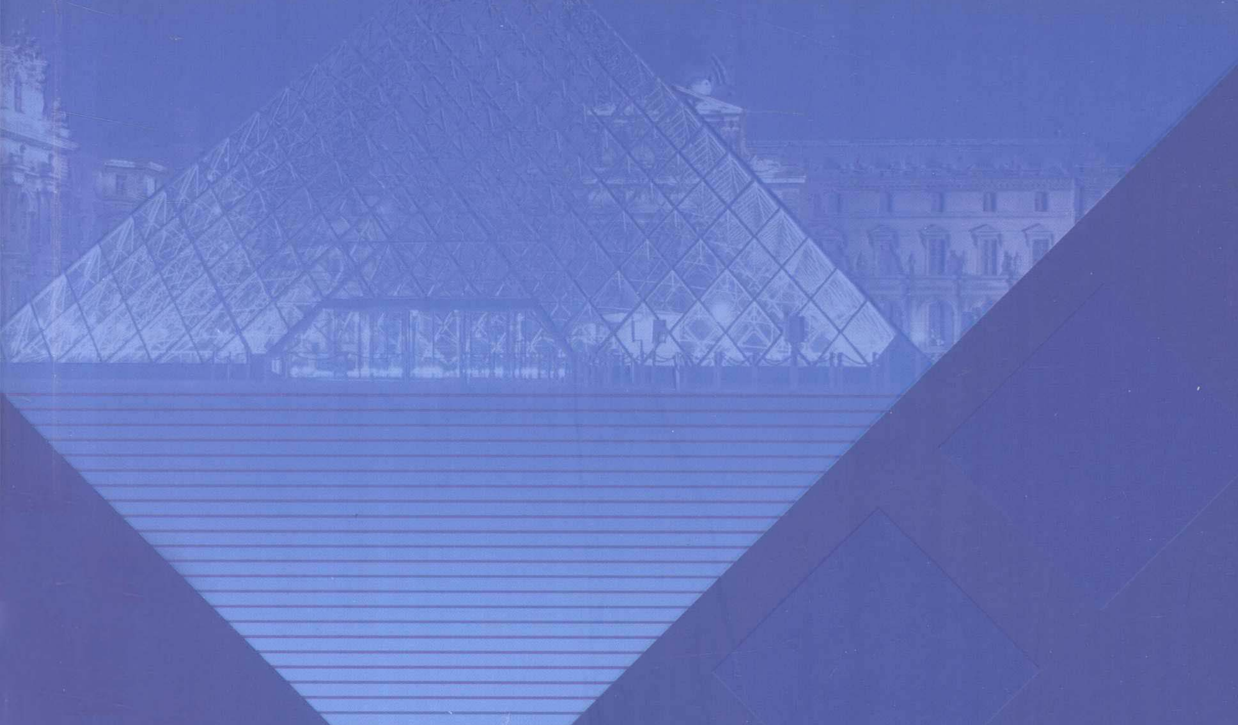
"十一五"国家重点图书

法兰西数学
精品译丛

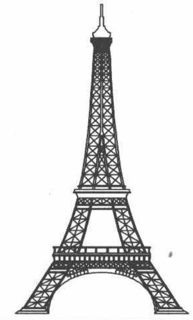
无穷小计算

□ J. 迪厄多内　著
□ 余家荣　译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

"十一五"国家重点图书

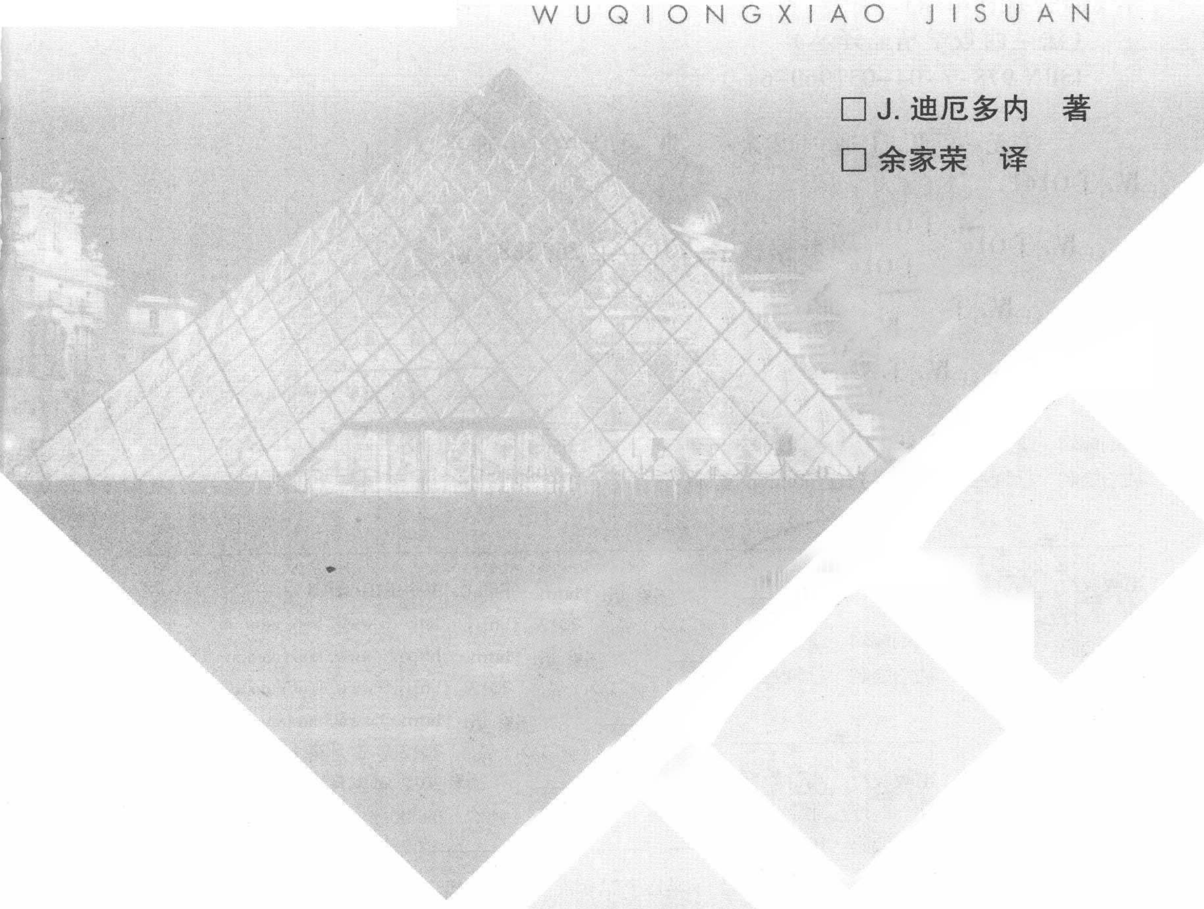


法兰西数学
精品译丛

数学天元基金资助项目

无穷小计算

WUQIONGXIAO JISUAN



□ J. 迪厄多内 著
□ 余家荣 译

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字:01-2009-4448 号
Calcul infinitésimal
Jean Dieudonné
HERMANN, ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

图书在版编目(CIP)数据

无穷小计算 /(法)迪厄多内著;余家荣译. --北京:高等教育出版社,2012.3
(法兰西数学精品译丛)
ISBN 978-7-04-031960-6

Ⅰ.①无… Ⅱ.①迪… ②余… Ⅲ.①无穷小-研究 Ⅳ.①O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 269588 号

策划编辑	李 鹏	责任编辑	李 鹏	封面设计	张 楠	版式设计	范晓红
插图绘制	杜晓丹	责任校对	胡美萍	责任印制	张泽业		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	三河市华润印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	27.5	版 次	2012 年 3 月第 1 版
字 数	540 千字	印 次	2012 年 3 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	69.00 元

物 料 号 31960-00

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦茨及利翁斯等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等

教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月

序

"现在的大学生不再会计算了", 常常听到物理学家和工程师像这样抱怨当前的数学教学. 必须承认这种抱怨是有理由的. 当我们看到一位理学院二三年级的大学生花了十分钟才费力做出一次变数代换或分部积分时, 就不能不感到十分厌烦, 特别是 (情况有时是这样) 当这位大学生还自以为是说出一些他所不懂的无用的废话, 来为他的无知和笨拙加盐添醋的时候①.

必须不要怕麻烦反复说明没有与 "经典数学" 对立的 "现代数学", 只有从过去的数学延续下来的今天的数学, 它们之间没有鸿沟, 而后者首先是用来解决前人留给我们的重大问题的. 如果为此在数学中引进相当多的抽象新概念, 那么只是因为这些概念可把研究的注意力集中到问题的核心, 而不考虑次要的细节, 从而往往使得在不到 50 年前还认为不能达到的领域中, 可以大踏步前进. 为了爱好抽象而抽象的数学家, 最多只是个平庸的数学家.

在数学中引进新概念的一个不可忽视的后果是: 这些概念可用来 "清洗" 数学基础 (特别在代数以及几何中) 的教学; 可笑的传统使得其中充满了废话以及完全无用甚至有害的讲述②. 可是当然所谓 "经典" 数学的实体没有受到损害, 而且近代分析的基础即无穷小计算总是前三世纪的数学家所造成的最好的工具. 想要忽视它而一下子沉浸在最近代的泛函分析中, 这是在沙上建房, 直接走向无成果和说废话.

直到今年之前, 要回避这种障碍是很难的: 学生们一方面接受着官僚体系所领导的中学教育, 其中数学的教学内容八十年以来就和现代数学脱节; 另一方面, 到了

①译者注: 这种情况是当年法国数学教学改革矫枉过正所造成的后果, 责任不在当年的青年大学生.

②译者注: 这些说法值得探讨. 据译者所知点滴情况: 当年法国数学教学改革中, 曾经在初中一年级讲授集合论, 并且认为几何可完全用代数来代替, 曾经取消过中学中初等几何的教学. 这些都造成过一些不良后果.

大学里, 又要面对为与研究工作 "紧密结合" 做准备的近代分析课程. 在两者之间, 他们只有一年在 "预科"① 开始学习无穷小分析, 学习顺利操作的技巧. 很快经验证明了这还不够, 于是引进了名为 "物理中的数学方法" 课程作为补充; 而这门课程往往被数学家们删除了, 因为他们把严格看作比有用更重要. 于是在许多理学院中, 只留下了几乎没有改变的抽象分析课程, 其中着重讲原理而不重视计算.

新的教学计划把大学 "第一阶段" 展开成两年, 这样应当使教学重新得到平衡, 对认真的大学生提供坚实的技巧基础, 使他此后能领会更抽象的概念, 而不致只会鹦鹉学舌. 幸好在新的教学计划中, 特别是在二年级课程中, 包含了经典分析的主要部分, 像解析函数论及微分方程论, 这些都是可能并且必须学习的, 并不需要多作抽象的准备. 本书首先是用来讲述这些基本技能的 (假定已知第一阶段一年级所学的微积分基础).

因此在想学近代分析以前, 必须 "学会计算". 可是什么是 "计算"? 事实上有两种易于混淆的 "计算". 一方面有 "代数计算", 可以 (过于简单地) 说它的特性是求出等式; 方程的解的公式 (盎格鲁 - 撒克逊型的 "封闭公式") 提供了等式的一种原型. 这种方式对使用数学的人是有吸引力的. 我多次接触到一些工程师或物理学家, 他们认为数学必须是自动提供解题公式的一种工具.

在分析中也有这种类型的关系式, 并且往往可能很重要; 柯西公式及傅里叶级数展开式就是典型的实例. 可是我认为求这类关系式不是无穷小计算的实质. 物理学家有理由认为: 如果一个定理不能从数值上计算出所求的数或函数, 那么它就是没有意义的. 他们不需要纯粹数学家的不能用于计算的 "存在定理". 可是说到数值计算, 就要说到 "逼近". 只有给出了近似计算一个实数的步骤时, 才能说这个实数是 "已知的" (数学家想做到任意小的逼近, 而使用数的人的要求却要低得多). 如果记住大学第一阶段的数学教学既是用来培养数学家的, 至少也是同样用来培养未来的物理学家和化学家的, 就会了解为什么本书中特别重视近似计算这一方面. 我不是要写一本专门讲数值计算的书, 这是另一专门课程的主题. 我注意不引进不能作数值计算的任何概念, 而且需要的话, 在可作计算的每一步, 指出理论上的计算方法.

而且纯粹数学家轻视无穷小计算的这一 "平凡的" 一面, 应当是错的. 为了懂得直到最抽象思维所必需的 "分析的意义", 务必学会区分: 什么是 "大", 什么是 "小", 什么是 "重要的", 什么是 "可忽略的". 换句话说, 本书所讲的无穷小计算中, 使用不等式要比使用等式多得多, 而且可用三个词作为本书的提要:

求上界, 求下界, 逼近.

采取这种观点不是为了方便而不要严格, 也不是要使无穷小计算成为一些窍门. 我们应该培养能思维的人, 而不是制造机器人, 应该使大学生懂得他所做的, 而不是教他机械的操作方法. 懂得 "分析的意义", 就是懂得在无穷小计算中各种运算的 "直观" 概念, 而且这只有通过使用很多实例才能懂得. 可是保证人们真正达到这阶段的

①译者注: 这是指原先法国大学中的第一年, 1966 年取消.

考验是: 知道所用概念的确切定义, 并且用它们作出正确的证明, 因为证明最终不过是把直观 "写成形式" 而已.

在这一点上, 物理学家往往嘲笑纯粹数学家总是要证明一切, 要 "搞得过于繁琐" 来证明 "明显的" 结果. 他们并非总是不对. 为了不被证明中巧妙的想法所困扰, 初学者承认可以接受的一些结果, 把精力留下来领会不 "明显的" 新概念是有益的①. 因此我毫不犹豫承认分析中的一些基本定理②, 或向大学生指出: 在初读本书时, 可以不读用小字印出的较长或较精细的一些证明.

可是当物理学家倾向于把完全不明显的东西看作 "明显的", 并且忘记了我们的 "直观" 是很简陋的工具, 有时会把我们引入歧途时, 他们就是在危险的地方冒险了. 与他们之中许多人所相信的相反, 为了表明他们不加讨论就承认的一些结果是错的, 不需要去找像没有导数的连续函数那样 "奇怪的" 函数; "龙格现象" (第九章, 附录) 表明: 对于我们能想到那样 "完美的" 解析函数, 多项式插值的经典方法极有可能是发散的; 还有在 $|z|<1$ 内解析、在整个圆盘 $|z|\leqslant 1$ 上连续的函数, 而它把圆 $|z|=1$ 变换成充满一个正方形的曲线③.

因此 "诚朴人的朴实信念" 有危险. 在与认真的实验人员接触时, 对于他们极其细心以保证测量正确及避免虚假说明, 我们不得不感到震惊. 正确使用数学也要同样细心. 在某些领域要求得到严格的工作习惯, 而在其他领域则任其 (或甚至鼓励) 随意、模糊和差不多 —— 我不认为这是好的教学方法.

当然, 我没有完全按照官方的大纲编写本书. 对于学完第一阶段、并且打算取得物理或 (纯粹或应用) 数学学士或硕士学位的大学生, 我首先要写出看来最有用的内容. 于是我完全没有讲重积分与微分形式. 我还要说一说对于一些同事所讲授 "斯托克斯型公式" 的想法: 他们在第一阶段一年级所讲的不涉及精细结果, 我看这样完全足够了, 因为按这一阶段大学生的水平, 讲精细结果只能是无益的④. 相反地, 本书中插入了无穷小计算中的许多问题, 其中或者在教学大纲中没有明确出现, 或者像微分方程的认真研究, 放在硕士阶段课程中我看是太晚了. 大体上说, 本书所讲的分析主要是实或复 "单变数" 分析⑤. 所有数学家都知道, 从单变数过渡到多变数是一次剧烈的 "跳跃", 由此带来很大的困难, 并且需要引进全新的方法. 另一方面, 单变数分析是研究更一般问题的主要工具. 把这种 "转移" 放在大学第一、二两阶段的结合点, 我看是完全合理的.

①在根本上, 这相当于增加公理的个数, 而这只是逻辑学家所反对的.

②所有这些结果都在我所著《近代分析基础》(巴黎, 戈第埃 - 维雅出版社, 1965 年版; 本书中记作 [FA]) 中证明了.

③见 [FA], 第九章, 12 节, 问题.5.

④按照新教学计划, 一般的严格斯托克斯公式在纯粹数学硕士学位的 C3 课程中讲授.

⑤当然, 在单复变函数论中, 涉及一点 "二维问题". 这对初等单实变函数论造成较大困难. 可是只要不从调和函数方面出发研究解析函数, 而是使用 "道路" 及 "环路" 作为工具, 有关理论基本上仍然是 "一维的".

按照现行课时, 在第一阶段二年级不可能教完本书中全部内容, 使用本书的教师或大学生必须在其中做出选择. 然而我们不禁希望有一天中学教育会把现在还在教的数学中一些旧内容放在历史的仓库里, 从而可把中学后三年空出的时间有效地用来教当前大学阶段一年级所教数学的大部分内容①. 这样最好把只是作为大学一年级教学大纲补充 (一般省略了) 的本书前四章内容, 加进教学大纲里, 而其余内容就可完全放在大学二年级课程中. 我认为领会了这些内容的大学生, 对于或者为了把他的数学知识应用于具体问题, 或者为了攀登更高的抽象水平, 再按现行纯粹数学硕士的教学计划学习, 都已做好足够的准备了②.

在编写本书时, 我有效地使用了尼斯理学院助教 C. 拉萨尔夫人很细心写出的有关课程的笔记, 还承她帮助我为本书审读校样. 我愉快地在这里向她道谢.

①比利时巴比的经验表明, 有了良好的中学教育, 对于学好了的中学生, 从 6 年级起就可在第二课堂有效地学习积分, 而不会遇到心理上的障碍.

②在本书中, 我没有讲述教学大纲中所涉及的代数、数值计算以及概率计算的初步概念等部分.

记号

在下列记号的定义中, 0 指的是预篇, 罗马数字指的是章数, 阿拉伯数字指的是章中的节数或习题号数.

$\mathrm{X}-\mathrm{Y}$	X 中不属于 Y 的元素所构成的集: 0, 1
(a,b)	两个个体的耦合: 0, 1
$\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$	两个集的乘积: 0, 1
$\mathrm{pr}_1 c, \mathrm{pr}_2 c$	第一及第二射影: 0, 1
$\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2\times\cdots\times\mathrm{X}_n$	n 个集的乘积: 0, 1
$\mathrm{pr}_j x$	x 的第 j 射影: 0, 1
X^n	等于 X 的 n 个集的乘积: 0, 1
$f\|\mathrm{A}$	函数或映射 f 在集 A 的限制: 0, 1
$f(\mathrm{A})$	集 A 由 f 映射出的像: 0, 1
$f^{-1}(\mathrm{B})$	集 B 由 f 映射出的逆像: 0, 1
f^{-1}	双射 f 的逆映射: 0, 1
$\mathbb{R}$	实数集: 0, 2
$\mathbb{C}$	复数集: 0, 2
$\mathcal{R}z, \Im z$	z 的实部与虚部: 0, 2
$[a,b],]a,b[, [a,b[,]a,b]$	$\mathbb{R}$ 中的区间: 0, 2
$[a,+\infty[,]a,+\infty[,]-\infty,a],]-\infty,a[$	无穷区间: 0, 2
$\sup\mathrm{A}$	集 $\mathrm{A}(\subset\mathbb{R})$ 的上确界: 0, 2
$\inf\mathrm{A}$	集 $\mathrm{A}(\subset\mathbb{R})$ 的下确界: 0, 2

$\sup\limits_{x\in A} f(x)$, $\inf\limits_{x\in A} f(x)$	A 中实函数 f 的上确界及下确界: 0, 3
$\boldsymbol{f}(a+), \boldsymbol{f}(a-)$	在点 $a \in \mathbb{R}$ 处的右极限及左极限: 0, 4
$\boldsymbol{f}'(t)$	向量值函数或映射的导数或导出映射: 0, 4
$\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt$	向量值函数的积分: 0, 4
$\operatorname{sgn} x$	$x(\in \mathbb{R})$ 的符号函数: 0, 4
$d(a, \mathrm{F})$	点 $a \in \mathbb{C}$ 到闭集 $\mathrm{F} \subset \mathbb{C}$ 的距离: 0, 5
$\Vert\boldsymbol{z}\Vert, \Vert A\Vert$	向量的范数, 矩阵的范数: I, 1
$\sum\limits_{n\in \mathrm{I}} u_n$	级数的部分和: I, 2
$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$	双向无穷级数的和: I, 2
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{a}_n$	向量项级数的和: I, 2
$\mathrm{N(A)}$	矩阵的范数: I, 习题 16
$f \sim g, f(x) \sim g(x)$	两函数等价: Ⅲ, 3
$f = O(g), f = o(g)$	比较两函数的兰道记号: Ⅲ, 3
$f \preccurlyeq g, f \prec\!\!\prec g, \lvert f\rvert \succ\!\!\succ g$	比较两函数的哈代记号: Ⅲ, 3
$\mathcal{E}$	比较阶: Ⅲ, 3
$\mathcal{C}$	广义渐近展开式中系数的集: Ⅲ, 7
$\int_a^{+\infty} f(t)dt$	反常积分: Ⅲ, 9
$\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt$	反常性在 a 或 b 的邻域中的积分: Ⅲ, 9
$\Gamma(x)$	第二类欧拉积分, 或伽马函数: Ⅲ, 9
γ	欧拉常数: Ⅲ, 11
$\mathrm{B}(p, q)$	第一类欧拉函数, 或 B (读为贝塔, 希腊字母): Ⅳ, 3
$d(f, g)$	两函数的距离: Ⅴ, 1
$f * \varphi$	两函数的卷积: Ⅴ, 4
$\mathrm{B}_n(f)$	伯恩斯坦多项式: Ⅴ, 附录
$f'(z), \mathrm{D}f(z), \dfrac{df}{dz}$	解析函数的导数: Ⅵ, 6
$e^z, \exp(z)$	复指数函数: Ⅵ, 8
$\cos z, \sin z$	复数的余弦与正弦: Ⅵ, 8

$\tan z, \cot z$	复数的正切与余切: VI, 8
$e^{Az}, \exp(Az)$	矩阵的指数映射: VI, 8
γ^0	道路 γ 的反向道路: VII, 1
$\gamma_1 \vee \gamma_2$	两条道路 γ_1 与 γ_2 的衔接: VII, 1
$\int_\gamma f(z)dz$	函数沿道路 γ 的积分: VII, 2
$\int_{z_0}^z f(u)du$	有原函数的解析函数 f 在 z_0 与 z 之间的积分: VII, 3
$j(a;\gamma)$	点 a 关于环路 γ 的指标: VII, 6
$\int_\gamma f(z)dz$	沿无终点的道路 γ 的积分: VII, 10
$\omega(a;f)$	亚纯函数 f 在点 a 的阶: VIII, 3
$\mathrm{Res}_a f$	f 在孤立奇点 a 的留数: VIII, 4
$\mathrm{Am}\, w$	w 的辐角: VIII, 9
$\log w$	w 的对数的主值或主支: VIII, 9
z^λ	z 的 λ 次幂的主值或主支: VIII, 9
$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$	无穷乘积: VIII, 11
$\Gamma(z)$	复域中的伽马函数: IX, 4
B_n	伯努利数: IX, 5
$\varphi_n(z)$	伯努利多项式: IX, 5
$\widetilde{\varphi}_n(z)$	按周期开拓了的伯努利多项式: IX, 5
$d_1(f,g), d_p(f,g)$	两函数的距离: IX, 9
$\mathrm{sn}\, z, \mathrm{cn}\, z, \mathrm{dn}\, z$	雅可比椭圆函数: X, 7
$R(t,s)$	预解矩阵: XII, 2
$\mathrm{H}_\lambda^1(z), \mathrm{H}_\lambda^2(z)$	汉克尔函数: XV, 2
$\mathrm{J}_\lambda(z)$	贝塞尔函数: XV, 4
$\mathrm{N}_\lambda(z)$	诺伊曼函数: XV, 4

目录