新世纪高等学校教材

数学教育主干课程系列教材

王敬赓 编著
北京师范大学数学科学学院 主编

ZHIGUAN TUOPU

直观拓扑

（第3版）

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

数学教育主干课程系列教材

北京师范大学数学科学学院 主 编

直观拓扑（第3版）

ZHIGUAN TUOPU

王敬赓 编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

直观拓扑/王敬赓编著. －3版—北京：北京师范大学出版社，2010.11
(新世纪高等学校教材)
ISBN 978-7-303-11366-8

Ⅰ. ①直… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①拓扑－高等学校－教材 Ⅳ. ①O189

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第150018号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　刷：北京中印联印务有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170 mm × 230 mm
印　张：15.5
字　数：224千字
版　次：2010年11月第3版
印　次：2010年11月第1次印刷
定　价：23.00元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　李彦博
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳
责任校对：李　菡　　责任印制：李　啸

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话：010-58800697
北京读者服务部电话：010-58808104
外埠邮购电话：010-58808083
本书如有印装质量问题，请与印制管理部联系调换。
印制管理部电话：010-58800825

序

拓扑学的蓬勃发展是20世纪数学的一个重要支柱,其理论和方法已渗入各个数学领域,应用也越来越多.经过努力,我国高等学校数学专业现在已相当普遍地开设了拓扑学课程,出版了不少教材.但是数学界还在呼唤有独特风格的教材,以适应不同的情况和需要,适应教学改革的要求.目前师范院校的许多教材脱胎于综合大学的为研习现代数学打基础的课程,有些学校的拓扑课偏重于讨论拓扑空间与连续性等抽象概念,未能很好地反映拓扑学的主要精神.拓扑学之所以富有活力,对整个数学发生重大影响,首先是因为它带来了新鲜的几何思想,开辟了几何学的新天地.怎样用不太多的时间,通过具体的题材,深入浅出地使学生领略拓扑学的特色和威力,这是师范院校课程建设中引人注目的问题.这也是数学普及工作的重要问题,因几何学与拓扑学的普及是薄弱环节,而中学教师是普及工作的主力军.

北京师范大学为此进行了多年的探索和试验,王敬赓同志的《直观拓扑》就是其结晶.我觉得,对于培养未来的中学教师,开阔他们的眼界,提高他们的数学修养,这是一本好书.浅的书要写得好是很不容易的.题材要引人入胜;讲法要直观易懂;内容又要经得起推敲,不能以谬传谬.这本书兼顾了这几方面的要求,是难能可贵的.我希望师范院校能够推广这样的课程,并且也向广大的数学爱好者推荐这本书.

姜伯驹

1993年10月21日

第3版前言

1915 年北京高等师范学校成立数理部,1922 年成立数学系.2004 年成立北京师范大学数学科学学院.经过 95 年的风风雨雨,数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验.将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

培养人才和编写教材是北京师范大学数学科学学院的两项非常重要的工作.教材的编写是学院的基本建设之一.学院要抓好教材建设;教师要研究教学方法.在教材方面,学院推出一批自己的高水平教材,做到各科都有,约 60 部.

写教材要慢一点,质量要好一点,教材修订连续化,教材出版系列化,是编写教材要注意的几项基本原则.学院希望教材要不断地继续修改和完善,对已经出版两版的教材,我们准备继续再版.在 2005 年 5 月,经由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行协商,由北京师范大学数学科学学院主编(李仲来教授负责),准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的第 2 版数学教材进行修订后出版第 3 版.

教材的建设是长期的、艰苦的任务,每一位教师在教学中要自主地开发教学资源,创造性地编写和使用教材.学院建议:在安排教学时,应考虑同一教师在 3～5 年里能够稳定地上同一门课,并参与到教材的编写或修订工作中去.在学院从事教学的大多数教师,应该在一生的教学生涯中至少以自己为主,编写或修订一种教材作为己任,并注意适时地修订或更新教材.我们还希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者,提出宝贵的修改意见,使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考.(李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院

2010-07-16

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第3版作者的话

本书第二版与第一版内容相同．第三版增加了以下内容：

第 1 章第 2 节中，关于连续性的应用，增加了几个有趣的例子．

第 2 章中增加了一节：欧拉公式的一个实际应用，介绍有关平面布线的问题，即如何判断一个图是否可以画在平面上而使图中各线段除端点外不相交，这个问题在印刷线路的设计中有实际意义．

第 3 章中增加了一节：一笔画的一个实际应用，介绍有关邮递员的最短路线问题．

第 4 章中，在介绍约当曲线定理的第 1 节最后，增加了介绍约当曲线在其上不成立的曲面——环面．在介绍布劳威尔不动点定理的第 2 节中，增加了关于 1 维布劳威尔不动点定理的直观讨论；在这一节最后，增加了介绍 1 维布劳威尔不动点定理的一个应用——关于求解市场均衡点问题．

第 5 章第 1 节中，增加了一些关于莫比乌斯带的奇趣．

第 7 章增加了一个附录：突变模型在汉字识别上的应用尝试，这是编者早年与他人合作的一篇论文的摘录．

增加了一章：第 8 章，漫话纽结和链环．主要参考姜伯驹院士的《绳圈的数学》编写的．这一章和第 5，6，7 章没有什么联系．实际上，有了第 1 章的准备，就可以直接阅读第 8 章．

第二版中的附录 1 和附录 2，分别介绍了欧拉的两项研究成果：凸多面体的欧拉公式和七桥问题．前者是美国数学教育家波利亚根据欧拉的几篇论文编写成的，后者就是欧拉

本人的论文.编者对这两个附录给予了特别的重视,是由于这两个附录,让我们看到了大数学家欧拉是如何思考问题的这一生动而具体的过程,充分展现了欧拉的创造性.这次再版时,增加了一些有关的论述,力求能更好地体会数学家的创造性工作.

习题是本书的重要组成部分.这次再版时,给出了全部习题的解答.希望读者尽量不要在自己独立解题之前先翻看答案,因为先看答案,一方面由于没有经过自己动脑动手,很难形成和提高自己的能力,另一方面,还会限制自己思维的创造性,失去自己进行创造并获得成功的乐趣.

拓扑学是几何学的年轻分支之一,作为近代数学的基础理论学科,拓扑学的理论和方法已经渗透到数学的许多分支以及物理学,化学和生物学之中,而且在工程技术和经济领域中也有广泛的应用.将拓扑学的基本思想和方法直观而通俗地介绍给中学数学教师,并在中学数学教学中渗透拓扑学的思想,是时代对我们的要求,十分必要.为此,现正在全国范围内进行的《普通高中数学课程标准》(以下简称《课标》)改革实验,把拓扑学中的某些内容如《欧拉公式和闭曲面分类》列为选修课程,希望通过它使学生对拓扑变换有形象和直观的理解,体会拓扑不变量的思想,以及拓扑学方法的某些实际应用,而不追求形式化的严格定义,这些正合乎本书编写的宗旨.而且,这次本书修订增加的内容,有些就是为适应《课标》的要求添加的.因此,本书是中学数学教师进行《课标》中有关这一方面内容的教学和业务进修的很好的参考书.

这次修订再版,编者还要感谢北京师范大学数学科学学院的领导李仲来教授,北京师范大学出版社和我的同事蒋人璧教授,感谢他们的关心和帮助.

王敬赓
于北京师范大学数学科学学院
2010-01-25

第1版作者的话

拓扑学是几何学的年轻的分支之一，作为近代数学的一门基础理论学科，拓扑学已经渗透到数学的许多分支以及物理学、化学和生物学之中，而且在工程技术中也取得了广泛的应用.

拓扑学是近代数学的抽象理论之一，拓扑学的抽象的理论体系，对于这个学科的理论的严格建立是完全必要的. 但这往往使得拓扑学中生动有趣的几何事实，被一大堆抽象的定义、定理及公式所淹没，这就使初学者难以理解对象的本质，难以认识其基本概念和方法.

将拓扑学的基本思想和方法直观地、通俗地介绍给中学教师，以期在中学数学教学中能渗透拓扑学的思想，这是藏在编者心中多年的一个愿望. 几何直观以其生动的形象往往给人留下深刻的印象，通过几何直观阐述拓扑学的基本概念和方法，不仅可以普及拓扑学的某些基本知识，还可以引起青少年学生对数学的兴趣.

尽管拓扑学成为一门独立学科只不过是近一个世纪的事，但拓扑学概念的起源要上溯到数学家欧拉的时代. 1736年欧拉发表的《哥尼斯堡的七座桥》要算是“位置几何学”（拓扑学）最早的研究论文了. 1750 年欧拉重新发现的关于凸多面体的顶点数、棱数和面数的关系式，即著名的欧拉公式，它的推广至今仍是代数拓扑学的中心内容之一. 由于这些古老而有趣的拓扑学问题可以用初等的方法研究，连中学生都可以接受，因此向中学教师介绍它们就具有非常实际的意义了. 这样的问题，还有正十二面体的哈密尔顿顶点周游问题，

关于地图着色问题的五色定理，关于简单封闭折线的约当曲线定理等等. 通过这些问题的介绍，可以使学生了解实际问题是如何被抽象成数学问题——拓扑问题的，又是如何加以解决的. 这样生动的全过程，在一般数学教科书中是看不到的，与一般数学教科书中充满定义、定理、公式、证明的刻板叙述相比，学生更容易从中认识数学的本质，从而增加对数学的兴趣，而且从中可以学到一些分析问题和解决问题的思想方法——如何在纷繁的事物中抓住主要的联系，进行科学的抽象，如何正确地使用概念，如何一步一步地进行分析等等，从而发展他们的智力.

除了介绍上述这些古老而有趣的拓扑问题以外，对于一些拓扑学的重要定理，如布劳威尔不动点定理、代数基本定理等，给出证明的直观描述，可以让学生领会一些重要的拓扑学方法的几何轮廓.

对于单侧曲面莫比乌斯带、射影平面和克莱因瓶以及闭曲面的拓扑分类的介绍，可以扩大学生关于曲面的眼界，大大丰富几何的空间想象力.

对代数拓扑中的两个最基本的不变量基本群和同调群的直观描述，从直观形象出发，不详究这些概念的严格定义和实际计算，使学生粗线条地形象地把握这些概念的意义，以求对代数拓扑的基本思想——将几何图形同代数上的群联系起来，以便通过对群的研究了解图形的拓扑性质，这是在更高层次上的一种形数结合，从而增加对数学的了解.

初等突变模型是微分拓扑中奇点理论的一个应用，把数学用来对突然变化的现象进行研究，显示了拓扑学方法在解决实际问题，特别是在解决生物科学和社会科学等软科学方面的问题时的神奇的威力，虽然关于这种应用的威力还有激烈的争论，但总是把数学应用的范围向前推进了一步. 对突变模型的简介有助于使学生开阔眼界.

本书上述内容取材于下列科普著作：

[1][美]柯朗，罗宾. 数学是什么. 左平，张饴慈，译. 北京：科学出版社，1985.

[2][苏]波尔金斯基，叶夫莱莫维奇. 漫谈拓扑学. 高国士，译. 南京：江苏科学技术出版社，1983.

[3][苏]巴尔佳斯基，叶弗莱莫维奇. 拓扑学奇趣. 裘光明，译. 北京：北京大学出版社，1987.

[4][美]Arnold. 初等拓扑的直观概念. 王阿雄，译. 北京：人民教育出版社，1980.

[5]苏步青. 拓扑学初步. 复旦大学出版社，1986.

[6]江泽涵. 多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类. 北京：人民教育出版社，1964.

[7]姜伯驹. 一笔画和邮递路线问题. 北京:人民教育出版社,1964.
[8][德]希尔伯特,康福森. 直观几何. 王联芳,译. 北京:高等教育出版社,1959.
[9][日]平冈忠. 新几何. 马忠林,译. 北京:知识出版社,1987.
[10][英]桑德斯. 灾变理论入门. 凌复华,译. 上海:上海科学文献出版社,1983.

编者谨向上列各书的作者和译者,以及本书所有引用和参考的资料的作者和译者,致以诚挚的谢意.

北京大学姜伯驹教授一直非常关心拓扑学的普及工作,早在多年以前就希望能出版这类教材. 他在看了编者的这本讲义后,给予了充分的肯定和热情的鼓励,北京大学尤承业教授还对讲义提出了具体的修改意见,编者对他们表示衷心的感谢.

余玄冰同志率先为数学系高年级学生开设直观拓扑选讲,进行了有益的探索,积累了不少经验,编者的这本讲义是这种探索的继续. 她和蒋人璧同志在使用本教材的过程中,提出了很好的修改意见,谢谢她们.

我还要感谢我校教务长沈复兴同志和校出版社的领导王德胜同志和王文湧同志,以及数学系几何教研室主任刘继志同志,感谢他们对出版本书的关心和支持.

本教材适合于师范院校数学教育专业以及中学教师的继续教育和函授使用.

由于编者水平有限,本书中的错误和不妥之处一定不少,恳请批评指正.

王敬赓
1993 年 3 月 14 日于北京师范大学

目 录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第1章 什么是拓扑学

1.1 从欧几里得几何学到拓扑学

我们知道欧几里得几何中所研究的平面图形的性质是全等图形所共有的性质，它们与图形在平面上的位置无关，如线段的长度(即两点间的距离)、角度(包括二直线垂直及平行)、面积等都是，它们被称为图形的度量性质.用克莱因的观点说，研究图形在全体等距变换(即保持任意两点间距离不变的变换，包括平移、旋转、轴反射以及它们的乘积，全体组成一个群)下不变的性质，就构成**欧氏几何学**.在等距变换下不变的性质称为图形的**度量性质**.平面上的等距变换形如

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta-\varepsilon y\sin\theta+a, \\ y'=x\sin\theta+\varepsilon y\cos\theta+b. \end{cases} \quad (\varepsilon=\pm 1)$$

如果我们将变换的条件放宽，不要求必须等距，只要求保持任意共线三点所成的两个有向线段的比(称为简比)不变，这种变换称为仿射变换，它可以由一连串的平行投影得到，均匀压缩变换、位似变换、错切变换都是它的特例.研究图形在全体仿射变换(也组成一个群)下不变的性质，就构成**仿射几何学**.两个图形若能从一个经过仿射变换变成另一个，则称它们是仿射等价的.显然，仿射等价的图形与全等图形相比容许某种程度的"失真"，即长度、角度和面积可以不同，也就是说一个图形经过仿射变换后，形状和大小一般都会发生改变，但也有些不会改变，例如平行直线还变成平行直线，平行线段的比及两个图形面积的比不会改变等.我们把经过仿射变换不变的性质，称为图形的**仿射性质**.平面上的仿射变换形如

$$\begin{cases} x'=a_1x+b_1y+c_1, \\ y'=a_2x+b_2y+c_2. \end{cases} \quad \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0\right)$$

在仿射几何里，所有的三角形是仿射等价的，它们都与正三角形仿射等价；所有的椭圆也是仿射等价的，它们都与圆仿射等价.也就是说，在仿射几何里，我们可以把任意一个三角形和正三角形看成是"一样的"，把任意一个椭圆和圆看成是"一样的".

如果我们将变换的条件再放宽，不要求必须任意三点的简比不变，只要求任意共线四点所成的两个简化的比(称为交比)不变，这种变换称为射影变换，它可以由一连串的中心投影得到.研究图形在全体射影变换(也组成一个群)下不变

的性质,就构成**射影几何学**. 两个图形若能从一个经过射影变换变成另一个,就称它们是射影等价的. 显然,射影等价的图形比仿射等价的图形容许更大的失真,不仅图形的形状大小会改变,而且平行直线也不再保持,但点仍旧变成点,直线仍旧变成直线,点在线上仍旧变成点在线上. 经过射影变换不变的性质叫做图形的**射影性质**. 平面上的射影变换若用齐次坐标表示形如

$$\begin{cases}\rho x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ \rho x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ \rho x'_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3.\end{cases}\quad \left(\rho\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0\right)$$

在射影几何里,所有的椭圆、双曲线和抛物线全都是射影等价的,也就是在射影几何学家眼里,管它什么椭圆、双曲线和抛物线,全都是"一样"的!

如果我们把变换的条件再放宽,只要求这个变换是一对一的(即不创造新点也不溶合旧点),并且互相"靠近的"点变换前后仍互相"靠近",那么这种变换被形象地称作"橡皮变形". 设想将图形画在一张弹性极好的橡皮薄膜上,这个变换允许将薄膜任意地扭曲、弯折、拉伸、压缩,只要不撕破它(撕破就会使一点变成两点且使靠近的点变成不靠近了),且不使其粘合(粘合就会使不同的点变成一点,且使原来不靠近的点变成靠近了). 这种橡皮变形甚至允许沿某条曲线将薄膜切开,经过上述任意变形后,再将切口按原样缝合起来,即使得未切开前互相靠近的点,缝合后仍互相靠近. 上述橡皮变形用数学语言来表达就是一个一一的(即满单的)连续的且逆也连续的变换(或映射),称为**拓扑变换**或**同胚变换**. 研究图形在同胚变换下不变的性质就构成**拓扑学**. 两个图形若能从一个经过同胚变换变成另一个,就称它们是拓扑等价的或同胚的. 同胚变换下不变的性质,叫做图形的**拓扑性质**. 显然一个图形经过上述橡皮变形,将极大地失真,形状大小、平行直线甚至连直线都不再保持,那么还会有什么性质保持不变呢? 看一个例子,考察下列变换

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=y^3,\end{cases}\quad \left(\text{逆为}\begin{cases}x=x',\\ y=y'^{1/3}.\end{cases}\right) \tag{1}$$

它是一一的、连续的,逆也连续,因此是一个拓扑变换. 考察在这个变换下直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 变成了什么样的图形,它们的像分别是 $y'=x'^3$ 及 $x'^2+y'^{2/3}=1$(见图 1.1-1~1.1-4). 可见在变换(1)之下直线不再保持,圆、甚至连二次曲线也不保持了,但连通性,曲线(即一维图形),封闭曲线,简单闭曲线(即自己不相交的闭曲线)这些性质被保存了,它们都是拓扑性质.

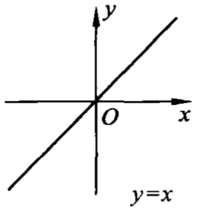

图 1.1-1

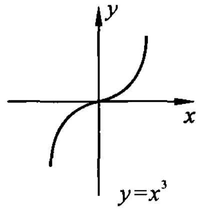

图 1.1-2

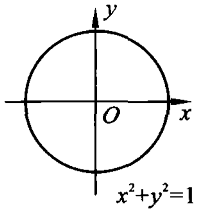

图 1.1-3

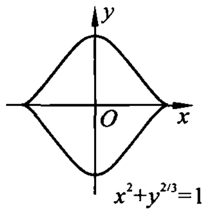

图 1.1-4

在拓扑学家看来，同胚的图形是“一样的”，因此上述图 1.1-1 与 1.1-2，图 1.1-3 与 1.1-4 是不加区别的.

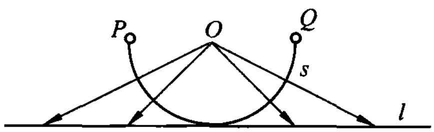

图 1.1-5

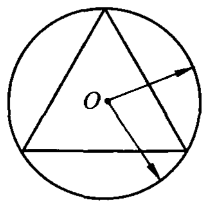

图 1.1-6

再看一个同胚的例子，设 s 是以 O 为中心的半圆周去掉它的两个端点 P，Q，l 是与半圆相切且平行于直径 PQ 的直线（图 1.1-5）. 以 O 为中心作中心投影，把半圆周 s 的点映成直线 l 上的点，这个中心投影 $p:s\to l$ 就是一个同胚映射. 因此直线同胚于没有端点的半圆周，而半圆周又可以拉直成线段，所以半圆周同胚于线段，因而直线与任意一个去掉端点的线段（开线段）同胚. 完全类似，可知正三角形和它的外接圆同胚，如图 1.1-6 所示的中心投影是所要求的同胚映射.

按照同胚变换的直观描述——橡皮变形，把曲面看成是橡皮薄膜做成的，曲线是由橡皮筋做成的. 图 1.1-7 中的四个立体的表面是同胚的，它们都同胚于球面；图 1.1-8 中的四条曲线也都是同胚的，它们都同胚于圆.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com