它能为两论的一元化带来一线曙光。但如何处理新复数与传统复数的关系，从数学上，应该界定两种复数所对应的本体空间，从几何和代数中找出两种复数的同构关系，从而能对不同复数的应用范围作出判断；物理上，利用复数的共性对传统物理理论给出统一的描述，利用复数的个性对现代物理中出现的疑难问题找出解决办法，当然，这需要对传统理论和观念进行深层次的改革和更新。复数具有本体空间，这是一个新的观念。一般认为实数到复数的扩充，相应的实空间也应扩展到复空间。传统理论将 Minkowski 复空间称为赝欧空间，用以区别 Euclidean 复空间。但高速运动客体的时空位置和运动规律能用 Minkowski 复空间的几何点来描述吗？答案并不是肯定的。严格来讲，在 Minkowski 复空间的类时区并不能描述客体的运动规律，甚至不能刻画两个物理事件的几何关联。因为类时区中未来时的光锥内，时空点的负元对应于过去时光锥内的时空点，所以在未来时光锥内不能简单地定义减法。两个未来事件时空间隔的几何意义，需要解释为一个未来事件的时空点与一个过去事件时空点的直和，这背离了两个未来事件时空间隔的物理含义。Minkowski 复空间的几何性质与物理性质相脱节的原因可能与传统复数与非欧几何的错位有关，新复数的引入应该克服数学和物理的脱节和错位关系，这就涉及不同虚单位对应不同复空间，涉及复数的本体空间问题。

不同物理事件间的因果联系可通过建立时空点间的运算规则来表述。物理事件的运动规律和变换关系需要讨论空间中两点的度量和距离，这涉及几何空间的分析结构和代数结构，涉及空间度量的公理性质。传统狭义相对论不能系统地讨论 Minkowski 空间中任意两点的度量和距离，本质上是没有建立起这种非 Euclidean 空间的公理化体系。由于 Minkowski 空间的时空间隔不变量只能通过复数乘法的缩并形式来表示，这种局限性制约了时空点间运算规则的建立，也制约了客体所对应的物理事件运动规律的描述。尽管在相对论量子力学中通过无穷小 Lorentz 变换讨论了 Dirac 波动方程的协变性问题，但由于相对论的能量动量关系摆脱不了复数乘法缩并的影响，显现出无法消除的矛盾，使粒子和场的几何关联问题至今没有得到解决。事实上，无论是狭义相对论和经典量子力学，还是相对论量子力学和场论都没有与四维几何空间建立起深刻的联系，这可能是两种理论之间相互抵触以及量子客体不能进行因果描述的真正原因。

Minkowski 空间具有的方向奇异性为类时区和类光区建立了一种几何关联。以内积形式定义度量空间，抽象出一类以 Minkowski 空间为原空间的 Hilbert 相空间，可能为量子力学提供新的数学框架。将具有静质量微观客体的时空区域与 Minkowski 空间类时区相对应，光量子或场的时空区域与类光区相对应。在类时区与类光区的联系中可分别刻画光量子与有静质量粒子的耦合以及静质量粒子之

间的几何关联。对具有方向奇异性的 Minkowski 空间进行时空量子化，由这种非质点相格抽象出的 Hilbert 相空间作为量子力学的数学基础，可将量子力学与 Minkowski 空间联系起来。但这种联系需要与 Minkowski 空间的类光区（奇点区）建立起度量和邻近关系，并分别赋予分析结构和代数结构。

为了试图建立狭义相对论和量子力学统一的数学框架，消除两论的抵触，我们对双曲复函在狭义相对论和量子力学中的应用预设了一些条件，同时这也是本书的总体思路：① 建立以 Minkowski 空间为原空间的公理体系，包括几何体系、代数体系和泛函分析体系，作为相对论和量子理论的统一数学基础；② 利用非 Euclidean 时空度量和拓扑结构刻画 Minkowski 空间零因子区或类光区的邻近关系，分析类时区与类光区的几何关联；③ 建立以 Minkowski 空间为原空间的 Hilbert 相空间作为量子力学的数学基础，对量子力学的基本假设和物理实验通过时空性质给出几何解释；④ 当经典近似时，一方面在 Minkowski 空间中使用 Galilei 变换描述微观低速粒子的运动规律，另一方面对有静质量粒子与光量子的耦合给出几何解释；⑤ 利用复数的共性，覆盖传统复数在两论中的应用，使之不与实验规律相违背，并能论述狭义相对论和量子力学所涉及的物理内容；⑥ 对一些与时空性质有关的疑难问题，给出合理的解释，并分析传统理论不能解释的原因；⑦ 对狭义相对论和量子力学中的连续与分立、时间箭头、因果关联和几率诠释等问题给出合理的哲学解释；⑧ 在 Minkowski 空间建立量子力学中粒子和场论的微分方程，并通过时空奇异性描述微观客体与场的耦合关系。由 Dirac 波动方程导出含有质量项的 Yang-Mills 方程、Maxwell 方程以及强相互作用方程。

由于本书涉及数学和物理两个学科，考虑部分物理读者对数学要求不高，所以将数学基础部分放到后半部分，物理应用放到前半部分。物理应用中需要引入后面的数学内容时均以章节对应的公式号表示。由于作者水平有限，只能起到抛砖引玉作用，希望能引起更多业内专家和学者关注。

本书在成文过程中受到了熊锡金教授、吴咏时教授、薛康教授、丁培柱教授、冯果忱教授、王锡绂教授以及 Jaime Keller 教授等众多专家的指导；本书也得到了作者的同事李武明教授、阎英纪教授、马龙军教授、赵征老师、张与鸿老师、高云娥老师以及宋翠英老师的指点和协助；本书出版得到天津市科协专著基金资助，在此表示衷心的感谢！

作　者

2012 年 5 月

目　　录

第一部分
狭义相对论和量子理论的基础关联

第一章　多复变函数

虚单位 $\mathrm{i}(\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}\neq\pm1, \mathrm{i}^*=-\mathrm{i})$ 的引入，解决了 -1 开方的问题，同时它也是实数到复数的扩充。虚单位 i 现已广泛应用于数学、物理及工程等各个领域，在现代物理特别是量子力学中，粒子态函数的相位以及用非质点相格表示的微观粒子间的干涉、衍射等都与复数的性质密不可分。但是，英国数学家 William K. Clifford (1845～1879)和德国数学家 E. Study (1862～1930)又分别引进了两种虚单位 $\mathrm{j}(\mathrm{j}^2=1, \mathrm{j}\neq\pm1, \mathrm{j}^*=-\mathrm{j})$ 和 $\mathrm{k}(\mathrm{k}^2=0, \mathrm{k}\neq0, \mathrm{k}^*=-\mathrm{k})$，它们同样是实数到复数的扩充。值得关注的是，并列的三套复数具有何种性质，怎样的相互关联，应用于哪些领域，是否可替代现有的数学框架和物理基础，是需要讨论和解决的问题。

1.1　双曲复数与二维坐标变换

19 世纪 70 年代英国数学家 Clifford 引入一种新的虚单位 j，有性质：

$$\mathrm{j}^2=1,\quad \mathrm{j}\neq\pm1,\quad \mathrm{j}^*=-\mathrm{j} \tag{1.1.1}$$

其中，j^* 为 j 的复共轭，j 可命名为双曲虚单位。取 $H(x,\mathrm{j}y)$ 为二维双曲复平面，线性关系式

$$a=x+\mathrm{j}y \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)命名为双曲复数，其中实数 x 和 y 分别为复数 a 的实部和虚部。为了使双曲复平面与物理时空相联系，取 $x=ct, y=r$。若 c 表示光速，t 为时间，r 为一维空间坐标，则 $H(ct,\mathrm{j}r)$ 构成二维复平面。与传统复数不同的是，双曲复数的实部为时间轴，虚部为空间轴。取时间为正定的，虚坐标空间可以有正、负之分，这种形式在狭义相对论和量子力学中有重要的几何意义和物理意义，在后续章节中会陆续讨论。式(1.1.2)和其复共轭可写为

$$\begin{cases} a=ct+\mathrm{j}r & (1.1.3\mathrm{a}) \\ a^*=ct-\mathrm{j}r & (1.1.3\mathrm{b}) \end{cases}$$

双曲复数的模

$$R=|a|_{\mathrm{m}}=\sqrt{|a^*\cdot a|}=\sqrt{|c^2t^2-r^2|} \tag{1.1.4}$$

取

$$c^2t^2-r^2=\pm1 \tag{1.1.5}$$

式(1.1.5)在图 1.1 中给出两对双曲线。由于复数的单位模为双曲线，所以将式

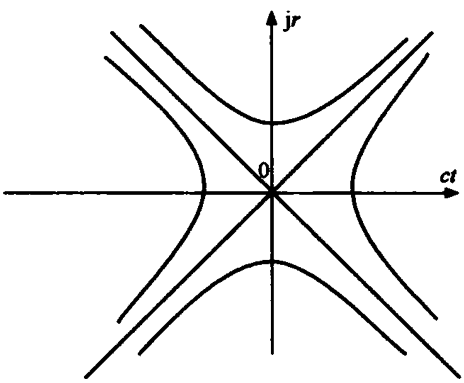

图 1.1　双曲 Minkowski 空间图

(1.1.2)称为双曲复数，所对应复平面称为双曲复平面。当 $R=0$，曲线为式(1.1.5)的渐近线，构成的 Minkowski 空间类光区或零因子区将双曲复平面分割成四个区域。

当 $|r|<ct$ 时，为亚光速区或类时区，单位模对应式(1.1.5)中的正号，是以实轴 ct 为对称轴的一对双曲线。与传统理论不同的是，类时区的上、下光锥由左、右光锥所取代，如时间是正定的，整个类时区均为未来时的定义区域。当 $|r|>ct$ 时，为超光速区或类空区，单位模对应式(1.1.5)中的负号，是以虚轴 $\mathrm{j}r$ 为对称轴的一对双曲线。当 $|r|=ct$ 时，零模点 $R=0$，是光速区或类光区，在数学中也称为迷向区。显然二维双曲复平面与 Minkowski 空间相吻合，命名为双曲 Minkowski 空间，简称 Minkowski 复空间，它与双曲复数的性质具有逻辑上的关联。

在双曲复平面的类时区，设双曲复数 a 相对于实轴 ct 的辐角为

$$\varphi=\operatorname{arcth}\frac{r}{ct} \tag{1.1.6}$$

其中，

$$\begin{cases} r=R\mathrm{sh}\varphi \\ ct=R\mathrm{ch}\varphi \end{cases} \tag{1.1.7}$$

双曲复数式(1.1.2)可写成双曲函数和双曲指数形式

$$a=R(\mathrm{ch}\varphi+\mathrm{j}\mathrm{sh}\varphi)=R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{1.1.8}$$

其中，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{j}\varphi)^n}{n!}=\mathrm{ch}\varphi+\mathrm{j}\mathrm{sh}\varphi \tag{1.1.9}$$

而

$$\mathrm{ch}\varphi=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2}=1+\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}+\cdots \tag{1.1.10a}$$

$$\mathrm{sh}\varphi=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2\mathrm{j}}=\varphi+\frac{\varphi^3}{3!}+\cdots \tag{1.1.10b}$$

式(1.1.9)和(1.1.10)称为双曲 Euler 方程。当 $R=1$ 时有关系：

$$\mathrm{ch}^2\varphi-\mathrm{sh}^2\varphi=c^2t^2-r^2=1 \tag{1.1.11}$$

是与式(1.1.5)中的正号相对应的双曲线方程。

规定双曲复数的加法为实部与虚部分别相加，构成新的双曲复数的实部和虚部：