

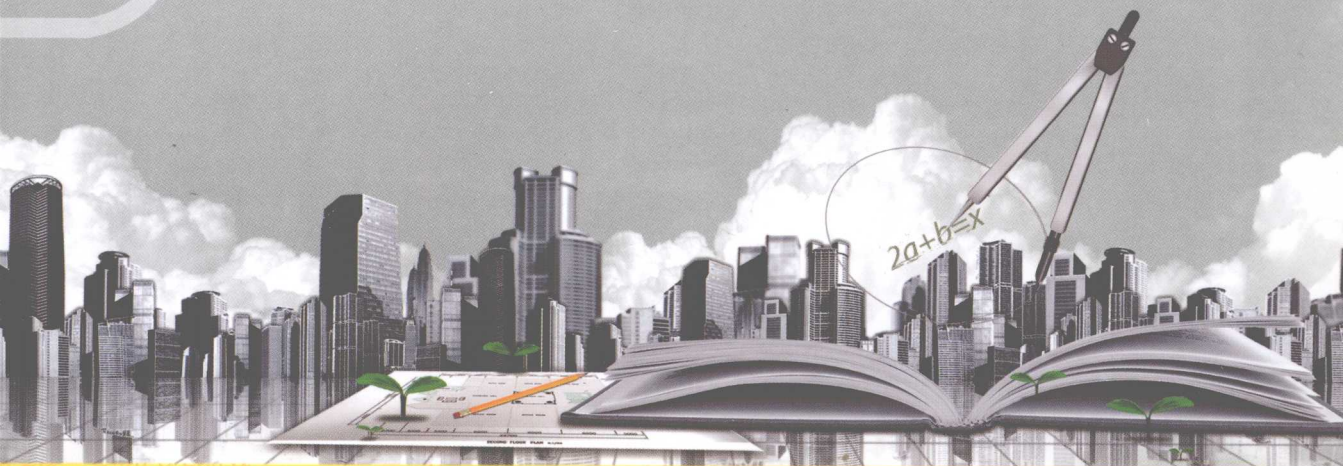
西安交大
考研

海天教育
HAITIAN EDUCATION

数学考研 **新干线**

高等数学

■ 主 编 武忠祥
■ 副主编 张 宇 杨 超



2013



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学出版社考研图书网站 <http://kaoyan.xjtupress.com>

2013 版
数学考研新干线
高等数学

主 编 武忠祥

副主编 张 宇 杨 超

西安交通大学出版社

内容简介

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)编写的辅导讲义,力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯的错误与疑惑。同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学们梳理解题思路,掌握常用的解题方法和技巧。

图书在版编目(CIP)数据

数学考研新干线 高等数学(2013版)/武忠祥主编. —西安:西安交通大学出版社,2012.5

ISBN 978-7-5605-4293-5

I. ①数… II. ①武… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解
IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 074173 号

书 名 数学考研新干线 高等数学(2013版)
主 编 武忠祥
副 主 编 张 宇 杨 超
责任编辑 叶 涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号 邮政编码 710049)

网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行部)
(029)82668315 82659096(总编办)

传 真 (029)82668280
印 刷 北京旺鹏印刷有限公司

开 本 787mm×1 092mm /16 印张 14 字数 335 千字
版次印次 2012年5月第3版 2012年5月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-4293-5/O·393
定 价 25.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82664954

读者信箱:jdly@yahoo.cn

版权所有 侵权必究

前 言

本书在 2012 版基础上,根据考研数学试题的变化趋势,对其部分内容进行了适当的调整和补充。另外,各章都新增加了练习题精选和练习题答案与提示,以便考生通过练习掌握各章的题型和解题方法。

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)而编写的辅导讲义,由编者多年来在考研辅导班的讲稿改写而成。全书共分九章及一个附录,每章均由考试内容要点精讲和常考题型的方法与技巧两部分组成。

本书力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯的错误与疑惑。同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学们梳理解题思路,掌握常用的解题方法和技巧。

为了考研同学使用方便,本书将数学一至数学三共同要求的内容编写在前面。其中数学二只要求前六章,数学三只要求前七章,数学一全要。

希望本讲义能对复习考研的同学有较大的帮助。由于编者水平有限,疏漏和错误之处在所难免,欢迎批评指正。

祝同学们在考研的路上一路顺利!

编 者

2012 年 3 月

目 录

前言

第一章 函数 极限 连续	(1)
第一节 函数	(1)
■ 考试内容要点精讲	(1)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(2)
题型一 复合函数	(2)
题型二 函数性态	(3)
第二节 极限	(5)
■ 考试内容要点精讲	(5)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(8)
题型一 极限的概念、性质及存在准则	(8)
题型二 求极限	(10)
方法 1 利用有理运算法则求极限	(10)
方法 2 利用基本极限求极限	(10)
方法 3 利用等价无穷小代换求极限	(11)
方法 4 洛必达法则	(12)
方法 5 泰勒公式	(14)
方法 6 利用夹逼准则求极限	(17)
方法 7 利用单调有界准则求极限	(18)
方法 8 利用定积分的定义求极限	(19)
题型三 已知极限确定参数	(20)
题型四 无穷小量阶的比较	(21)
第三节 连续	(23)
■ 考试内容要点精讲	(23)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(24)
题型一 讨论连续性及其间断点类型	(24)
题型二 介值定理、最值定理及零点定理的证明题	(26)
第二章 一元函数微分学	(30)
第一节 导数与微分	(30)
■ 考试内容要点精讲	(30)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(33)

题型一	可导性的讨论(导数定义)	(33)
题型二	复合函数导数	(36)
题型三	隐函数的导数	(37)
题型四	参数方程的导数	(38)
题型五	对数求导法	(39)
题型六	高阶导数	(39)
第二节	导数应用	(41)
■	考试内容要点精讲	(41)
■	常考题型的解题方法与技巧	(43)
题型一	极值与最值	(43)
题型二	方程的根	(45)
1.	存在性	(45)
2.	根的个数	(45)
题型三	不等式证明	(48)
题型四	求渐近线	(50)
题型五	微分中值定理证明题	(51)
1.	证明存在一个中值点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F(\xi, f'(\xi)) = 0$	(51)
2.	证明存在两个中值点 $\xi, \eta \in (a, b)$ 使 $F(\xi, \eta, f'(\xi), f'(\eta)) = 0$	(54)
3.	证明存在一个中值点 ξ , 使得关于 $f^{(n)}(\xi) (n \geq 2)$ 的某个式子成立	(56)
第三章	一元函数积分学	(61)
第一节	不定积分	(61)
■	考试内容要点精讲	(61)
■	常考题型的解题方法与技巧	(63)
题型一	计算不定积分	(63)
题型二	不定积分杂例	(67)
第二节	定积分	(68)
■	考试内容要点精讲	(68)
■	常考题型的解题方法与技巧	(71)
题型一	定积分计算	(71)
题型二	与定积分有关的综合题	(74)
题型三	积分不等式	(78)
第三节	反常积分	(81)
■	考试内容要点精讲	(81)
■	常考题型的解题方法与技巧	(82)
题型一	反常积分计算	(82)
题型二	反常积分的概念与敛散性	(83)
第四节	定积分应用	(84)
■	考试内容要点精讲	(84)
■	常考题型的解题方法与技巧	(84)

题型一 几何应用	(84)
题型二 物理应用	(85)
第五节 导数在经济学中的应用(数学一、二不要求).....	(86)
■ 考试内容要点精讲	(86)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(88)
第四章 多元函数微分学	(93)
第一节 重极限、连续、偏导数、全微分(概念,理论)	(93)
■ 考试内容要点精讲	(93)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(94)
题型一 求重极限	(94)
题型二 证明重极限不存在	(95)
题型三 连续、偏导数、全微分的概念及其关系	(96)
第二节 偏导数与全微分的计算	(98)
■ 考试内容要点精讲	(98)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(99)
题型一 求一点处的偏导数与全微分	(99)
题型二 求已给出具体表达式函数的偏导数与全微分.....	(100)
题型三 含有抽象函数的复合函数偏导数与全微分.....	(102)
题型四 隐函数的偏导数与全微分.....	(105)
第三节 极值与最值.....	(108)
■ 考试内容要点精讲.....	(108)
■ 常考题型的解题方法与技巧.....	(109)
题型一 求无条件极值.....	(109)
题型二 求最大最小值.....	(112)
第五章 二重积分.....	(119)
■ 考试内容要点精讲.....	(119)
■ 常考题型的解题方法与技巧.....	(120)
题型一 计算二重积分.....	(120)
题型二 累次积分交换次序及计算.....	(125)
题型三 与二重积分有关的综合题.....	(127)
题型四 与二重积分有关的积分不等式问题.....	(130)
第六章 常微分方程.....	(134)
■ 考试内容要点精讲.....	(134)
■ 常考题型的解题方法与技巧.....	(136)
题型一 微分方程求解.....	(136)
题型二 综合题.....	(140)
题型三 应用题.....	(143)

第七章 无穷级数	(146)
第一节 常数项级数	(146)
■ 考试内容要点精讲	(146)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(147)
题型一 正项级数敛散性的判定	(147)
题型二 交错级数敛散性判定	(150)
题型三 任意项级数敛散性判定	(151)
题型四 证明题与综合题	(154)
第二节 幂级数	(156)
■ 考试内容要点精讲	(156)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(157)
题型一 求收敛域	(157)
题型二 将函数展开为幂级数	(160)
题型三 级数求和	(162)
第三节 傅里叶级数	(166)
■ 考试内容要点精讲	(166)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(168)
题型一 有关收敛定理的问题	(168)
题型二 将函数展开为傅里叶级数	(169)
第八章 向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用	(173)
第一节 向量代数	(173)
■ 考试内容要点精讲	(173)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(174)
题型一 向量运算	(174)
题型二 向量运算的应用及向量的位置关系	(175)
第二节 空间平面与直线	(175)
■ 考试内容要点精讲	(175)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(176)
题型一 建立直线方程	(176)
题型二 建立平面方程	(178)
题型三 与平面和直线位置关系有关的问题	(178)
第三节 曲面与空间曲线	(180)
■ 考试内容要点精讲	(180)
■ 常考题型的解题方法与技巧	(181)
题型一 建立柱面方程	(181)
题型二 建立旋转面方程	(181)
题型三 求空间曲线的投影曲线方程	(182)
第四节 多元微分在几何上的应用	(182)
■ 考试内容要点精讲	(182)

■ 常考题型的解题方法与技巧·····	(183)
题型一 建立曲面的切平面和法线方程·····	(183)
题型二 建立空间曲线的切线和法平面方程·····	(185)
第五节 方向导数与梯度·····	(186)
■ 考试内容要点精讲·····	(186)
■ 常考题型的解题方法与技巧·····	(186)
题型一 方向导数与梯度的计算·····	(186)
第九章 多元积分学及其应用·····	(189)
第一节 三重积分与线面积分·····	(189)
■ 考试内容要点精讲·····	(189)
■ 常考题型的解题方法与技巧·····	(192)
题型一 计算三重积分·····	(192)
题型二 更换三重积分次序·····	(193)
题型三 计算对弧长的线积分·····	(194)
题型四 计算对坐标的线积分·····	(195)
题型五 计算对面积的面积分·····	(199)
题型六 计算对坐标的面积分·····	(202)
第二节 多元积分应用·····	(204)
■ 考试内容要点精讲·····	(204)
■ 常考题型的解题方法与技巧·····	(205)
题型一 求几何量·····	(205)
题型二 计算物理量·····	(205)
第三节 场论初步·····	(207)
■ 考试内容要点精讲·····	(207)
■ 常考题型的解题方法与技巧·····	(207)
题型一 梯度 散度 旋度计算·····	(207)
附录:2012年考研数学试题(高等数学)·····	(211)

第一章 函数极限连续

第一节 函数

■ 考试内容要点精讲

1. 函数的概念(定义、定义域、对应法则、值域)

2. 函数的性态

1) 单调性

定义 单调增: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

单调不减: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

判定 (1) 定义;

(2) 导数: 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则

a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调增;

b) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 单调不减.

2) 奇偶性

定义 偶函数: $f(-x) = f(x)$; 奇函数: $f(-x) = -f(x)$.

判定 (1) 定义;

(2) 设 $f(x)$ 可导, 则:

a) $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数;

b) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是奇函数.

(3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数;

连续的偶函数其原函数之一是奇函数.

3) 周期性

定义 $f(x+T) = f(x)$

判定 (1) 定义;

(2) 可导的周期函数其导函数为周期函数;

(3) 周期函数的原函数不一定是周期函数.

4) 有界性

定义 若 $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$; 则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

- 判定**
- (1) 定义;
- (2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界;
- (3) $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a, b) 上有界;
- (4) $f'(x)$ 在区间 I (有限) 上有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 I 上有界.

3. 复合函数与反函数 (函数分解成简单函数的复合, 分段函数的复合)

4. 基本初等函数与初等函数

基本初等函数:

我们把幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数统称为初等函数. 了解它们的定义域, 性质, 图形.

初等函数:

由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得且能用一个解析式表示的函数. 称为初等函数.

■ 常考题型的解题方法与技巧

题型一 复合函数

例 1.1 已知 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0, a]$, ($a > 0$), 则 $f(x)$ 的定义域为

- (A) $[-1, a-1]$. (B) $[1, a+1]$.
 (C) $[a, a+1]$. (D) $[a-1, a]$.

解 应选(B).

例 1.2 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 由 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 知

$$e^{\varphi^2(x)} = 1-x$$

$$\varphi^2(x) = \ln(1-x) \quad (x \leq 0)$$

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)} \quad (x \leq 0)$$

例 1.3 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| < 1 \\ |x|-2, & 1 \leq |x| \end{cases}$. 试求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)] = \begin{cases} 0, & 1 \leq |x| < 2 \\ 1, & |x| < 1 \text{ 或 } |x| \geq 2 \end{cases}$

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$$

题型二 函数性态

例 1.4 下列四个函数

$$(1) x \sin \frac{1}{x} \quad x \in (0, +\infty) \quad (2) \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \quad x \in (0, +\infty)$$

$$(3) \frac{1}{x} \sin x \quad x \in (0, +\infty) \quad (4) \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad x \in (0, 2013)$$

在给定区间上有界的共有

(A) 0 个. (B) 1 个. (C) 2 个. (D) 3 个.

解 应选(D)

$$(1) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

且 $x \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 则 $x \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界.

$$(2) \text{ 令 } f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x},$$

$$\text{取 } x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (n \text{ 为正整数})$$

显然 $x_n \in (0, +\infty)$

$$\text{而 } f(x_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时})$$

则 $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界.

$$(3) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$$

且 $\frac{1}{x} \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 则 $\frac{1}{x} \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界.

$$(4) \text{ 令 } g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad x \in (0, 2013)$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{\sin x}{x} \quad x \in (0, 2013)$$

由(3)知 $g'(x)$ 在 $(0, 2013)$ 上有界, 则 $g(x)$ 在 $(0, 2013)$ 上有界.

例 1.5 以下四个命题中正确的是

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

解法 1 直接法

由于 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 故选 (C).

解法 2 排除法

令 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, 显然, $f'(x)$ 和 $f(x)$ 都在 $(0,1)$ 内连续, 但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界, 则 (A)、(B) 都不正确.

令 $f(x) = \sqrt{x}$, 显然 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 但 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 内无界, 则 (D) 不正确.

故应选 (C).

例 1.6 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a < x < b$ 时, 有

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$. (B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$. (D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$.

解 令 $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, 则

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0$$

$F(x)$ 单调减, 由 $a < x < b$ 知

$$F(b) < F(x), \text{ 即 } \frac{f(b)}{g(b)} < \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f(x)g(b) > f(b)g(x)$$

故应选 (A).

例 1.7 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

解 本题要用到一个常用的结论:

若 $f'(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f(x) < f(x_0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f(x) > f(x_0)$. 若 $f'(x_0) < 0$ 有相应的结论. (利用导数定义和极限的保号性易证明此结论)

由以上结论知 (C) 正确.

注 本题选 (A) 是一种典型的错误, 原因是由 $f'(x_0) > 0$, 得不到一定存在 x_0 的某邻域, 在此邻域内 $f(x)$ 单调增. 反例如下:

$$\text{令 } f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 1 > 0$$

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}$

取 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, 则 $f'(x_n) = 1 - 2 = -1 < 0$.

取 $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则 $f'(y_n) = 1 + \frac{4}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} > 0$

由于以上的两种点 x_n 和 y_n 在 $x=0$ 的任何邻域内都存在, 则在 $x=0$ 的任何邻域内既存在的导数为正的点, 也存在导数为负的点, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都不单调增.

第二节 极限

■ 考试内容要点精讲

1. 极限概念

1) 数列极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A: \forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|a_n - A| < \epsilon$.

2) 函数极限:

(1) 自变量趋于无穷大时函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A:$$

$\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A:$$

$\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A:$$

$\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $x < -X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

(2) 自变量趋于有限值时函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A:$$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-);$

右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+);$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

几个值得注意的极限

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty \text{ (错);}$$

正确的是: $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ (错);}$$

正确的是: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = +\frac{\pi}{2}$.

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \text{ (错);}$$

正确的是: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ (错);}$$

正确的是: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1 \text{ (错);}$$

正确的是: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1$.

2. 极限性质

1) 局部有界性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 某去心邻域内有界.

2) 有理运算性质: 若 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$.

那么: $\lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$;

$$\lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

两个常用的结论:

$$\textcircled{1} \lim \frac{f(x)}{g(x)} \text{ 存在, } \lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0;$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, \lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0.$$

3) 保号性: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则

(1) 若 $A > 0$ (或 $A < 0$) $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

(2) 若 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$) $\Rightarrow A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

4) 极限与无穷小之间的关系:

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim \alpha(x) = 0.$$

3. 极限存在准则

1) 夹逼准则: 若存在 N , 当 $n > N$ 时, $x_n \leq y_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

2) 单调有界准则: 单调有界数列必有极限.

4. 无穷小量

1) 无穷小量的概念:

若 $\lim f(x) = 0$, 称 $f(x)$ 为无穷小量 ($x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$).

2) 无穷小的比较: 设 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0$.

(1) 高阶: 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$; 记为 $\beta(x) = o(\alpha(x))$;

(2) 同阶: 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C \neq 0$;

(3) 等价: 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$; 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

(4) 无穷小的阶: 若 $\lim \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = C \neq 0$, 称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小.

3) 无穷小量的性质

(1) 有限个无穷小量之和仍为无穷小;

(2) 有限个无穷小量之积仍为无穷小;

(3) 无穷小量与有界变量之积为无穷小量.

5. 无穷大量

1) 无穷大量的概念: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量.

2) 常用的一些无穷大量的比较:

(1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时

$$\ln^{\alpha} x \ll x^{\beta} \ll a^x$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\ln^{\alpha} n \ll n^{\beta} \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.

3) 无穷大量与无界变量的关系: 无穷大量 \Rightarrow 无界变量

无穷大量一定是无界变量; 但无界变量不一定是无穷大量.

数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量: $\forall M > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n| > M$.

数列 $\{x_n\}$ 是无界变量: $\forall M > 0, \exists N$, 使 $|x_N| > M$.

例 数列 $x_n = [1 + (-1)^n]n$ 是无界变量, 但不是无穷大量.

4) 无穷大量与无穷小量的关系:

无穷大量的倒数是无穷小量; 无穷小量 (恒不为零) 的倒数是无穷大量.

■ 常考题型的解题方法与技巧

题型一 极限的概念、性质及存在准则

例 1.8 “对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

- (A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

解 本题主要考查对数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 定义的理解. 其定义是“对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$ ” 由 ε 的任意性可知, 这与本题中的说法是等价的, 故应选 (C).

例 1.9 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.
(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

解法 1 直接法

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$,

故选 (D).

解法 2 排除法

由题设条件可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, 但这只能得到, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 后有 $a_n < b_n < c_n$; 而不能得到对任意的 n 有 $a_n < b_n < c_n$. 从而得知 (A)、(B) 均不正确.

若取 $a_n = \frac{1}{n^2}, c_n = n$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$,

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$

从而得知 (C) 不正确, 故应选 (D).

例 1.10 设对任意的 x 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

- (A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定为零.
(C) 一定不存在. (D) 不一定存在.

解 令 $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}, f(x) = 1$.

显然 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 此时

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

则 (A) 和 (C) 不正确.