

642974

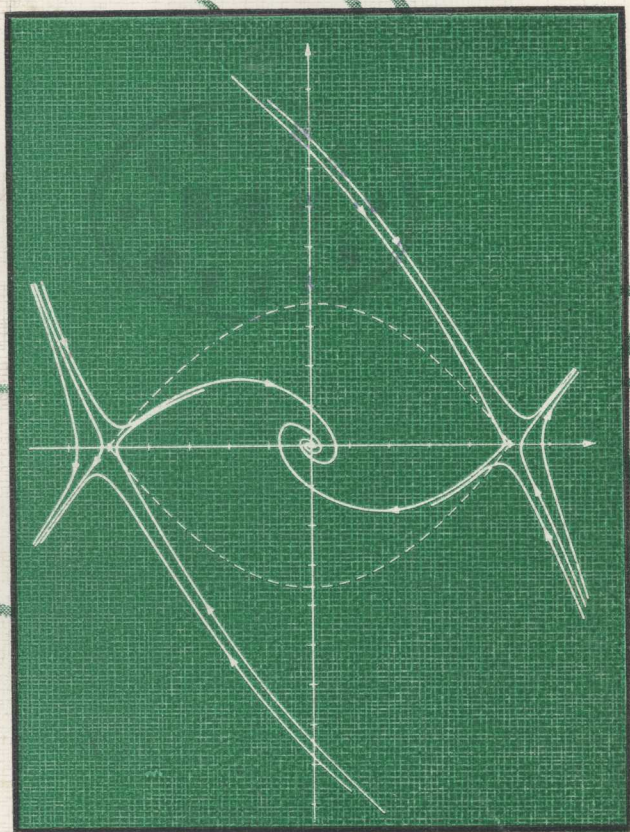
高等工程數學

綱要及題解

第四冊

編著者

劉偉源 傅光華



東華書局印行

高等工程數學

綱要及題解

(題解部份完全照 1979

Erwin Kreyszig 第四版)

第 四 冊

編 著 者

劉 偉 源 傅 光 華

私立大同工學院教授



東華書局印行



版權所有・翻印必究

中華民國七十一年四月初版

大專
用書 **高等工程數學綱要及題解**

(全四冊)

第四冊 定價 新臺幣壹百元整

(外埠酌加運費滙費)

編著者 劉偉源 傅光華

發行人 卓 鑫 森

出版者 臺灣東華書局股份有限公司

臺北市博愛路一〇五號

電話：3819470 郵撥：6481

印刷者 合興印刷廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

(71022)

前 言

國內大學工程學系的工程數學教本，一向超越大二學生的程度。以各工程學系作為教本最多的二種高等工程數學（Advanced Engineering Mathematics—由 Kreyszig 或由 Wiley 所著）來說，在美國都是用來作大四或研究所一年級的教本。因此，對剛接觸工程學系必修學科的一般二年級學生而言，頗不易接受，即使接受了也不知有何應用之感。

編者有鑑於此，乃決定將高等工程數學分為四個部分，依專業學科之由淺入深，予以適當配合。由於電算科技之日新月異，故在適當處配合電算分析，使內容不限於傳統上的範圍。

本書在基本架構上，第一部分為常微分方程式及其相關問題；包括了基本常微分方程式、聯立常微分方程式、冪級數法、拉普拉斯轉變式、電算分析法、變分法簡介、以及非線性常微分方程式之介紹。第二部分有向量分析、線性代數、張量分析、及微分幾何等之簡介。第三部分為偏微分方程式。除了基本型態之偏微分方程式外，還包括了各種積分式之轉變式方法；如拉普拉斯轉變式、傅利葉轉變式等應用於偏微分方程中。此外，尚含有圖形轉變、及電算分析各一章。第四部分是複變函數及其相關課題；含複變數基本性質、複變函數之各種性質、基本與特殊型態之圖形轉變方法及應用等。

本書採用出版書局之意見，將 Erwin Kreyszig 所著高等工程數學第四版之全部習題及詳解按原書之順序列於書後，便於讀者研究複習。

本書內容雖力求直接明白之表示方式，唯編者才疏學淺，疏漏之處在所難免，尚祈學界先進及讀者諸君不吝指正。

本書得以順利編定承系內王明庸老師的幫忙，並承東華書局之全力支持，特此誌謝。

編者謹識

民國七十年五月

目 次

綱 要

第十六章 泰勒與勞倫級數..... 3 ~ 10

16-1 泰勒級數及馬克勞林級數 16-2 勞倫級數

第十七章 餘數與極點及其應用..... 11 ~ 46

17-1 餘數 17-2 餘數定理 17-3 函數之主部

17-4 極 17-5 解析函數之商式

17-6 Improper 實積分之求法

17-7 三角函數的定積分 17-8 繞分枝點之積分

17-9 $\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \bar{f}(s) \cdot e^{st} ds$ 之求法

第十八章 Schwarz-Christoffel 的轉換及其應用..... 47 ~ 67

18-1 基本理論 18-2 三角形與四方形之轉變

18-3 應 用

第十九章 轉變方法簡介..... 68 ~ 138

19-1 方程式轉變方法之目的 19-2 拉普拉斯變換式在偏微分方

程式上之應用 19-3 定限正弦轉變法 19-4 定限餘弦轉變法

19-5 傅立葉轉變式之性質與應用 19-6 傅立葉正、餘弦轉變式

19-7 漢可轉變式之性質及其應用 19-8 相似形轉變

第二十章 概率及統計學..... 139 ~ 224

20-1 數學統計之性質及目的 20-2 樣本之表列及圖示法

20-3	樣本均值及樣本方差	20-4	隨機實驗、結果、事件
20-5	概 率	20-6	排列及組合
20-7	隨機變數、離散及連續分佈	20-8	分佈的均值及方差
20-9	二項式、波義生、及超幾何分佈	20-10	常態分佈
20-11	多個隨機變數之分佈	20-12	隨機抽樣，隨機數
20-13	參數的估計	20-14	置信區間
20-15	假設之檢驗、判定	20-16	品質管制
20-17	接受抽樣	20-18	配合之適度， χ^2 -檢驗
20-19	非參量性檢驗	20-20	成對測量、配合直線

附錄 A ~ 附錄 C

附錄 A	拉普拉斯轉換表	225 ~ 236
附錄 B-1	修正貝索方程式及修正貝索函數	237
附錄 B-2	拉今達微分方程式及拉今達函數	243
附錄 B-3	拉貴爾微分方程式	249
附錄 C-1	聯立代數方程式	251
附錄 C-2	最小誤差平方法之一般式	259
附錄 C-3	史判曲線求法	265

習題及解答

第十六章	級數，泰勒級數，勞倫級數	273 ~ 328
16.1	冪級數	273
16.2	以冪級數表示之函數	279
16.4	基本函數之泰勒級數	283
16.5	求冪級數之實用方法	292
16.6	一致收斂	302
16.7	勞倫級數	310
16.8	在無限遠處之解析性，零點與奇點	321

第十七章	剩值積分法	329 ~ 368
17.1	剩 值	329
17.2	剩值定理	337
17.3	實變積分之求法	346
17.4	其他的實變積分型式	361
第十八章	複變解析函數與位勢理論	329 ~ 368
18.1	靜電場	369
18.2	兩度空間之流體運動	373
18.3	諧和函數之一般性質	382
18.4	波義生積分公式	383
第十九章	數值分析	397 ~ 524
19.1	誤差和錯誤，自動計算機	397
19.2	用疊代法解方程式	400
19.3	有限差分	411
19.4	插值法	417
19.5	線 規	472
19.6	數值積分與微分	434
19.7	首階微分方程式之數值解法	446
19.8	二階微分方程式之數值解法	460
19.9	線性方程式系統，高斯消去法	469
19.10	線性方程式系統，以疊代法求解	475
19.11	線性方程式系統，情況欠妥	484
19.12	最小二乘方法	490
19.13	矩陣特值之容限	500
19.14	利用疊代法以決定特值	505
19.15	漸近展開式	514
第二十章	概率及統計學	525 ~ 637

20.2	樣品之表列及圖示法	525
20.3	樣品均值及樣品方差	537
20.4	隨機實驗，結果，事件	543
20.5	概 率	547
20.6	排列及組合	551
20.7	隨機變數，離散及連續分佈	557
20.8	分佈之均值及方差	565
20.9	二項式，波義生，及超比分佈	575
20.10	正規分佈	584
20.11	多個隨機變數之分佈	591
20.12	隨機抽樣，隨機數	597
20.13	參數之估計	599
20.14	置信曲間	603
20.15	假設之檢驗，判定	609
20.16	品質管制	616
20.17	接受抽樣	620
20.18	配合之適度， χ^2 -檢驗	625
20.19	非參量性檢驗	630
20.20	成對度量，配合直線	633

網 要 部 份

71.211055
3

第十六章 泰勒與勞倫級數

16-1 泰勒級數 (Taylor Series) 及馬克勞林級數 (Maclaurin Series)

【定理】 在以 z_0 為圓心， r_0 為半徑的圓 C_0 內， f 皆為解析函數，則在 C_0 內任意一點 z

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots$$

此冪級數收斂成 $f(z)$ 只要 $|z - z_0| < r_0$ 。

要證明此定理，令 z 為圓 C_0 內之固定點， $|z - z_0| = r < r_0$ ，再令 S 為在以 z_0 為圓心，半徑為 r_1 之圓上 ($r < r_1 < r_0$)，則 $|s - z_0| = r_1$ 如左圖所示。

由於 z 在 C_1 圓內，而 f 在此圓內及圓上皆為解析函數，根據 Cauchy 積分公式

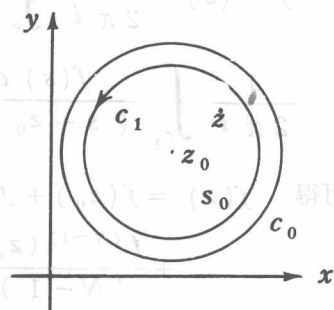


圖 16-1

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s) ds}{s - z}$$

$$\text{由 } \frac{1}{s - z} = \frac{1}{(s - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{s - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{s - z_0}}$$

及若 α 為不等於 1 之任何其他的複數

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{N-1} + \frac{\alpha^N}{1-\alpha},$$

$$\text{則 } \frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0} \cdot \left[1 + \frac{z-z_0}{s-z_0} + \cdots + \left(\frac{z-z_0}{s-z_0} \right)^{N-1} + \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}} \left(\frac{z-z_0}{s-z_0} \right)^N \right],$$

$$\text{因此 } \frac{f(s)}{s-z} = \frac{f(s)}{s-z_0} + \frac{f(s)}{(s-z_0)^2} (z-z_0) + \cdots + \frac{f(s)}{(s-z_0)^N} (z-z_0)^{N-1} + (z-z_0)^N \frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^N}$$

將上式中之每一項沿 c_1 積分之，除以 $2\pi i$ ，並由

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(s) ds}{(s-z)^{n+1}},$$

$$\text{得 } \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(s) ds}{(s-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

$$\text{因此可得 } f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!} (z-z_0)^{N-1} + R_N(z)$$

$$\text{而 } R_N(z) = \frac{(z-z_0)^N}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(s) ds}{(s-z)(s-z_0)^N}$$

$$\text{因為 } |z-z_0| = r \text{ 及 } |s-z_0| = r_1, \text{ 得 } |s-z| \geq |s-z_0| - |z-z_0| = r_1 - r$$

設 M 為 $f(s)$ 在 c_1 上之最大值，則

$$|R_N(z)| \leq \frac{r^N}{2\pi} \cdot \frac{M 2\pi r_1}{(r_1 - r) r_1^N} = \frac{M r_1}{r_1 - r} \left(\frac{r}{r_1}\right)^N$$

但 $\frac{r}{r_1} < 1$ ，因此 $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(z) = 0$

因此在 c_0 內之每一個點 z ，只要 N 趨近於無限大，則此級數之前 N 項足以代表 $f(z)$ 。而 f 在 c_0 內可以表示成泰勒級數

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$|z - z_0| < r_0$$

如果 $z_0 = 0$ ，則化簡成馬克勞林級數 (Maclaurin series)：

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad |z| < r_0$$

考慮 $f(z) = e^z$ ， $f'(z) = e^z$ ， $f''(z) = e^z$ ， $\dots$ ， $f^{(n)}(z) = e^z$ ， $\dots$
且 $f^{(n)}(0) = 1$ ，由於 e^z 是一解析函數， $|z| < \infty$ ，所以

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty$$

如果 z 是實數， $z = x$ ，則得

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

【例題 1】以馬克勞林級數表示 ① $f(z) = \sin z$ ，② $f(z) = \cos z$ ，
 $|z| < \infty$ 。

【解】 ① $f(z) = \sin z$ ， $f'(z) = \cos z$ ， $f''(z) = -\sin z$
 $f'''(z) = -\cos z$ ， $f^{(4)}(z) = \sin z$ ， $\dots$

其通式爲

$$f^{(n)}(z) = \begin{cases} \sin z, & n = 0, 4, 8, \dots \\ \cos z, & n = 1, 5, 9, \dots \\ -\sin z, & n = 2, 6, 10, \dots \\ -\cos z, & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

$$\therefore f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 0, 4, 8, \dots \\ 1, & n = 1, 5, 9, \dots \\ 0, & n = 2, 6, 10, \dots \\ -1, & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

$$\therefore \sin z = \frac{1}{1!} z' + \frac{(-1)}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \frac{(-1)}{7!} z^7 + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad |z| < \infty$$

⑤ $f(z) = \cos z, f'(z) = -\sin z, f''(z) = -\cos z,$
 $f'''(z) = \sin z, f^{(4)}(z) = \cos z, \dots$

其通式爲

$$f^{(n)}(z) = \begin{cases} \cos z, & n = 0, 4, 8, \dots \\ -\sin z, & n = 1, 5, 9, \dots \\ -\cos z, & n = 2, 6, 10, \dots \\ \sin z, & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

$$\therefore f^{(n)}(0) = \begin{cases} +1, & n = 0, 4, 8, \dots \\ 0, & n = 1, 3, 5, 7, \dots \\ -1, & n = 2, 6, 10, \dots \end{cases}$$

$$\cos z = 1 + \frac{(-1)}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \frac{(-1)}{6!} z^6 + \frac{1}{8!} z^8 + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty$$

其他可以用馬克勞林級數表示的有

$$\sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad |z| < \infty$$

$$\cosh z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1$$

16-2 勞倫級數

由 z 之正整數幂與負整數幂所成的級數

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

考慮兩同心圓 c_1 與 c_2 ， c_1 為 $|z - z_0| = r_1$ ， c_2 為 $|z - z_0| = r_2 < r_1$ ，如圖二所示。

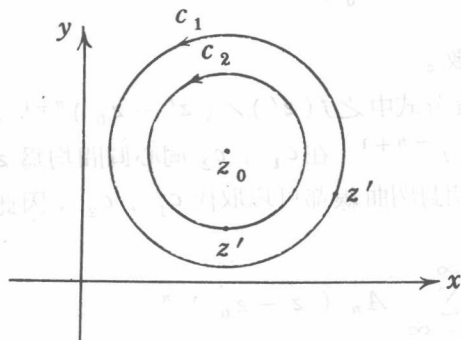


圖 16-2

z' 表示在 c_1 或 c_2 上之任何點。

要證明下述之定理：

【定理】若 f 在 c_1 及 c_2 上，及在 c_1 與 c_2 間之空間內皆為解析函數，則在 c_1 ， c_2 間之任何一點 z ， $f(z)$ 可表示成一收斂級數具有正與負整數幕之 $(z - z_0)$ 項。

$$(1) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

$$(2) a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(3) b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

積分式之積分方向為正方向（逆時針方向）。

(1)(2)(3)合稱 Laurent 級數。

如果 f 在 c_1 及 c_1 內除 z_0 點之外皆為解析，則 r_2 可縮小至任意小的值，則 $0 < |z - z_0| < r_1$ 時 (1) 成立。

若 f 在 c_1 及 c_1 皆為解析， $f'(z) / (z' - z_0)^{-n+1}$ 在 c_2 上及 c_2 內為 z' 之解析函數，由於 $-n + 1 \leq 0$ ，則

$$\int_{c_2} \frac{f'(z) dz}{(z' - z_0)^{-n+1}} = 0, \quad \text{即 } b_n = 0$$

則級數成為泰勒級數。

由於 (2) 與 (3) 積分式中之 $f(z') / (z' - z_0)^{n+1}$ ， $f(z') / (z' - z_0)^{-n+1}$ 在 c_1 ， c_2 同心圓間均為 z' 之解析函數，則介於兩者間之任何一個封閉曲線都可以取代 c_1 ， c_2 ，因此 Laurent 級數可表示成

$$(4) f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n,$$

$$(r_2 < |z - z_0| < r_1)$$

$$(5) \quad A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

由 Cauchy 積分公式得

$$(6) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(z') dz'}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(z') dz'}{z' - z},$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \frac{1}{z' - z} &= \frac{1}{(z' - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{z' - z_0} + \frac{z - z_0}{(z' - z_0)^2} + \dots + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(z' - z_0)^n} \\ &\quad + \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^n (z' - z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{及 } \frac{-1}{z' - z} &= \frac{1}{(z - z_0) - (z' - z_0)} \\ &= \frac{1}{z - z_0} + \frac{z' - z_0}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{(z' - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} \\ &\quad + \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z_0)^n (z - z')} \end{aligned}$$

因此由 (6) 得

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \\ &\quad + a_{n-1} (z - z_0)^{n-1} + R_n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} \\ &\quad + \dots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + Q_n \end{aligned}$$

a_n 與 b_n 即 (2) 與 (3) 所示, 而 R_n 與 Q_n 爲