

QQ教辅
QQJIAOFU

点击专项

根据新课标编写 适合各种版本教材 新课标

DIANJIZHUANXIANG

点击专项



NLIC2970646187

高中数学

主编：李永哲

不等式
推理与证明

延边大学出版社

QQ教辅

QQJIAOFU



根据新课标编写 适合各种版本教材 **新课标**

DIANJIZHUANXIANG

点击专项



NLIC2970546187

高中数学

不等式 推理与证明

本册主编：张友 刘金国
编委：王雪晶 刘德广 高琨 郑明琴 刘晓菲 张欣
徐嵘 李业英 杜雪英 王春花 石成合 张伟
杨秀杰 赵传娟 崔莲花 徐丽媛 兰俊义 韩晓明

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

点击专项·高中数学·不等式、推理与证明/李永哲主编.
—延吉:延边大学出版社,2008.8
ISBN 978-7-5634-2467-2

I. 点… II. 李… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 103310 号

点击专项·高中数学·不等式、推理与证明

主编:李永哲

责任编辑:秀 豪

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路 977 号 邮编:133002

网址:<http://www.ydcbs.com>

E-mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433-2732435 传真:0433-2732434

发行部电话:0433-2133001 传真:0433-2733266

印刷:北京奥达福利装印厂

开本:880×1230 1/32

印张:79.875 字数:1654 千字

印数:1—15000

版次:2008 年 8 月第 1 版

印次:2008 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5634-2467-2

定价:124.00 元(共 6 册)



前言 Foreword

在数学这门学科中,知识的各个部分是有关联的,但各知识都有自己的特点。因此,在学习过程中,数学各专题知识独特的规律就需要学生们细心把握。

正因为如此,我们聘请多年在一线教学工作岗位的特高级教师,根据教育部颁布的新课标和新大纲的要求,编写了本书《点击专项——高中数学 不等式、推理与证明》,目的是让学生们在学习本数学专题时对这部分知识内容有深刻的理解和掌握。

为使广大读者更方便地使用本书,本书按从易到难的梯度编写,这样,对本专题知识没有吃透的学生就可以迅速掌握本专题的知识;中等水平的学生在精读本书提高篇后会使自己更上一层楼;优秀的学生可以通过拓展篇的训练使自己处在更高的水平。

本书精选的大量不同难度的习题能让不同层次的学生有的放矢,并体验到学习的乐趣。

本书由如下版块构成:

一、知识归纳

将不等式、推理与证明的知识和规律进行总结和归纳,将其主要规律呈示出来,使学生们在学习中能在最短的时间内掌握本章节的内容。

二、基础篇

本章节分为例题和训练部分。这部分内容主要是通过基础篇的训练能尽快地掌握本章节的基本内容,对基本内容和概念加深理解并熟练掌握。





三、提高篇

本章节分为例题和训练部分。提高篇具有相当的难度。通过提高篇的训练,不仅能更熟练地掌握本章节的基本内容,而且能对与本章节相关联的内容有一定的理解和掌握。

四、拓展篇

本章节分为例题和训练部分。拓展篇的题难度很大,但这些题都是在本章节的基础知识之上进行变型和延伸的,因此,这些题是本章节内容的总结与拓展。通过拓展篇的训练,能够对本章节的内容有个明晰的认识。

五、参考答案

全书给出了标准答案,有一定难度的题还给出了解题思路和具体步骤。

充分阅读本书,通过这种阶梯式的训练,任何学生都能迅速有效地掌握本章节的内容,从而达到点击专项的目的。



目 录 Contents

| | |
|--|-----|
| 第一章 不等式 | 1 |
| 1.1 不等关系与不等式 | 1 |
| 1.2 一元二次不等式其解法 | 29 |
| 1.3 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题 | 58 |
| 1.4 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ | 92 |
| 专题1 不等式的证明 | 121 |
| 专题2 不等式的综合应用 | 133 |
| 专题3 不等式热点规律方法 | 155 |
| 第二章 推理与证明 | 172 |
| 2.1 合情推情与演绎推理 | 173 |
| 2.1.1 合情推理 | 173 |
| 2.1.2 演绎推理 | 201 |
| 2.1.3 数学归纳法 | 241 |
| 2.2 直接证明与间接证明 | 273 |
| 2.2.1 综合法与分析法 | 273 |
| 2.2.2 间接证明 | 307 |
| 本章综合训练 | 336 |

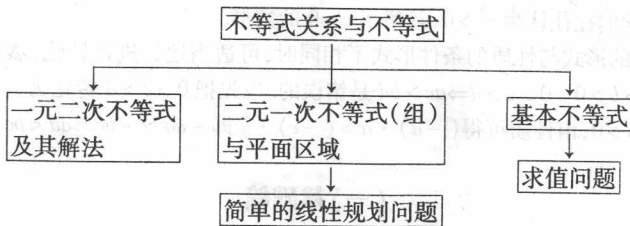


第一章 不等式

本章教学目标及要求

1. 通过具体情境,感受在现实世界和日常生活中存在着大量的数量关系,了解不等式(组)的实际背景.
2. 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式模型的过程;通过函数图象了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系;会解一元二次不等式,对给定的一元二次不等式,尝试设计求解的程序框图.
3. 从实际情境中抽象出二元一次不等式组;了解二元一次不等式的几何意义,能用平面区域表示二元一次不等式组;从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题,并能加以解决.
4. 探索基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a, b \geq 0)$ 的证明过程;会用基本不等式解决简单最大(小)值问题.

本章知识结构框图



1.1 不等关系与不等式

知识梳理

1. 实数大小关系

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \quad a = b \Leftrightarrow a - b = 0 \quad a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$



2. 不等式的性质

✓ 性质1. 如果 $a > b$, 那么 $b < a$; 如果 $a < b$, 那么 $b > a$, 即 $a > b \Leftrightarrow b < a$.

✓ 性质2. 如果 $a > b, b > c$, 那么 $a > c$ 即 $a > b, b > c \Rightarrow a > c$.

✓ 性质3. 如果 $a > b$, 那么 $a + c > b + c$

性质4. 如果 $a > b, c > 0$, 那么 $ac > bc$

如果 $a > b, c < 0$, 那么 $ac < bc$

性质5. 如果 $a > b, c > d$ 那么 $a + c > b + d$

性质6. 如果 $a > b > 0, c > d > 0$ 那么 $ac > bd$

性质7. 如果 $a > b > 0$, 那么 $a^n > b^n (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$

性质8. 如果 $a > b > 0$, 那么 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$

3. 比较实数大小关系

(1) 作差比较法: ①作差 ②变形 ③确定符号 ④结论. 其中常用变形方法: 一是配方法 二是分解因式

(2) 作商比较法: ①作商 ②变形 ③比较商与 1 的大小关系 ④结论

其中两个数均为正数即当 $a > 0, b > 0$ 时, 则 $\frac{b}{a} > 1 \Leftrightarrow b > a; \frac{b}{a} = 1 \Leftrightarrow b = a; \frac{b}{a} < 1 \Leftrightarrow b < a$.

4. 学法指导

(1) 透彻理解不等式性质的条件和结论, 弄清是充分条件, 还是充要条件.

如: $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$, 这里的条件 $a > b > 0, c > d > 0$ 是充分不必要条件, 显然由 $ac > bd \neq a > b > 0, c > d > 0$.

(2) 分析性质的条件是否具备, 做到有根有据, 严谨科学, 例如: $a > b \Rightarrow ac^2 > bc^2$ 是错误的. 同学们往往认为 $c^2 > 0$, 忽略了 $c = 0$ 的情形.

当条件的形式与性质的条件形式不相同, 可适当地先进行转化, 然后再利用性质. 例如: $a > b > 0, 0 > c > d \Rightarrow ac > bd$ 是错误的. 应先把 $0 > c > d$ 转化为 $-d > -c > 0$, 再结合 $a > b > 0$, 由性质可得 $(-d) \cdot a > (-c) \cdot b$ 即 $-ad > -bc \Rightarrow ad < bc < 0$

(一) 基础篇

典例分析

例1 比较 $(x+5)(x+7)$ 与 $(x+6)^2$ 的大小.

分析: 可用作差法比较.

解: $(x+5)(x+7) - (x+6)^2 = (x^2 + 12x + 35) - (x^2 + 12x + 36) = -1 < 0$
 $\therefore (x+5)(x+7) < (x+6)^2$

例2 如果 $x > 0$, 比较 $(\sqrt{x}-1)^2$ 与 $(\sqrt{x}+1)^2$ 的大小.

原
书
缺
页

原
书
缺
页

原
书
缺
页

原
书
缺
页



2. 若 $a < 0, -1 < b < 0$, 则有 ()
 A. $a > ab > ab^2$ B. $ab^2 > ab > a$ C. $ab > a > ab^2$ D. $ab > ab^2 > a$
3. 若 $a > 0$, 且 $a \neq 1, p = \log_a(a^3 + 1), q = \log_a(a^2 + 1)$, 则 p, q 的大小关系为 ()
 A. $p < q$ B. $p \leq q$ C. $p > q$ D. $q \geq p$

4. 在下列各题的横线上填上适当的不等号:

(1) 若 $x > 0, y > 0$, 则 $x^3 + y^3$ _____ $x^2y + xy^2$

(2) 若 $x \in \mathbf{R}$, 则 $(x^2 + 1)^3$ _____ $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1$

(3) $\log_2 3$ _____ $\frac{3}{2}$

5. 判断下列命题是否正确, 正确的画“√”, 错误的画“×”.

(√) $a > b \Rightarrow \frac{a}{b} > 1$ ()

(√) $a > b \Rightarrow |a| > b$ ()

(×) $a > b \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}$ ()

(√) $a > |b| \Rightarrow a > b$ ()

(×) $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ()

(×) $a > b \Rightarrow a^{\frac{1}{3}} > b^{\frac{1}{3}}$ ()

(×) $a > b, c > d \Rightarrow ac > bd$ ()

(8) $\sqrt[n]{a^2} > \sqrt[n]{b^2} \Rightarrow a > b, n \in \mathbf{N}$ ()

(√) $ac^2 > bc^2 \Rightarrow a > b (c \in \mathbf{R})$ ()

(10) $a > -b \Rightarrow c - a < b + c$ ()

(11) 若 $a > b > c, \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$, 则 $a, b, c > 0$ ()

(12) 若 $a \geq b, ac \geq bc$, 则 $c \geq 0$ ()

6. 在空格上填上适当条件, 使下列命题成立.

(1) 若 $a > b$ 且 _____, 则 $a^2 > b^2$

(2) 若 $a^2 > b^2$ 且 _____, 则 $a < b$

(3) 若 $x > y, \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ 同时成立, 则 _____

(4) 若 $a > b > 0$ 且 _____, 则 $\frac{a}{x} > \frac{b}{y}$

7. 已知 $f(x) = ax^2 + bx$ 且 $1 \leq f(-1) \leq 2, 2 \leq f(1) \leq 4$, 求 $f(-2)$ 的取值范围.

8. 已知 $a > b > c > 0$, 则 $\sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{ac}, c$ 从小到大的排列顺序是 _____.

9. 已知 $a \geq 1$, 比较 $M = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ 和 $N = \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$ 的大小.

10. $-1 < \alpha < \beta < 1$, 则下列各式恒成立的是 ()

A. $-2 < \alpha - \beta < 0$

B. $-2 < \alpha - \beta < -1$



C. $-1 < \alpha - \beta < 0$

D. $-1 < \alpha - \beta < 1$

11. 若 $x \in (2, 6), y \in (1, 4)$, 则 $x + y \in$ _____; $x - y \in$ _____; $\frac{x}{y} \in$ _____.

12. 若 α, β 满足 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $2\alpha - \beta$ 的取值范围 _____.

A. $-\pi < 2\alpha - \beta < 0$

B. $-\pi < 2\alpha - \beta < \pi$

C. $-\frac{3}{2}\pi < 2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$

D. $0 < 2\alpha - \beta < \pi$

(二) 提高篇

典例分析

例 1 设 $a > 0, a \neq 1, t > 0$, 比较 $\frac{1}{2} \log_a t$ 与 $\log_a \frac{t+1}{2}$ 的大小.

分析: 有相同形式的函数式值的大小比较多采用作差比较法进行处理, 借助函数的性质获得问题的解决.

解: $\log_a \sqrt{t} - \log_a \frac{t+1}{2} = \log_a \frac{2\sqrt{t}}{t+1}$

$\because t > 0$, 则 $t+1 - 2\sqrt{t} = (\sqrt{t}-1)^2 \geq 0, \therefore 0 < \frac{2\sqrt{t}}{t+1} \leq 1$

当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a \sqrt{t} - \log_a \frac{t+1}{2} = \log_a \frac{2\sqrt{t}}{t+1} \geq \log_a 1 = 0, \therefore \log_a \sqrt{t} \geq \log_a \frac{t+1}{2}$

当 $a > 1$ 时, $\log_a \sqrt{t} - \log_a \frac{t+1}{2} = \log_a \frac{2\sqrt{t}}{t+1} \leq \log_a 1 = 0, \therefore \log_a \sqrt{t} \leq \log_a \frac{t+1}{2}$

点评

分类讨论是高中数学思想组成的一个重要内容, 在分类讨论的过程中, 所分内容的完整性是正确处理问题的前提, 本例中 $\frac{2\sqrt{t}}{t+1} \in (0, 1]$ 范围已确定, $\log_a \frac{2\sqrt{t}}{t+1}$ 的正负取决于 a 的选择, 故通过 $a > 1, 0 < a < 1$ 两类情形讨论, 比较两函数式的大小.

例 2 设 $a, b \in \mathbf{R}^+$ 且 $a \neq b$, 试比较 $a^a b^b$ 与 $a^b b^a$ 的大小.

分析: 根据题目的结构特点, 可考虑用作商法.

解: $\frac{a^a b^b}{a^b b^a} = \frac{a^{a-b}}{b^{a-b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$



$\because a, b \in \mathbf{R}^+, \therefore (1)$ 当 $a > b$ 时, $\frac{a}{b} > 1, a - b > 0, (\frac{a}{b})^{a-b} > 1$, 此时 $a^a b^b > a^b b^a$.

(2) 当 $a < b$ 时, $0 < \frac{a}{b} < 1, a - b < 0, (\frac{a}{b})^{a-b} > 1$, 此时 $a^a b^b > a^b b^a$.

综上: $a^a b^b > a^b b^a$

点评

幂形式出现的式子比较大小, 一般采用作商比较的方法.

例3 若 $a, b, m, n \in \mathbf{R}^+, m + n = 1, x = \sqrt{ma + nb}, y = m\sqrt{a} + n\sqrt{b}$, 试比较 x 与 y 的大小.

分析: 用作差法写出 $x - y$ 后, 发现直接因式分解不容易, 但由于 x 和 y 都是正数可利用平方差来比较大小.

$$\begin{aligned} \text{解: } x^2 - y^2 &= (\sqrt{ma + nb})^2 - (m\sqrt{a} + n\sqrt{b})^2 \\ &= ma(1 - m) + nb(1 - n) - 2\sqrt{ab} \cdot mn = mna + mnb - 2mn\sqrt{ab} \\ &= mn(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \end{aligned}$$

由于 $m, n \in \mathbf{R}^+$, 故 $x^2 - y^2 \geq 0$

又由于 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 故 $x \geq y$.

点评

若作差比较有困难, 可考虑作平方差.

例4 $a > 0, b > 0$, 求证: $(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}} + (\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}} \geq a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$

分析: 利用比较法: 作差或作商进行证明.

证明: 证法一 (作差法)

$$\begin{aligned} (\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}} + (\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}} - (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) &= \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \geq 0, \therefore (\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}} + (\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}} \geq a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

证法二 (作商法)

$$\begin{aligned} \frac{(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}} + (\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + \sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} + 1 \geq 1, \therefore (\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}} + (\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}} \geq a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



点评

作差法是比较大小的基本方法,两数为正数时,也可考虑用作商法.

例 5 已知 $0 < a < \frac{1}{2}$, $A = 1 - a^2$, $B = 1 + a^2$, $c = \frac{1}{1-a}$, $D = \frac{1}{1+a}$, 试比较 A 、 B 、 C 、 D 的大小.

分析: 通过将几个数分成几类,再从每一类中比较.

$$\text{解: } \because 0 < a < \frac{1}{2}, \therefore 0 < a^2 < \frac{1}{4}, \frac{1}{2} < 1-a < 1, 1 < 1+a < \frac{3}{2},$$

$$\therefore A = 1 - a^2 < 1 + a^2 = B,$$

$$\frac{A}{D} = (1 - a^2)(1 + a) = 1 + a - a^2 - a^3 = 1 + a(1 - a - a^2) > 1, \therefore A > D.$$

$$\text{同样 } \frac{B}{C} = (1 - a)(1 + a^2) = 1 - a(1 - a + a^2) < 1$$

$$\therefore B < C \quad \therefore D < A < B < C$$

点评

比较多个数的大小时,可用取特殊值法进行判断,猜测再进行比较.

例 6 已知函数 $f(x) = x + x^3$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$, $x_1 + x_2 < 0$, $x_2 + x_3 < 0$, $x_3 + x_1 < 0$, 那么 $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ 的值 ()

A. 一定大于 0

B. 一定小于 0

C. 等于 0

D. 正负都有可能

分析: 由函数 $f(x)$ 的单调性,奇偶性等获取不等式,判断 $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ 的值.

$$\text{解: } \because f(x) = x^3 + x, \therefore f(x) \text{ 是奇函数也是增函数. } \because x_1 + x_2 < 0, \therefore x_1 < -x_2, \\ \therefore f(x_1) < f(-x_2)$$

$$\text{即 } f(x_1) < -f(x_2), \therefore f(x_1) + f(x_2) < 0$$

$$\text{同理 } f(x_2) + f(x_3) < 0, f(x_1) + f(x_3) < 0, \therefore 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] < 0$$

$$\text{即 } f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) < 0.$$

点评

有关函数的性质经常运用不等式来解决有关不等式的问题,也运用函数性质来解决.

例 7 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则下列不等式 ① $a + b < ab$ ② $|a| > |b|$ ③ $a < b$ ④ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ 中,正确的不等式有 ()



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

解: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0 \Leftrightarrow b < a < 0, \therefore a+b < 0 < ab, |a| < |b|,$

$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2 \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2 (\because b < a < 0, \text{故等号取不到}).$ 即①④正确, ②③错误,

故选 B (注: 本题亦可用特值法, 如取 $a = -1, b = -2$ 验证得).

点评

本题主要考查不等式性质的应用.

例 8 已知三个不等式: $ab > 0, bc - ad > 0, \frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$ (其中 a, b, c, d 均为实数). 用其中两个不等式作为条件, 余下的一个不等式作为结论组成一个命题, 可组成的正确命题的个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

解: $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0 \Leftrightarrow \frac{bc - ad}{ab} > 0$, 所以下列三个命题都成立:

$$\textcircled{1} \begin{cases} ab > 0 \\ bc - ad > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} ab > 0 \\ \frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0 \end{cases} \Rightarrow bc - ad > 0$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} bc - ad > 0 \\ \frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0 \end{cases} \Rightarrow ab > 0. \text{ 故选 D.}$$

例 9 适当增加不等式条件使下列命题成立:

(1) 若 $a > b$, 则 $ac \leq bc$;

(2) 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a^2 > b^2$;

(3) 若 $a > b$, 则 $\lg(a+1) > \lg(b+1)$;

(4) 若 $a > b, c > d$, 则 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

解: (1) 原命题改为: 若 $a > b$ 且 $c \leq 0$, 则 $ac \leq bc$, 即增加条件“ $c \leq 0$ ”.

(2) 由 $ac^2 > bc^2$ 可得 $a > b$, 但只有 $b \geq 0$ 时, 才有 $a^2 > b^2$, 即增加条件“ $b \geq 0$ ”.

(3) 由 $a > b$ 可得 $a+1 > b+1$, 但作为真数, 应有 $b+1 > 0$, 故应加条件“ $b > -1$ ”.

(4) $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ 成立的条件有多种 (如 $a > b > 0, c > d > 0$) 与定理 4 推出相关的一个是 $a > b > 0, c > d > 0$, 因此, 可增加条件“ $b > 0, d > 0$ ”.

点评

对照不等式性质找出缺少的条件.