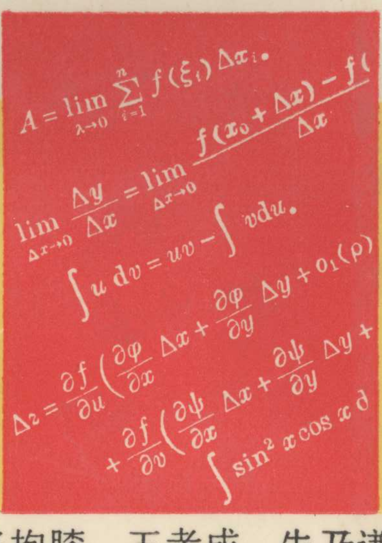
DA XUE SHU XUE JI CHU

大学数学基础



张抱滕　王孝成　朱乃谦

南京大学出版社

大学数学基础

张抱膝 王孝成 朱乃谦 编

南京大学出版社

1992·南京

（苏）新登字第011号

内 容 简 介

本书是非数学专业的数学基础课教材。分空间解析几何，一元函数微分学、多元函数微分学、一元函数积分学、重积分、曲线积分曲面积分、级数、常微分方程、线性代数等9章。可在两学期内授完。

本书内容丰富、由浅入深、注意应用，加强数学方法和解题技巧。每章选编大量例题和习题，有利于读者融会贯通，牢固掌握基础理论和方法。

本书可供生物、地学、医学、经济、化学等系科作为教材或教学参考书，也可供工科院校，师范院校等有关专业使用。

大 学 数 学 基 础
DA XUE SHU XUE JI CHU
张抱膝　王孝成　朱乃谦 编
*
南京大学出版社出版
（南京大学校内）
江苏省新华书店发行　　丹阳新华印刷厂印刷
*
开本：850×1168 1/32　印张：20.25　字数：526千
1992年9月第1版　　1992年9月第1次印刷
印数：1—2000
ISBN 7-305-01539-3/O·81
定价：6.40元

前 言

本世纪，特别是近三四十年以来，随着人类科学技术突飞猛进的发展，数学和数理技术已渗透到人文、科技和生产等领域，成为这些领域中不可分割的重要组成部分。许多学科，例如生物、医学、经济甚至人文类一些学科，已经从传统的，经典描述性学科逐渐发展成为精确的，定量功能性学科。它们越来越需要依靠数学语言，采用数学方法来作为最有力的工具。这些领域的发展，正在验证着马克思曾经说过的一句话："一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到真正完善的地步。"人们已经把数学对我们社会的贡献比喻为空气和食物对生命的作用。

近十几年来，许多系科就是在这样的形势下，对大学数学基础的要求不断地"应运而生"，"应运而广"。一般地，这些系科总希望在不增加过多的学时基础上，拓宽大学数学基础课程的内容。我们这本教材就是在这样的背景下，针对生物、医学、环境科学、经济管理、化学等系科的要求而产生的。

我们认为，作为基础数学课程，它的主要任务应该是使学生受到较系统的良好数学训练，以便今后掌握其它更高层次的数学理论和方法，跨进有关学科的现代研究领域。因此在编写本教材时，尽量地保持了数学的系统性。另一方面，考虑到这些系科的后续课程的具体情况，将应用性较强的常微分方程、线性代数这两门单独开设的课程，和微积分编在一起，成为一学年完成的大学基础数学教材。特别在常微分方程一章最后，我们增加了"数学模型"一节，以便于学生掌握这一重要的数学方法和工具。为了让学生及时了解数学在有关学科中的作用，我们在教材中适当地增加了一些应用实例。另外，我们还选编了相当数量的例题和习

题，力求由浅入深，有一定层次和梯度，使学生便于融会贯通所学知识，掌握数学方法和解题技巧。

我们是在多年教学实践，反复修改讲义的基础上，融合集体的智慧而出版这本教材的。在讲义使用的过程中，我们在一年级的两个学期中，都是安排每周4学时的讲授和2学时的习题讨论课。教学实践表明，虽然教材中增删了部分内容，淡化了常微分方程和线性代数的理论部分，但是一般来说，学生的基础扎实，数学方法掌握牢固，利于他们学习后续课程，为他们未来在本学科的现代研究领域中的工作提供了必要的数学基础理论和方法，受到有关各系领导、教师和学生的好评。

本教材的运用面也较广，在使用过程中可以针对有关学科的不同情况，抽去部分章节不讲。譬如可以将线积分、面积分一章略去等。

由于编者水平有限，在这本教材中难免会存在不少缺点和不当之处，敬请使用本书的各位老师与读者给予批评指正。

本书第一、三、五、六、九章由张抱滕编写。第二、四章由王孝成编写，第七、八章由朱乃谦编写。由王孝成、朱乃谦二人统一协调定稿。林成森、罗亚平老师对本教材给予了热情的支持和帮助，提出了许多宝贵的修改意见和十分有益的建议，华茂芬、钱四新、尹三洪、赵家祥、张天岭、郭瑞枫、何炳生、黄先华、吴新元、江惠坤等老师曾使用过本教材，提出了宝贵的意见；南京大学数学系系副主任陈仲给予了热情关心；冯致光教授、金济民副教授等学校及有关的系领导对本书的使用、出版给予了极大关怀；南京大学出版社对本书的出版给予了极大支持；地球科学系徐富林同志为本书精心绘制了插图；编者在此一并表示衷心的感谢。

目　录

第一章　空间解析几何

§1　空间直角坐标系

1.1　空间直角坐标系

通过中学的学习，读者已经熟知在建立了平面直角坐标系以后，平面上的点与一个有序实数对(x,y)构成了一一对应的关系。从而平面上的一条曲线（平面上满足某个性质的点的轨迹）可以用一个关于x,y的方程来表示。平面直角坐标系将几何图形与数量关系之间建立了密切的联系。

为了确定空间一点的位置，仿照平面的情况，我们来建立空间直角坐标系。先取定一点O（称为**原点**），过O作三条互相垂直的有向直线Ox，Oy，Oz（称为**坐标轴**），再取定一个量度单位，这样就建立了**空间直角坐标系**。**坐标原点**、**坐标轴**、**单位长度**是构成坐标系的三要素。通常，取Ox轴的正方向沿右手握拳方向转$90°$恰到Oy轴的正方向时，大姆指指向Oz轴正方向，这就是**右手坐标系**。由Ox轴和Oy轴决定的平面称为xOy平面，同理有xOz平面和yOz平面。这三个平面统称为**坐标面**，它们将空间隔成8个部分，称为8个**卦限**，其编号按xOy平面上四个象限的次序，在xOy平面上方为1，2，3，4卦限，在xOy平面下方的为5，6，7，8卦限。

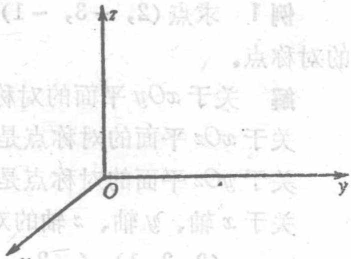


图 1.1

设M为空间一点，过M分别作平面垂直于Ox，Oy，Oz轴，

设交点为 A, B, C, 假设 A 点在 Ox 轴上的坐标为 x, B 点在 Oy 轴的坐标为 y, C 点在 Oz 轴上坐标为 z, 则称有序实数对 (x, y, z) 为 M 在此坐标系中的**坐标**(图1.2), 写成 $M(x, y, z)$. 显然, 坐标系选定后, 空间每一个点在此坐标系中总有三个有序实数 (x,y,z) 作为它的坐标; 反之, 给定三个有序实数 (x,y,z), 在空间总有唯一的点 M, 使 M 点的坐标为 (x, y, z), 所以建立空间直角坐标系后, 空间的点和三个有序实数是一一对应的。

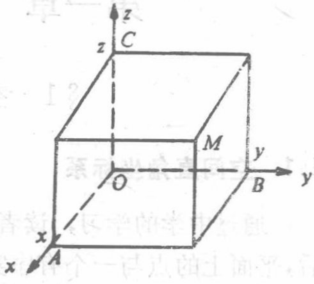


图 1.2

由点的坐标的定义很容易看出, 原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$, Ox 轴上的点, 它的 y 坐标和 z 坐标都为 0, 所以必为 $(x, 0, 0)$, 同理 Oy 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$, Oz 轴上点的坐标为 $(0, 0, z)$。而 xOy 平面上的点, 由于其 z 坐标为 0, 所以坐标为 $(x, y, 0)$, 同理 xOz 平面上点的坐标为 $(x, 0, z)$, yOz 平面上点的坐标为 $(0, y, z)$ 等等, 读者还可以自行寻找在空间 8 个卦限中的点的坐标各具什么特点。

例 1 求点 $(2, -3, -1)$ 对于各坐标平面、各坐标轴及原点的对称点。

解 关于 xOy 平面的对称点是 $(2, -3, 1)$,

关于 xOz 平面的对称点是 $(2, 3, -1)$,

关于 yOz 平面的对称点是 $(-2, -3, -1)$。

关于 x 轴、y 轴、z 轴的对称点分别是:

$$(2, 3, 1), (-2, -3, 1), (-2, 3, -1).$$

关于原点的对称点是 $(-2, 3, 1)$。

1.2 两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间任意两点, 过 M_1, M_2 分别作垂直于坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1, M_2

为对角线的长方体(图 1.3)。根据勾股定理可以证明长方体对角线长度的平方等于它的三条棱的长度的平方和，即

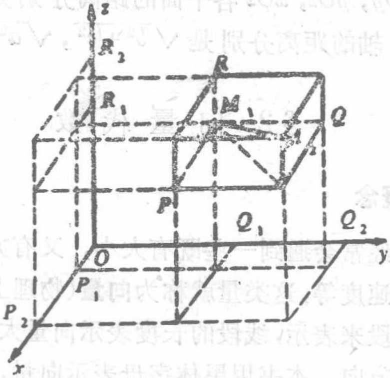


图 1.3

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2,$$

而

$$|M_1P|^2=|P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2,$$

$$|M_1Q|^2=|Q_1Q_2|^2=(y_2-y_1)^2,$$

$$|M_1R|^2=|R_1R_2|^2=(z_2-z_1)^2,$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的**距离公式**。

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 2 求两点(4，−2，3)，(−2，1，3)的距离。

解 $d=\sqrt{(4+2)^2+(-2-1)^2+(3-3)^2}$

$=\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$.

例 3 已知 $A(4,1,7)$，$B(-3,5,0)$，在 Oy 轴上求一点 M，使 $|MA|=|MB|$。

解 因为点 M 在 Oy 轴上，不妨令其坐标为 $(0,y,0)$，由距离公式可得

$$16+(y-1)^2+49=9+(y-5)^2,$$

解得 $y=-4$，故 M 点坐标为 $(0,-4,0)$。

例 4 求点 (a,b,c) 到各坐标平面和各坐标轴的距离。

解 到 xOy, yOz, xOz 各平面的距离分别是 $|c|$, $|a|$, $|b|$；到 x 轴，y 轴，z 轴的距离分别是 $\sqrt{b^2+c^2}$，$\sqrt{a^2+c^2}$，$\sqrt{a^2+b^2}$。

§2 向量代数

2.1 向量的概念

在物理上经常会遇到一些既有大小，又有方向的量，例如力，位移，速度，加速度等，这类量就称为**向量**(物理上称**矢量**)，几何上通常用有向线段来表示，线段的长度表示向量大小，箭头所指的方向表示向量的方向。本书用黑体字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 书写时用一个带箭头的字母来表示向量，如 $\vec{A}$, $\vec{a}$, …。以 P_1 为起点，P_2 为终点的向量用 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 表示。向量的长度也称为向量的**模**，用 $|\boldsymbol{A}|$, $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ 表示向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{a}$ 和 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模。

两向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$，如果符合以下三个条件就称为相等，记成 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，即 ① $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的长度相等，② $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 所在的直

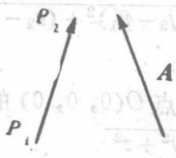


图 1.4

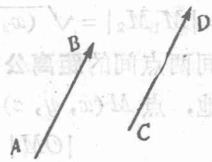


图 1.5

线平行，③ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 指向相同(图1.5)，相等的向量就认为是同一向量，所以今后向量的位置不再有任何意义，矢量平行移动后仍为原向量。

图 1.6

模等于 0 的向量称为**零向量**，记成 $\boldsymbol{0}$，零向量的方向可看作是任意的。

模等于 1 的向量称为**单位向量**。

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等、所在的直线相同或平

行但指向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$(图1.6)。

2.2 向量的加、减和数乘运算

因为向量与位置无关，不妨考虑起点相同的两向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的加法运算。以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 为边作平行四边形(图1.7)，定义对角线 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$。这是向量加法的**平行四边形法则**。

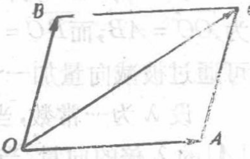


图 1.7

显然，这样定义的加法满足交换律：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$。又 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，所以由此可得向量加法的**三角形法则**，即在第一个向量的终点引第二个向量，则从第一个向量的起点到第二个向量的终点所得的向量即为两向量的和向量。

如果要求三个矢量之和，那么可连续使用三角形法则就可得和向量。由图 1.8 显然可见

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$
$$=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$$

即向量加法满足结合律。

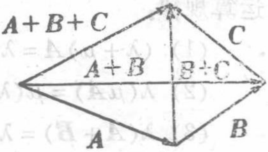


图 1.8

显然，三角形法则适用于任意有限个向量的相加，而且由于交换律和结合律的成立，使我们可以得到如下的结论，即以任何次序相继连接向量 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n$（前一个向量的终点为后一个向量的起点)，那么，第一个向量的起点到最后一个向量的终点所构成的向量就是它们的和(图1.9)，由此还可推出，如果 n 个向量相加，构成封闭折线，则它们之和为 0。

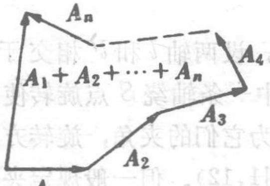


图 1.9

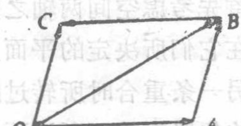


图 1.10