西安交大考研

海天教育
HAITIAN EDUCATION

数学考研新干线

高等数学

■ 主　编　武忠祥
■ 副主编　张　宇　杨　超

2013

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS
西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

2013版

数学考研新干线

高 等 数 学

主　编　武忠祥

副主编　张　宇　杨　超

西安交通大学出版社

内容简介

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)编写的辅导讲义,力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯的错误与疑惑。同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学们梳理解题思路,掌握常用的解题方法和技巧。

图书在版编目(CIP)数据

数学考研新干线 高等数学(2013版)/武忠祥主编. —西安:西安交通大学出版社,2012.5
ISBN 978-7-5605-4293-5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①武… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解
Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第074173号

书　　名	数学考研新干线 高等数学(2013版)
主　　编	武忠祥
副 主 编	张 宇 杨 超
责任编辑	叶 涛
出版发行	西安交通大学出版社 (西安市兴庆南路10号 邮政编码710049)
网　　址	http://www.xjtupress.com
电　　话	(029)82668357 82667874(发行部) (029)82668315 82669096(总编办)
传　　真	(029)82668280
印　　刷	北京旺鹏印刷有限公司
开　　本	787mm×1 092mm 1/16 **印张** 14 **字数** 335千字
版次印次	2012年5月第3版 2012年5月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5605-4293-5/O·393
定　　价	25.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248 (029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

前 言

本书在2012版基础上，根据考研数学试题的变化趋势，对其部分内容进行了适当的调整和补充。另外，各章都新增加了练习题精选和练习题答案与提示，以便考生通过练习掌握各章的题型和解题方法。

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)而编写的辅导讲义，由编者多年来在考研辅导班的讲稿改写而成.全书共分九章及一个附录，每章均由考试内容要点精讲和常考题型的方法与技巧两部分组成.

本书力求用不多的篇幅，在较短的时间内帮助同学理解基本概念，掌握基本理论、基本公式、重点及难点，澄清常犯的错误与疑惑.同时，通过典型例题，在归纳题型的基础上帮助同学们梳理解题思路，掌握常用的解题方法和技巧.

为了考研同学使用方便，本书将数学一至数学三共同要求的内容编写在前面.其中数学二只要求前六章，数学三只要求前七章，数学一全要.

希望本讲义能对复习考研的同学有较大的帮助.由于编者水平有限，疏漏和错误之处在所难免，欢迎批评指正.

祝同学们在考研的路上一路顺利！

编　者

2012年3月

目　录

第一章　函数 极限 连续

第一节　函数

■ 考试内容要点精讲

1. 函数的概念(定义、定义域、对应法则、值域)

2. 函数的性态

1) 单调性

$\boxed{\text{定义}}$　单调增：　$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

单调不减：　$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$

$\boxed{\text{判定}}$　(1) 定义；

(2) 导数:设 $f(x)$ 在区间 I 上可导,则

a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调增；

b) $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)$ 单调不减.

2) 奇偶性

$\boxed{\text{定义}}$　偶函数：$f(-x) = f(x)$；奇函数：$f(-x) = -f(x)$.

$\boxed{\text{判定}}$　(1) 定义；

(2) 设 $f(x)$ 可导,则：

a) $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数；

b) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是奇函数.

(3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数；

连续的偶函数其原函数之一是奇函数.

3) 周期性

$\boxed{\text{定义}}$　$f(x+T) = f(x)$

$\boxed{\text{判定}}$　(1) 定义；

(2) 可导的周期函数其导函数为周期函数；

(3) 周期函数的原函数不一定是周期函数.

4) 有界性

$\boxed{\text{定义}}$　若 $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$；则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

判定 (1) 定义；

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

(3) $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 上有界；

(4) $f'(x)$ 在区间 I(有限) 上有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 I 上有界.

3. 复合函数与反函数（函数分解成简单函数的复合，分段函数的复合）

4. 基本初等函数与初等函数

基本初等函数：

我们把幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数统称为初等函数. 了解它们的定义域，性质，图形.

初等函数：

由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数. 称为初等函数.

■ 常考题型的解题方法与技巧

题型一 复合函数

例 1.1 已知 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,a]$，$(a>0)$，则 $f(x)$ 的定义域为

(A) $[-1,a-1]$.　　(B) $[1,a+1]$.

(C) $[a,a+1]$.　　(D) $[a-1,a]$.

解 应选(B).

例 1.2 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 由 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，知

$$e^{\varphi^2(x)}=1-x$$

$$\varphi^2(x)=\ln(1-x)\quad(x\leqslant 0)$$

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}\quad(x\leqslant 0)$$

例 1.3 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1\\ |x|-2, & 1\leqslant|x|\end{cases}$. 试求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}0, & 1\leqslant|x|<2\\ 1, & |x|<1 \text{ 或 } |x|\geqslant 2\end{cases}$

$$g[f(x)]=\begin{cases}2, & x<0\\ -1, & x\geqslant 0\end{cases}$$

题型二　函数性态

例 1.4　下列四个函数

(1) $x\sin\frac{1}{x}$　$x\in(0,+\infty)$　　(2) $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$　$x\in(0,+\infty)$

(3) $\frac{1}{x}\sin x$　$x\in(0,+\infty)$　　(4) $\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$　$x\in(0,2013)$

在给定区间上有界的共有

(A) 0 个.　(B) 1 个.　(C) 2 个.　(D) 3 个.

解　应选(D)

(1) 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$,

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$$

且 $x\sin\frac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$上连续,则 $x\sin\frac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$上有界.

(2) 令 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$,

取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$　(n 为正整数)

显然 $x_n\in(0,+\infty)$

而 $f(x_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$　(当 $n\to\infty$ 时)

则　$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$上无界.

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\sin x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$

且$\frac{1}{x}\sin x$ 在$(0,+\infty)$上连续,则$\frac{1}{x}\sin x$ 在$(0,+\infty)$上有界.

(4) 令 $g(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,　$x\in(0,2013)$

则　$g'(x)=\frac{\sin x}{x}$　$x\in(0,2013)$

由(3)知 $g'(x)$ 在$(0,2013)$上有界,则 $g(x)$ 在$(0,2013)$上有界.

例 1.5　以下四个命题中正确的是

(A) 若 $f'(x)$ 在$(0,1)$内连续,则 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在$(0,1)$内连续,则 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

解法 1 直接法

由于 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，故选(C).

解法 2 排除法

令 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，显然，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 都在 $(0,1)$ 内连续，但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界，则(A)、(B) 都不正确.

令 $f(x)=\sqrt{x}$，显然 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，但 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 内无界，则(D) 不正确.

故应选(C).

例 1.6 设 $f(x)$、$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$.　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$.　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

解 令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$$

$F(x)$ 单调减，由 $a<x<b$ 知

$F(b)<F(x)$，即 $\dfrac{f(b)}{g(b)}<\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$f(x)g(b)>f(b)g(x)$

故应选(A).

例 1.7 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

解 本题要用到一个常用的结论：

若 $f'(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f(x)<f(x_0)$；当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f(x)>f(x_0)$. 若 $f'(x_0)<0$ 有相应的结论.（利用导数定义和极限的保号性易证明此结论）

由以上结论知(C) 正确.

注 本题选(A)是一种典型的错误，原因是由 $f'(x_0)>0$，得不到一定存在 x_0 的某邻域，在此邻域内 $f(x)$ 单调增. 反例如下：

$$令\ f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=1>0$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}$

取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，则 $f'(x_n)=1-2=-1<0$.

取 $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则 $f'(y_n)=1+\frac{4}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}>0$

由于以上的两种点 x_n 和 y_n 在 $x=0$ 的任何邻域内都存在，则在 $x=0$ 的任何邻域内既存在的导数为正的点，也存在导数为负的点，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都不单调增.

第二节　极 限

■　考试内容要点精讲

1. 极限概念

1）数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|a_n-A|<\varepsilon$.

2）函数极限：

（1）自变量趋于无穷大时函数的极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

（2）自变量趋于有限值时函数的极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\boxed{\text{左极限}}$　$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)$；

$\boxed{\text{右极限}}$　$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)$；

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

几个值得注意的极限

① $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$；$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

② $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan \dfrac{1}{x} = +\dfrac{\pi}{2}$.

③ $\lim\limits_{x\to \infty} e^{x} = \infty$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x} = +\infty$；$\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x} = 0$.

④ $\lim\limits_{x\to \infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to +\infty} \arctan x = +\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

⑤ $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$；$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1$.

2. 极限性质

1）局部有界性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在点 x_0 某去心邻域内有界.

2）有理运算性质：若 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$.

那么：$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$；

$\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$；

$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$

两个常用的结论：

① $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，$\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$；

② $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$，$\lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0$.

3）保号性：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则

(1) 若 $A > 0$（或 $A < 0$）$\Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

(2) 若 $\exists \delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$）$\Rightarrow A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

4）极限与无穷小之间的关系：

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\lim \alpha(x) = 0$.

3. 极限存在准则

1）夹逼准则：若存在 N，当 $n > N$ 时，$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

2）单调有界准则：单调有界数列必有极限.

4. 无穷小量

1）无穷小量的概念：

若 $\lim f(x) = 0$，称 $f(x)$ 为无穷小量（$x \to x_0$ 或 $x \to \infty$）.

2）无穷小的比较：设 $\lim\alpha(x) = 0$，$\lim\beta(x) = 0$.

（1）高阶：若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$；记为 $\beta(x) = o(\alpha(x))$；

（2）同阶：若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C \neq 0$；

（3）等价：若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$；记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$；

（4）无穷小的阶：若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = C \neq 0$，称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小.

3）无穷小量的性质

（1）有限个无穷小量之和仍为无穷小；

（2）有限个无穷小量之积仍为无穷小；

（3）无穷小量与有界变量之积为无穷小量.

5. 无穷大量

1）无穷大量的概念：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量.

2）常用的一些无穷大量的比较：

（1）当 $x \to +\infty$ 时

$\ln^\alpha x \ll x^\beta \ll a^x$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.

（2）当 $n \to \infty$ 时

$\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$

其中 $\alpha > 0$，$\beta > 0$，$a > 1$.

3）无穷大量与无界变量的关系：无穷大量 $\Rightarrow$ 无界变量

无穷大量一定是无界变量；但无界变量不一定是无穷大量.

数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量：$\forall M > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n| > M$.

数列 $\{x_n\}$ 是无界变量：$\forall M > 0$，$\exists N$，使 $|x_N| > M$.

例　数列 $x_n = [1 + (-1)^n]n$ 是无界变量，但不是无穷大量.

4）无穷大量与无穷小量的关系：

无穷大量的倒数是无穷小量；无穷小量（恒不为零）的倒数是无穷大量.

■ 常考题型的解题方法与技巧

题型一 极限的概念、性质及存在准则

例 1.8 "对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$" 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

解 本题主要考查对数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 定义的理解. 其定义是"对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$" 由 ε 的任意性可知，这与本题中的说法是等价的，故应选(C).

例 1.9 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.

解法 1 直接法

由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n = \infty$，

故选(D).

解法 2 排除法

由题设条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n < \lim\limits_{n\to\infty} c_n$，但这只能得到，存在 $N>0$，当 $n > N$ 后有 $a_n < b_n < c_n$；而不能得到对任意的 n 有 $a_n < b_n < c_n$.

从而得知(A)、(B) 均不正确.

若取 $a_n = \dfrac{1}{n^2}$，$c_n = n$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2} = 0$

从而得知(C) 不正确，故应选(D).

例 1.10 设对任意的 x 总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

(A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在. (D) 不一定存在.

解 令 $\varphi(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$，$g(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$，$f(x) = 1$.

显然 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$，此时 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

则(A) 和(C) 不正确.