

DA XUE SHU XUE JI CHU

# 大学数学基础

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial u} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + o_1(\rho) \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Delta y + o_1(\rho) \right) + \int \sin^2 x \cos x dx$$

张抱膝 王孝成 朱乃谦

南京大学出版社

# 大学数学基础

张抱膝 王孝成 朱乃谦 编

南京大学出版社

1992·南京

(苏)新登字第 011 号

### 内 容 简 介

本书是非数学专业的数学基础课教材。分空间解析几何,一元函数微分学、多元函数微分学、一元函数积分学、重积分、曲线积分曲面积分、级数、常微分方程、线性代数等 9 章。可在两学期内授完。

本书内容丰富、由浅入深、注意应用,加强数学方法和解题技巧。每章选编大量例题和习题,有利于读者融会贯通,牢固掌握基础理论和方法。

本书可供生物、地学、医学、经济、化学等系科作为教材或教学参考书,也可供工院校,师范院校等有关专业使用。

## 大 学 数 学 基 础

DA XUE SHU XUE JI CHU

张抱膝 王孝成 朱乃谦 编

★  
南京大学出版社出版

(南京大学校内)

江苏省新华书店发行 丹阳新华印刷厂印刷

★  
开本: 850×1168 1/32 印张: 20.25 字数: 526 千

1992 年 9 月第 1 版 1992 年 9 月第 1 次印刷

印数: 1—2000

ISBN 7-305-01539-3/O·81

定价: 6.40 元

## 前 言

本世纪，特别是近三四十年以来，随着人类科学技术突飞猛进的发展，数学和数理技术已渗透到人文、科技和生产等领域，成为这些领域中不可分割的重要组成部分。许多学科，例如生物、医学、经济甚至人文类一些学科，已经从传统的，经典描述性学科逐渐发展成为精确的，定量功能性学科。它们越来越需要依靠数学语言，采用数学方法来作为最有力的工具。这些领域的发展，正在验证着马克思曾经说过的一句话：“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到真正完善的地步。”人们已经把数学对我们社会的贡献比喻为空气和食物对生命的作用。

近十几年来，许多系科就是在这样的形势下，对大学数学基础的要求不断地“应运而生”，“应运而广”。一般地，这些系科总希望在不增加过多的学时基础上，拓宽大学数学基础课程的内容。我们这本教材就是在这样的背景下，针对生物、医学、环境科学、经济管理、化学等系科的要求而产生的。

我们认为，作为基础数学课程，它的主要任务应该是使学生受到较系统的良好数学训练，以便今后掌握其它更高层次的数学理论和方法，跨进有关学科的现代研究领域。因此在编写本教材时，尽量地保持了数学的系统性。另一方面，考虑到这些系科的后续课程的具体情况，将应用性较强的常微分方程、线性代数这两门单独开设的课程，和微积分编在一起，成为一学年完成的大学基础数学教材。特别在常微分方程一章最后，我们增加了“数学模型”一节，以便于学生掌握这一重要的数学方法和工具。为了让学生及时了解数学在有关学科中的作用，我们在教材中适当地增加了一些应用实例。另外，我们还选编了相当数量的例题和习

题，力求由浅入深，有一定层次和梯度，使学生便于融会贯通所学  
知识，掌握数学方法和解题技巧。

我们是在多年教学实践，反复修改讲义的基础上，融合集体的  
智慧而出版这本教材的。在讲义使用的过程中，我们在一年级的  
两个学期中，都是安排每周4学时的讲授和2学时的习题讨论  
课。教学实践表明，虽然教材中增删了部分内容，淡化了常微分  
方程和线性代数的理论部分，但是一般来说，学生的基础扎实，  
教学方法掌握牢固，利于他们学习后续课程，为他们未来在本学  
科的现代研究领域中的工作提供了必要的数学基础理论和方法，  
受到有关各系领导、教师和学生的好评。

本教材的运用面也较广，在使用过程中可以针对有关学科的不  
同情况，抽去部分章节不讲。譬如可以将线积分、面积分一章  
略去等。

由于编者水平有限，在这本教材中难免会存在不少缺点和不  
当之处，敬请使用本书的各位老师与读者给予批评指正。

本书第一、三、五、六、九章由张抱膝编写。第二、四章由  
王孝成编写，第七、八章由朱乃谦编写。由王孝成、朱乃谦二人  
统一协调定稿。林成森、罗亚平老师对本教材给予了热情的支持  
和帮助，提出了许多宝贵的修改意见和十分有益的建议，华茂芬、  
钱四新、尹三洪、赵家祥、张天岭、郭瑞枫、何炳生、黄先华、吴新  
元、江惠坤等老师曾使用过本教材，提出了宝贵的意见；南京大学  
数学系系副主任陈仲给予了热情关心；冯致光教授、金济民副教  
授等学校及有关的系领导对本书的使用、出版给予了极大关怀；  
南京大学出版社对本书的出版给予了极大支持；地球科学系徐富  
林同志为本书精心绘制了插图，编者在此一并表示衷心的感谢。

# 目 录

<b>第一章 空间解析几何</b> .....	1
§1 空间直角坐标系 .....	1
1.1 空间直角坐标系 .....	1
1.2 两点间的距离 .....	2
§2 向量代数 .....	4
2.1 向量的概念 .....	4
2.2 向量的加、减和数乘运算 .....	5
2.3 向量的投影 .....	6
2.4 向量的坐标 .....	8
2.5 向量的方向余弦 .....	10
2.6 向量的数积 .....	12
2.7 向量的矢积 .....	14
2.8 向量的混合积 .....	16
§3 平面和直线 .....	18
3.1 平面的方程 .....	19
3.2 直线的方程 .....	26
3.3 直线与平面的关系 .....	28
§4 二次曲面 .....	32
4.1 球面 .....	33
4.2 柱面 .....	35
4.3 旋转面 .....	37
4.4 锥面 .....	39
4.5 椭球面 .....	40
4.6 单叶双曲面 .....	42
4.7 双叶双曲面 .....	43
4.8 椭圆抛物面 .....	44
4.9 双曲抛物面 .....	45
§5 坐标轴的变换 .....	46

5.1	坐标轴的平移	47
5.2	坐标轴的旋转	48
	习题	50
<b>第二章</b>	<b>一元函数微分学</b>	<b>55</b>
§1	函数	55
1.1	常量与变量	55
1.2	函数概念	56
§2	极限	63
2.1	数列极限	63
2.2	函数的极限	71
§3	极限存在准则·两个重要极限	79
3.1	极限存在的两条准则	79
3.2	两个重要极限	82
§4	无穷大量与无穷小量	88
4.1	无穷大量	88
4.2	无穷小量	89
4.3	无穷小量与无穷大量间的关系	90
4.4	函数(数列)极限的另一表达式	91
4.5	关于无穷小的定理	92
4.6	无穷小量比较	93
§5	函数的连续性	94
5.1	函数连续性定义	94
5.2	函数的间断点	96
5.3	连续函数的基本性质	98
5.4	闭区间上连续函数的性质	99
§6	一元函数的导数及其运算	104
6.1	导数概念	104
6.2	导数的运算法则与基本公式	109
6.3	复合函数的导数	113
6.4	反函数和隐函数的导数	116
6.5	高阶导数	119
6.6	参数方程确定的函数的导数	121
§7	微分及其应用	123

7.1	微分定义	123
7.2	微分的几何意义	126
7.3	微分法则	126
7.4	微分形式不变性	127
7.5	微分在近似计算中的应用	127
7.6	高阶微分	130
§8	中值定理	131
8.1	罗尔定理·中值定理	131
8.2	洛必达(L'Hospital)法则	136
8.3	泰勒公式	141
§9	导数的应用	145
9.1	函数单调增减性的判定法	149
9.2	判别极值的两个充分条件	146
9.3	最大值和最小值	149
9.4	函数的凹性及拐点	150
9.5	函数的渐近线与作图	152
9.6	导数在生物学上的应用之例	153
	习题	155
<b>第三章</b>	<b>多元函数微分学</b>	<b>166</b>
§1	多元函数的极限与连续	166
1.1	二元函数的定义、定义域	166
1.2	二元函数的极限	169
1.3	二元函数的连续性	171
1.4	连续函数的性质	172
§2	偏导数与全微分	173
2.1	偏导数的定义	173
2.2	偏导函数与连续	176
2.3	偏导数的几何意义	176
2.4	全微分的定义	177
2.5	全微分的应用	179
2.6	高阶偏导数	180
§3	复合函数及隐函数的求导	181
3.1	复合函数求导法则	181



3.2 隐函数求导法则	185
§4 偏导数的应用	189
4.1 空间曲线的切线与曲面的切平面	189
4.2 二元函数的泰勒展式	193
4.3 二元函数的极值	196
习题	203
<b>第四章 一元函数积分学</b>	208
§1 不定积分	208
1.1 不定积分的概念与性质	208
1.2 换元积分法	213
1.3 分部积分法	224
1.4 几种特殊类型函数的积分	228
§2 定积分及其应用	241
2.1 定积分概念与性质	241
2.2 定积分的计算	250
2.3 广义积分与 $\Gamma(x)$ 函数	255
2.4 定积分的一般应用	262
习题	278
<b>第五章 重积分</b>	285
§1 二重积分的定义和性质	285
1.1 二重积分的概念	285
1.2 二重积分的性质	288
§2 二重积分的计算和曲面面积	290
2.1 直角坐标系中计算二重积分	290
2.2 极坐标系中计算二重积分	296
2.3 曲面的面积	300
§3 三重积分	303
3.1 三重积分的概念	303
3.2 直角坐标系中三重积分的计算	304
3.3 柱面坐标系中三重积分的计算	306
3.4 球面坐标系中三重积分的计算	309
习题	312
<b>第六章 曲线积分·曲面积分</b>	315

§1 曲线积分 .....	315
1.1 第一型曲线积分 .....	315
1.2 第二型曲线积分 .....	318
§2 格林公式·平面曲线积分与路径无关的条件 .....	323
2.1 格林公式 .....	323
2.2 平面上的曲线积分与路径无关的条件 .....	326
§3 曲面积分 .....	330
3.1 第一型曲面积分 .....	330
3.2 第二型曲面积分 .....	334
§4 高斯公式 .....	339
§5 斯托克斯公式·空间的曲线积分与路径无关的条件 .....	342
5.1 斯托克斯公式 .....	342
5.2 空间曲线积分与路径无关的条件 .....	346
习题 .....	349
<b>第七章 无穷级数</b> .....	<b>353</b>
§1 数项级数 .....	353
1.1 无穷数列与级数 .....	353
1.2 正项级数的敛散性 .....	359
1.3 任意项级数的敛散性 .....	366
§2 幂级数 .....	369
2.1 幂级数的收敛半径 .....	371
2.2 幂级数的运算 .....	375
2.3 函数的幂级数展开式 .....	379
2.4 幂级数的应用 .....	386
§3 傅里叶级数 .....	389
3.1 三角函数的正交性 .....	390
3.2 函数的傅里叶级数 .....	391
3.3 正弦级数与余弦级数 .....	396
3.4 函数在任意区间上的傅里叶级数 .....	400
*§4 函数项级数的一致收敛性 .....	403
习题 .....	413
<b>第八章 微分方程</b> .....	<b>420</b>
§1 基本概念 .....	420

§ 2 一阶微分方程 .....	428
2.1 可分离变量的微分方程 .....	423
2.2 齐次微分方程 .....	427
2.3 一阶线性方程 .....	430
2.4 恰当微分方程 .....	433
2.5 几种特殊类型的高阶方程 .....	436
§ 3 线性方程解的结构 .....	439
§ 4 常系数线性方程 .....	444
4.1 二阶常系数线性齐次方程 .....	444
4.2 二阶常系数线性非齐次方程 .....	448
4.3 欧拉方程 .....	456
4.4 一阶线性方程组 .....	457
4.5 幂级数解法举例 .....	460
§ 5 数学模型简介 .....	462
5.1 一般概念及数学模型的分类 .....	463
5.2 生物群体总数的估计 .....	466
5.3 猎手-食饵系统·捕食模型 .....	468
习题 .....	471
<b>第九章 线性代数</b> .....	<b>477</b>
§ 1 矩阵的定义和运算 .....	477
1.1 矩阵的定义 .....	477
1.2 矩阵的运算和运算规律 .....	480
1.3 矩阵的分块 .....	491
§ 2 方阵的行列式 .....	496
2.1 $n$ 阶行列式的定义 .....	496
2.2 行列式的性质 .....	499
§ 3 线性方程组 .....	516
3.1 克莱姆(Cramer)定理 .....	516
3.2 高斯消元法 .....	521
3.3 矩阵的秩和线性方程组有解判别定理 .....	530
3.4 用行初等变换求矩阵的逆 .....	538
§ 4 $n$ 维向量和向量的线性相关性 .....	542
4.1 $n$ 维向量的定义 .....	542

4.2	向量的线性相关性	544
4.3	齐次线性方程组解的结构	550
§5	矩阵的对角化	555
5.1	相似矩阵	555
5.2	特征值和特征向量	557
5.3	矩阵对角化的条件	563
5.4	矩阵对角化在微分方程组求解中的应用	569
§6	实二次型	573
6.1	正交方阵	573
6.2	实二次型的化简	580
6.3	正定二次型	589
	习题	594
	<b>习题答案</b>	<b>602</b>

# 第一章 空间解析几何

## §1 空间直角坐标系

### 1.1 空间直角坐标系

通过中学的学习，读者已经熟知在建立了平面直角坐标系以后，平面上的点与一个有序实数对 $(x, y)$ 构成了一一对应的关系。从而平面上的一条曲线(平面上满足某个性质的点的轨迹)可以用一个关于 $x, y$ 的方程来表示。平面直角坐标系将几何图形与数量关系之间建立了密切的联系。

为了确定空间一点的位置，仿照平面的情况，我们来建立空间直角坐标系。先取定一点 $O$ (称为原点)，过 $O$ 作三条互相垂直的有向直线 $Ox, Oy, Oz$ (称为坐标轴)，再取定一个量度单位，这样就建立了空间直角坐标系。坐标原点、坐标轴、单位长度是构成坐标系的三要素。通常，取 $Ox$

轴的正方向沿右手握拳方向转

$90^\circ$ 恰到 $Oy$ 轴的正方向时，大

姆指指向 $Oz$ 轴正方向，这就是

右手坐标系。由 $Ox$ 轴和 $Oy$ 轴

决定的平面称为 $xOy$ 平面，同理

有 $xOz$ 平面和 $yOz$ 平面。这三个

平面统称为坐标面，它们将空间

隔成8个部分，称为8个卦限，其编号按 $xOy$ 平面上四个象限的次序，在 $xOy$ 平面上方为1, 2, 3, 4卦限，在 $xOy$ 平面下方的为

5, 6, 7, 8卦限。

设 $M$ 为空间一点，过 $M$ 分别作平面垂直于 $Ox, Oy, Oz$ 轴，

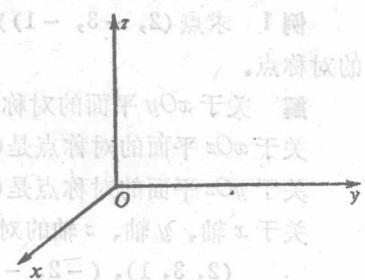


图 1.1

设交点为  $A, B, C$ , 假设  $A$  点在  $Ox$  轴上的坐标为  $x$ ,  $B$  点在  $Oy$  轴的坐标为  $y$ ,  $C$  点在  $Oz$  轴上坐标为  $z$ , 则称有序实数对  $(x, y, z)$  为  $M$  在此坐标系中的坐标(图1.2), 写成  $M(x, y, z)$ . 显然, 坐标系选定后, 空间每一个点在此坐标系中总有三个有序实数  $(x, y, z)$  作为它的坐标; 反之, 给定三个有序实数  $(x, y, z)$ , 在空间总有唯一的点  $M$ , 使  $M$  点的坐标为  $(x, y, z)$ , 所以建立空间直角坐标系后, 空间的点和三个有序实数是一一对应的。

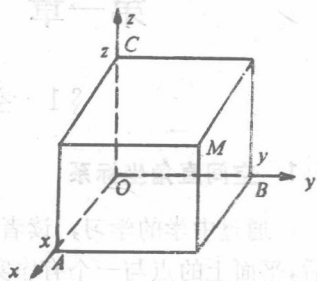


图 1.2

由点的坐标的定义很容易看出, 原点  $O$  的坐标为  $(0, 0, 0)$ ,  $Ox$  轴上的点, 它的  $y$  坐标和  $z$  坐标都为  $0$ , 所以必为  $(x, 0, 0)$ , 同理  $Oy$  轴上点的坐标为  $(0, y, 0)$ ,  $Oz$  轴上点的坐标为  $(0, 0, z)$ . 而  $xOy$  平面上的点, 由于其  $z$  坐标为  $0$ , 所以坐标为  $(x, y, 0)$ , 同理  $xOz$  平面上点的坐标为  $(x, 0, z)$ ,  $yOz$  平面上点的坐标为  $(0, y, z)$  等等, 读者还可以自行寻找在空间 8 个卦限中的点的坐标各具什么特点。

**例 1** 求点  $(2, -3, -1)$  对于各坐标平面、各坐标轴及原点的对称点。

**解** 关于  $xOy$  平面的对称点是  $(2, -3, 1)$ ,

关于  $xOz$  平面的对称点是  $(2, 3, -1)$ ,

关于  $yOz$  平面的对称点是  $(-2, -3, -1)$ 。

关于  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的对称点分别是:

$(2, 3, 1)$ ,  $(-2, -3, 1)$ ,  $(-2, 3, -1)$ 。

关于原点的对称点是  $(-2, 3, 1)$ 。

## 1.2 两点间的距离

设  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  和  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  为空间任意两点, 过  $M_1, M_2$  分别作垂直于坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以  $M_1, M_2$

为对角线的长方体(图 1.3)。根据勾股定理可以证明长方体对角线长度的平方等于它的三条棱的长度的平方和,即

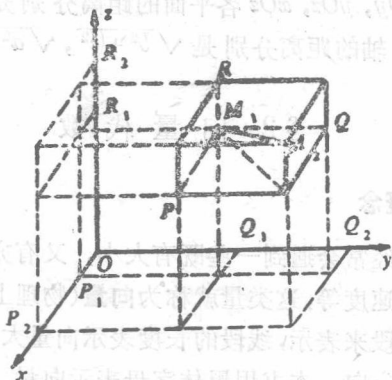


图 1.3

而  $d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2,$

$$|M_1P|^2 = |P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2,$$

$$|M_1Q|^2 = |Q_1Q_2|^2 = (y_2 - y_1)^2,$$

$$|M_1R|^2 = |R_1R_2|^2 = (z_2 - z_1)^2,$$

所以

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式。

特别地, 点  $M(x, y, z)$  与坐标原点  $O(0, 0, 0)$  的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**例 2** 求两点  $(4, -2, 3), (-2, 1, 3)$  的距离。

**解**  $d = \sqrt{(4+2)^2 + (-2-1)^2 + (3-3)^2}$

$$= \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}.$$

**例 3** 已知  $A(4, 1, 7), B(-3, 5, 0)$ , 在  $Oy$  轴上求一点  $M$ , 使  $|MA| = |MB|$ 。

**解** 因为点  $M$  在  $Oy$  轴上, 不妨令其坐标为  $(0, y, 0)$ , 由距离公式可得

$$16 + (y-1)^2 + 49 = 9 + (y-5)^2,$$

解得  $y = -4$ , 故  $M$  点坐标为  $(0, -4, 0)$ 。

例 4 求点  $(a, b, c)$  到各坐标平面和各坐标轴的距离。

解 到  $xOy, yOz, xOz$  各平面的距离分别是  $|c|, |a|, |b|$ ;  
到  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴的距离分别是  $\sqrt{b^2+c^2}, \sqrt{a^2+c^2}, \sqrt{a^2+b^2}$ 。

## §2 向量代数

### 2.1 向量的概念

在物理上经常会遇到一些既有大小, 又有方向的量, 例如力, 位移, 速度, 加速度等, 这类量就称为**向量**(物理上称**矢量**), 几何上通常用有向线段来表示, 线段的长度表示向量大小, 箭头所指的方向表示向量的方向。本书用黑体字母表示向量, 如  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , 书写时用一个带箭头的字母来表示向量, 如  $\vec{A}, \vec{a}, \dots$ 。以  $P_1$  为起点,  $P_2$  为终点的向量用  $\vec{P_1P_2}$  表示。向量的长度也称为向量的**模**, 用  $|\mathbf{A}|, |\mathbf{a}|$  或  $|\vec{P_1P_2}|$  表示向量  $\mathbf{A}, \mathbf{a}$  和  $\vec{P_1P_2}$  的模。

两向量  $\vec{AB}$  和  $\vec{CD}$ , 如果符合以下三个条件就称为相等, 记成  $\vec{AB} = \vec{CD}$ , 即 ①  $\vec{AB}$  与  $\vec{CD}$  的长度相等, ②  $\vec{AB}$  与  $\vec{CD}$  所在的直

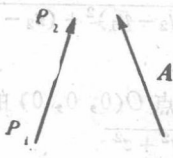


图 1.4

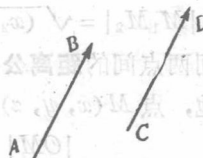


图 1.5

线平行, ③  $\vec{AB}$  与  $\vec{CD}$  指向相同(图1.5), 相等的向量就认为是同一向量, 所以今后向量的位置不再有任何意义, 矢量平行移动后仍为原向量。

模等于 0 的向量称为**零向量**, 记成  $\mathbf{0}$ , 零向量的方向可看作是任意的。

模等于 1 的向量称为**单位向量**。

与向量  $\mathbf{a}$  的模相等、所在的直线相同或平

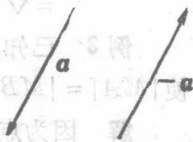


图 1.6



行但指向相反的向量称为  $a$  的负向量, 记作  $-a$  (图1.6).

## 2.2 向量的加、减和数乘运算

因为向量与位置无关, 不妨考虑起点相同的两向量  $\vec{OA}$  和  $\vec{OB}$  的加法运算. 以  $\vec{OA}, \vec{OB}$  为边作平行四边形 (图1.7), 定义对角线  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ .

这是向量加法的平行四边形法则.

显然, 这样定义的加法满足交换律:  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} + \vec{OA}$ . 又  $\vec{OB} = \vec{AC}$ , 所以

由此可得向量加法的三角形法则, 即在第一个向量的终点引第二个向量, 则从第一个向量的起点到第二个向量的终点所得的向量即为两向量的和向量.

如果要求三个矢量之和, 那么可连续使用三角形法则就可得和向量. 由图 1.8 显然可见

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= A+(B+C) \\ &= A+B+C \end{aligned}$$

即向量加法满足结合律.

显然, 三角形法则适用于任意有限个向量的相加, 而且由于交换律和结合律的成立, 使我们可以得到如下的结论, 即以任意次序相继连接向量  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (前一个向量的终点为后一个向量的起点), 那么, 第一个向量的起点到最后一个向量的终点所构成的向量就是它们的和 (图1.9), 由此还可推出, 如果  $n$  个向量相加, 构成封闭折线, 则它们之和为 0.

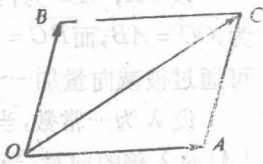


图 1.7

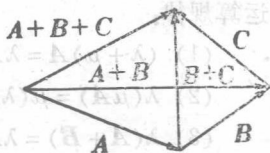


图 1.8

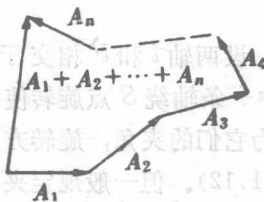


图 1.9

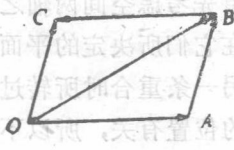


图 1.10