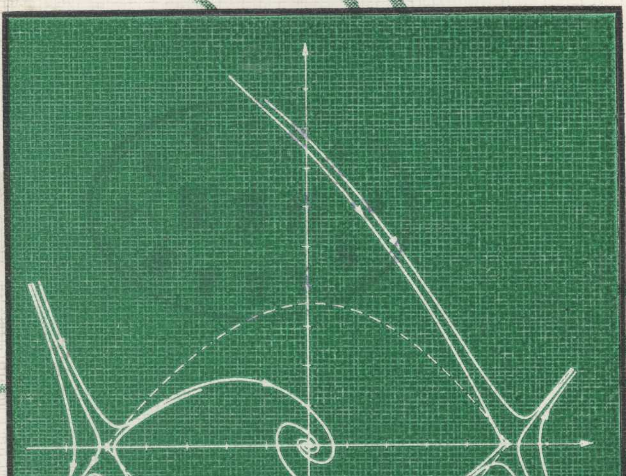
高等工程數學

綱要及題解

第四冊

編著者
劉偉源 傅光華



東華書局印行

高等工程數學
綱要及題解

（題解部份完全照 **1979**
Erwin Kreyszig 第四版）

第 四 冊

編 著 者

劉 偉 源 傅 光 華

私立大同工學院教授

東華書局印行

中華民國七十一年四月初版

大專用書 高等工程數學綱要及題解

（全四册）

第四册　定價　新臺幣壹百元整

（外埠酌加運費滙費）

編著者	劉偉源　傅光華
發行人	卓鑫淼
出版者	臺灣東華書局股份有限公司 臺北市博愛路一〇五號 電話：3819470　郵撥：6481
印刷者	合興印刷廠

行政院新聞局登記證　局版臺業字第零柒貳伍號

（71022）

前　言

國內大學工程學系的工程數學教本，一向超越大二學生的程度。以各工程學系作爲教本最多的二種高等工程數學（Advanced Engineering Mathematics－由Kreyszig或由Wiley 所著）來說，在美國都是用來作大四或研究所一年級的教本。因此，對剛接觸工程學系必修學科的一般二年級學生而言，頗不易接受，即使接受了也不知有何應用之感。

編者有鑑於此，乃決定將高等工程數學分爲四個部分，依專業學科之由淺入深，予以適當配合。由於電算科技之日新月異，故在適當處配合電算分析，使內容不限於傳統上的範圍。

本書在基本架構上，第一部分爲常微分方程式及其相關問題；包括了基本常微分方程式、聯立常微分方程式、冪級數法、拉普拉斯轉變式、電算分析法、變分法簡介、以及非線性常微分方程式之介紹。第二部分有向量分析、線性代數、張量分析、及微分幾何等之簡介。第三部分爲偏微分方程式。除了基本型態之偏微分方程式外，還包括了各種積分式之轉變式方法；如拉普拉斯轉變式、傅利葉轉變式等應用於偏微分方程中。此外，尙含有圖形轉變、及電算分析各一章。第四部分是複變函數及其相關課題；含複變數基本性質、複變函數之各種性質、基本與特殊型態之圖形轉變方法及應用等。

本書採用出版書局之意見，將 Erwin Kreyszig 所著高等工程數學第四版之全部習題及詳解按原書之順序列於書後，便於讀者研究複習。

本書內容雖力求直接明白之表示方式，唯編者才疏學淺，疏漏之處在所難免，尙祈學界先進及讀者諸君不吝指正。

本書得以順利編定承系內王明庸老師的幫忙，並承東華書局之全力支持，特此誌謝。

編者謹識

民國七十年五月

目　次

綱　要

附錄A ～ 附錄C

習題及解答

綱 要 部 份

71.211055
3

第十六章　泰勒與勞倫級數

16-1　泰勒級數 (Taylor Series) 及馬克勞林級數 (Maclaurin Series)

【定理】　在以 z_0 爲圓心，r_0 爲半徑的圓 C_0 內，f 皆爲解析函數，則在 C_0 內任意一點 z

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots$$

此冪級數收斂成 $f(z)$ 只要 $|z-z_0|<r_0$。

要證明此定理，令 z 爲圓 C_0 內之固定點，$|z-z_0|=r<r_0$，再令 S 爲在以 z_0 爲圓心，半徑爲 r_1 之圓上 ($r<r_1<r_0$)，則 $|s-z_0|=r_1$ 如左圖所示。

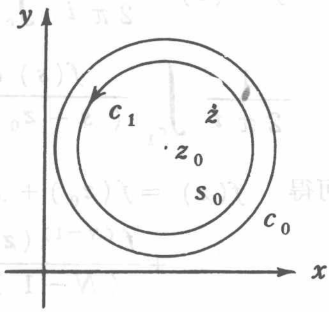


圖 16-1

由於 z 在 C_1 圓內，而 f 在此圓內及圓上皆爲解析函數，根據 Cauchy 積分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{s-z}$$

由 $$\frac{1}{s-z}=\frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{s-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{s-z_0}}$$

及若 α 爲不等於 1 之任何其他的複數

$$\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{N-1}+\frac{\alpha^N}{1-\alpha},$$

則 $$\frac{1}{s-z}=\frac{1}{s-z_0}\cdot\left[1+\frac{z-z_0}{s-z_0}+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{N-1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{s-z_0}}\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^N\right],$$

因此 $$\frac{f(s)}{s-z}=\frac{f(s)}{s-z_0}+\frac{f(s)}{(s-z_0)^2}(z-z_0)+\cdots$$

$$+\frac{f(s)}{(s-z_0)^N}(z-z_0)^{N-1}$$

$$+(z-z_0)^N\frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^N}$$

將上式中之每一項沿 c_1 積分之，除以 $2\pi i$ ，並由

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c\frac{f(s)\,ds}{(s-z)^{n+1}},$$

得 $$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{n+1}}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),$$

因此可得 $$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\cdots$$

$$+\frac{f^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!}(z-z_0)^{N-1}+R_N(z)$$

而 $$R_N(z)=\frac{(z-z_0)^N}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)\,ds}{(s-z)(s-z_0)^N}$$

因為 $|z-z_0|=r$ 及 $|s-z_0|=r_1$，得

$$|s-z|\geqq|s-z_0|-|z-z_0|=r_1-r$$

設 M 為 $f(s)$ 在 c_1 上之最大值，則

$$|R_N(z)| \leqq \frac{r^N}{2\pi} \cdot \frac{M\,2\pi r_1}{(r_1-r)\,r_1^N} = \frac{M r_1}{r_1-r}\left(\frac{r}{r_1}\right)^N$$

但$\dfrac{r}{r_1} < 1$，因此 $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(z) = 0$

因此在 c_0 內之每一個點z，只要N趨近於無限大，則此級數之前N項足以代表$f(z)$。而f在c_0內可以表示成泰勒級數

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$|z - z_0| < r_0$$

如果$z_0 = 0$，則化簡成馬克勞林級數（Maclaurin series）：

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad , \quad |z| < r_0$$

考慮$f(z) = e^z$，$f'(z) = e^z$，$f''(z) = e^z$，…，$f^{(n)}(z) = e^z$，…且$f^{(n)}(0) = 1$，由於e^z是一解析函數，$|z| < \infty$，所以

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad , \quad |z| < \infty$$

如果z是實數，$z = x$，則得

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

【例題 1】 以馬克勞林級數表示ⓐ $f(z) = \sin z$，ⓑ $f(z) = \cos z$，$|z| < \infty$。

【解】 ⓐ $f(z) = \sin z$ ， $f'(z) = \cos z$ ，$f''(z) = -\sin z$

$f'''(z) = -\cos z$ ， $f^{(4)} = \sin z$，…，

其通式爲

$$f^{(n)}(z)=\begin{cases}\sin z & , \quad n=0,4,8,\cdots\\ \cos z & , \quad n=1,5,9,\cdots\\ -\sin z & , \quad n=2,6,10,\cdots\\ -\cos z & , \quad n=3,7,11,\cdots\end{cases}$$

$$\therefore \quad f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & , \quad n=0,4,8,\cdots\\ 1 & , \quad n=1,5,9,\cdots\\ 0 & , \quad n=2,6,10,\cdots\\ -1 & , \quad n=3,7,11,\cdots\end{cases}$$

$$\therefore \quad \sin z=\frac{1}{1\,!}z'+\frac{(-1)}{3\,!}z^3+\frac{1}{5\,!}z^5+\frac{(-1)}{7\,!}z^7+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)\,!} \quad , \quad |z|<\infty$$

ⓑ $f(z)=\cos z$, $f'(z)=-\sin z$, $f''(z)=-\cos z$, $f'''(z)=\sin z$, $f^{(4)}=\cos z$, $\cdots$

其通式爲

$$f^{(n)}(z)=\begin{cases}\cos z & , \quad n=0,4,8,\cdots\\ -\sin z & , \quad n=1,5,9,\cdots\\ -\cos z & , \quad n=2,6,10,\cdots\\ \sin z & , \quad n=3,7,11,\cdots\end{cases}$$

$$\therefore \quad f^{(n)}(0)=\begin{cases}+1 & , \quad n=0,4,8,\cdots\\ 0 & , \quad n=1,3,5,7,\cdots\\ -1 & , \quad n=2,6,10,\cdots\end{cases}$$

$$\cos z=1+\frac{(-1)}{2\,!}z^2+\frac{1}{4\,!}z^4+\frac{(-1)}{6\,!}z^6+\frac{1}{8\,!}z^8+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)\,!} \quad , \quad |z|<\infty$$

其他可以用馬克勞林級數表示的有

$$\sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad , \quad |z| < \infty$$

$$\cosh z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad |z| < \infty$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad , \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad , \quad |z| < 1$$

16-2 勞倫級數

由 z 之正整數冪與負整數冪所成的級數

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \quad ,$$

考慮兩同心圓 c_1 與 c_2，c_1 爲 $|z-z_0| = r_1$，c_2 爲 $|z-z_0| = r_2 < r_1$，如圖二所示。

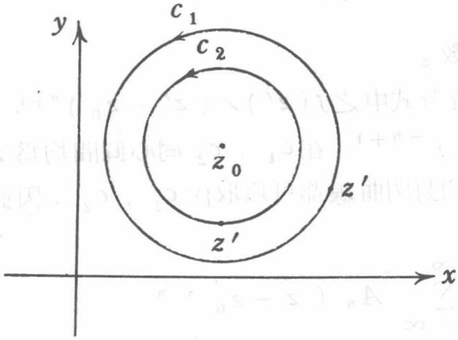


圖 16-2

z' 表示在 c_1 或 c_2 上之任何點。

要證明下述之定理：

【定理】 若 f 在 c_1 及 c_2 上，及在 c_1 與 c_2 間之空間內皆為解析函數，則在 c_1，c_2 間之任何一點 z，$f(z)$ 可表示成一收歛級數具有正與負整數冪之 $(z-z_0)$ 項。

$$(1)\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

$$(2)\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$(3)\quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{-n+1}}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

積分式之積分方向為正方向（逆時針方向）。

(1)(2)(3)合稱 Laurent 級數。

如果 f 在 c_1 及 c_1 內除 z_0 點之外皆為解析，則 r_2 可縮小至任意小的值，則 $0<|z-z_0|<r_1$ 時 (1) 成立。

若 f 在 c_1 及 c_1 皆為解析，$f'(z)/(z'-z_0)^{-n+1}$ 在 c_2 上及 c_2 內為 z' 之解析函數，由於 $-n+1\leq 0$，則

$$\int_{c_2}\frac{f'(z)\,dz}{(z'-z_0)^{-n+1}}=0\qquad，\text{即}\quad b_n=0$$

則級數成為泰勒級數。

由於 (2) 與 (3) 積分式中之 $f(z')/(z'-z_0)^{n+1}$，$f(z')/(z'-z_0)^{-n+1}$ 在 c_1，c_2 同心圓間均為 z' 之解析函數，則介於兩者間之任何一個封閉曲線都可以取代 c_1，c_2，因此 Laurent 級數可表示成

$$(4)\qquad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-z_0)^n\qquad,$$

$$(r_2<|z-z_0|<r_1)$$

(5) $$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

$$(n = 0\ ,\pm 1\ ,\pm 2\ ,\cdots\ )$$

由 Cauchy 積分公式得

(6) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(z')\,dz'}{z'-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(z')\,dz'}{z'-z},$$

而 $$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{(z'-z_0)-(z-z_0)}$$

$$= \frac{1}{z'-z_0} + \frac{z-z_0}{(z'-z_0)^2} + \cdots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(z'-z_0)^n}$$

$$+ \frac{(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^n(z'-z)}$$

及 $$\frac{-1}{z'-z} = \frac{1}{(z-z_0)-(z'-z_0)}$$

$$= \frac{1}{z-z_0} + \frac{z'-z_0}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{(z'-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

$$+ \frac{(z'-z_0)^n}{(z-z_0)^n(z-z')}$$

因此由(6) 得

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

$$+ a_{n-1}(z-z_0)^{n-1} + R_n + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2}$$

$$+ \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + Q_n$$

a_n 與 b_n 即 (2) 與 (3) 所示，而 R_n 與 Q_n 爲