

2013 考研专家指导丛书

考研数学 必做客观题 1800题 精析 (经济类)



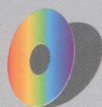
清华大学
北京大学
首都师范大学

王欢
王德军
童武

主编



由多次参加命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
严格按照最新考试大纲，突出重点



赠送MP3盘

考研名师童武教授

考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社

[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)

教·育·出·版·中·心

2013 考研专家指导丛书

考研数学 必做客观题 1800题 精析 (经济类)



清华大学
北京大学
首都师范大学

王欢
王德军
童武

主编



由多次参加命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
严格按照最新考试大纲，突出重点



赠送MP3盘

考研名师童武教授

考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社

[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)

教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学必做客观题 1800 题精析:经济类 / 王欢主编. —北京:中国石化出版社,2012.2
ISBN 978-7-5114-1440-3

I. ①考… II. ①王… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 022104 号

未经本社书面授权,本书任何部分不得被复制、抄袭,或者以任何形式或任何方式传播。版权所有,侵权必究。

中国石化出版社出版发行

地址:北京市东城区安定门外大街 58 号

邮编:100011 电话:(010)84271850

读者服务部电话:(010)84289974

<http://www.sinopec-press.com>

E-mail:press@sinopec.com

北京科信印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787×1092 毫米 16 开本 7.75 印张 189 千字

2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷

定价:20.00 元(赠送 MP3 盘)

前 言

中国加入 WTO 之后, 改革开放逐步深化, 经济发展速度日益加快, 社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进, 我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大, 这方面的教育也在稳步发展, 规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化, 考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说, 全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试, 即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才, 又有利于高等学校教学的原则, 强调在考查知识的基础上, 重点考查考生分析问题和解决问题的能力, 并且要采用科学的办法, 保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习, 顺利通过数学考试、赢取高分, 我们根据国家教育部制订的最新考试大纲, 基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验, 以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路, 倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越 135 分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越 135 分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越 135 分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选 1000 题(理工类)》、《考研数学最新精选 1000 题(经济类)》、《考研数学必做客观题 1800 题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题 1800 题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题 600 题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题 600 题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲,反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上,力求反映最新考试要求,紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,为考生全程领航和理性分析,引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔,编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作,积累了丰富的教学辅导经验,对历年考试情况比较了解,对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序,力求达到完美,但限于时间和水平,仍可能存在不足,纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编 者

目 录

第一部分 高等数学	(1)
第一章 函数、极限与连续	(2)
第二章 导数与微分	(10)
第三章 不定积分	(23)
第四章 定积分的计算及其应用	(26)
第五章 多元函数的微分与应用	(33)
第六章 二重积分	(40)
第七章 无穷级数	(45)
第八章 常微分方程与差分方程简介	(51)
第九章 函数方程与不等式证明	(54)
第十章 微积分在经济学中的应用	(55)
总复习题一	(56)
第二部分 线性代数	(60)
第一章 行列式	(61)
第二章 矩阵	(63)
第三章 向量	(72)
第四章 线性方程组	(77)
第五章 矩阵的特征值和特征向量	(82)
第六章 二次型	(86)
总复习题二	(88)
第三部分 概率论与数理统计	(92)
第一章 随机事件与概率	(93)
第二章 随机变量及其概率分布	(97)
第三章 多维随机变量及其概率分布	(102)

第四章	随机变量的数字特征	(106)
第五章	大数定律和中心极限定理	(110)
第六章	数理统计的基本概念	(111)
第七章	参数估计	(112)
第八章	假设检验	(114)
总复习题三		(115)

第一部分 高等数学

第一章 函数

第一章 函数、极限与连续

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界().

- (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

【答案】A

【解析】由函数 $f(x)$ 的表达式知, 它在实数轴上除点 $x=0$, $x=1$ 及 $x=2$ 外处处有定义, 在它的定义域上有

$$|f(x)| = \left| \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} \right| = \frac{1}{|(x-1)(x-2)|} \cdot \left| \frac{\sin(x-2)}{x-2} \right| \leq \frac{1}{|(x-1)(x-2)|}$$

由此可见 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有界, 而在任何以 $x=1$ 或 $x=2$ 为端点的开区间内无界, 故应选(A).

2. 设函数 $f(x) = x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是().

- (A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

【答案】B

【解析】由于 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \tan x e^{\sin x} = \infty$, 故 $f(x)$ 无界, 或考察 $f(x)$ 在 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ ($n=1, 2, \dots$) 的

函数值, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = +\infty$, 可见 $f(x)$ 是无界函数, 故应选(B).

3. 设 $\{x_n\}$ 是无界数列, 则下列结论中正确的是().

- (A) 若 $\{y_n\}$ 是有界数列, 则 $\{x_n - y_n\}$ 一定无界数列
 (B) 若 $\{y_n\}$ 是无界数列, 则 $\{x_n y_n\}$ 一定无界数列
 (C) 若 $\{y_n\}$ 是有界数列, 则 $\{x_n y_n\}$ 一定无界数列
 (D) 若 $\{y_n\}$ 是无界数列, 则 $\{x_n + y_n\}$ 必是无界数列

【答案】A

【解析】① $x_n = \begin{cases} n & \text{当 } n \text{ 为偶数时} \\ 0 & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}$ $y_n = \begin{cases} 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数时} \\ n & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}$

则 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 都无界, 但 $x_n \cdot y_n = 0$, $\{x_n y_n\}$ 有界, 故(B)不正确. ②若设 $y_n = 0$, x_n 如①, 则 $\{y_n\}$ 有界, $x_n \cdot y_n = 0$, $\{x_n y_n\}$ 有界, 故(C)不正确. ③ $x_n = n$, $y_n = -n$, $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都无界, 但 $x_n + y_n = 0$, $\{x_n + y_n\}$ 有界, 故(D)不正确.

4. 下列各式中正确的是().

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
 (C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = -e$ (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

【答案】A

【解析】由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{1+t}} = e^0 = 1$, 应选(A). 这里应

注意 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 - \frac{1}{x})^{-x}]^{-1} = e^{-1} \neq -e$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{x})^x]^{-1} = e^{-1} \neq e$$

5. 命题“① $f(x), g(x)$ 在 x_0 点的某邻域内都无界, 则 $f(x), g(x)$ 在 x_0 点的该邻域内一定无界; ② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \infty$; ③ $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 x_0 点的某邻域内均有界, 则 $f(x), g(x)$ 在 x_0 点的该邻域内一定有界; ④ $f(x), g(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 的无穷小量, 则 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中至少有一个是无穷小量.”中正确的是().

(A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ①④

【答案】B

【解析】设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数} \\ 1/x, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1/x, & x \text{ 为有理数, 且 } x \neq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

则 $f(x)g(x) = 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)g(x) \rightarrow 0$, 但 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 及 $g(x)$ 都不是无穷小, 命题④不正确; 且本例中 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $x = 0$ 的任何邻域内都无界, 但 $f(x)g(x) = 0$, 在与前相同的邻域内有界, 即命题①不正确.

6. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限().

(A) 等于2 (B) 等于0 (C) 为 ∞ (D) 不存在但不为 ∞

【答案】D

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) e^{\frac{1}{x-1}} = 2 \cdot 0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) e^{\frac{1}{x-1}} = \infty$, 当 $x \rightarrow 1$ 时函数没有极限, 也不是 ∞ , 故应选(D).

7. 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时().

(A) $f(x)$ 是 x 等价无穷小 (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小
(C) $f(x)$ 比 x 更高阶的无穷小 (D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小

【答案】B

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3}{1} = \ln 2 + \ln 3$, 且 $\ln 2 + \ln 3 \neq 1$, 所以应选(B).

8. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, ()是比其他三个更高阶的无穷小量.

(A) x^2 (B) $1 - \cos x$ (C) $\sqrt{1 - x^2} - 1$ (D) $x - \tan x$

【答案】D

【解析】是于 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sqrt{1 - x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$,

故 $x^2, 1 - \cos x, \sqrt{1 - x^2} - 1$ 是同阶无穷小, 可见应选(D).

9. 设 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -1$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln \cos x^2$ 是比 $x^n f(x)$ 高阶的无穷小量, 而 $x^n f(x)$ 是比 $e^{\sin^2 x} - 1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于().

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【答案】A

【解析】由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -1$ 知, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim -x^2$, 于是 $x^n f(x) \sim -x^{n+2}$.

又当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln \cos x^2 = \ln[1 + (\cos x^2 - 1)] \sim \cos x^2 - 1 \sim -\frac{1}{2}x^4$.

再根据题设有: $2 < n+2 < 4$, 可见 $n=1$, 故应选(A).

10. 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ().

(A) 存在且等于零

(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在

(D) 不一定存在

【答案】D

【解析】用排除法.

令 $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $f(x) = 1$, $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

显然 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$

且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} = 0$

此时 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

故(A)和(C)都不正确.

为排除(B), 再令 $\varphi(x) = x - \frac{1}{x^2}$, $f(x) = x$, $g(x) = x + \frac{1}{x^2}$, 显然 $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ 满足题设全部条件, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, 故应选(D).

11. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(e^{\sin x} - 1) + b(x - \sin x)}{c \tan x + d(1 - \cos x)} = 0$, 则().

(A) $a=b$, $b \neq 0$, c, d 不同时为 0

(B) $a \neq b$, $b=0$, c, d 为任意常数

(C) $c=0$, $d \neq 0$, a, b 为任意常数

(D) $c \neq 0$, $d=0$, a, b 为任意常数

【答案】A

【解析】原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(e^{\sin x} - 1) + b(x - \sin x)}{c \tan x + d(1 - \cos x)} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{\sin x} \cos x + b(1 - \cos x)}{c \sec^2 x + d \sin x}$

当 $a \neq 0$ 时, 原式 $\neq 0$, 故选(A).

12. 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有().

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

【答案】D

【解析】(A), (B) 显然不对, 因为由数列极限的不等式性质只能得出数列“当 n 充分大时”的情况, 不可能得出“对任意 n 成立”的性质. (C) 也明显不对, 因为“无穷小 · 无穷大”是未定型, 极限可能存在也可能不存在. 故应选(D).

13. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则().

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

【答案】B

【解析】排除法. 由于当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) \rightarrow 0$ 可能是无穷振荡的, $f'(x)$ 可能没有极限, 如 $f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sin x^2 + 2 \cos x^2$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在. 故 (A) 不对; 例如 $f(x) = \sin x \rightarrow 0 (x \rightarrow 0^+)$, 但 $f'(x) = \cos x \rightarrow 1 \neq 0$, 故 (C)、(D) 不对. 应选 (B).

14. 下列函数在其定义域内连续的是().

(A) $f(x) = \ln x + \sin x$

(B) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

【答案】A

【解析】由基本初等函数的连续性连续函数的四则运算法则知 $f(x) = \ln x + \sin x$ 在其定义域 $0 < x < +\infty$ 内连续, 故应选 (A).

15. 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ().

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在

(B) 有跳跃间断点 $x=0$

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在

(D) 有可去间断点 $x=0$

【答案】D

【解析】由 $f(x)$ 是奇函数有 $f(0) = 0$. 又因为 $f'(0)$ 存在, 所以

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

又因为 $x=0$ 是 $g(x)$ 的间断点, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f'(0)$, 所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点. 故应选 (D).

16. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点, 其结论为().

(A) 不存在间断点

(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$

(D) 存在间断点 $x=-1$

【答案】B

【解析】易计算得 $f(x) = \begin{cases} 1+x & |x| < 1 \\ \frac{1+x}{2} & |x| = 1, \text{ 讨论即知} \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

由题设得极限为

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & |x| < 1 \\ \frac{1+x}{2}, & |x| = 1 \text{ 可知 } x = -1, x = 1 \text{ 为函数的分段点, 作为函数图形可知 } x = 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

为 $f(x)$ 的间断点, $x = -1$ 为 $f(x)$ 的连续点, 因此应选 (B).

17. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$, $g(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则().

- (A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.
 (B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.
 (C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.
 (D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

【答案】D

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(\frac{1}{x}) \stackrel{\frac{1}{x}=y}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = a$,

从而, 当 $a=0=g(0)$ 时 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 当 $a \neq 0$ 时 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处间断, 即 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关, 故应选(D).

二、填空题

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \cdot \sin \frac{2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{6}{5}$

【解析】原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x^2+3x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{6}{5}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】e

【解析】

【解法一】 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)^x$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left[1 + \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)}$

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}} = 1$

故原式 $= e$.

【解法二】 设 $u = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $u \rightarrow 0$, 于是

原式 $= \lim_{u \rightarrow 0} (\sin u + \cos u)^{\frac{1}{u}} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin u + \cos u)}{u}}$

而由洛必达法则, 得

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin u + \cos u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u - \sin u}{\sin u + \cos u} = 1$$

故原式 $= e$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$, 其中 n 为给定的自然数.

【答案】 $e^{\frac{n+1}{2}}$

【解析】此极限是 1^∞ 型未定式.

$$\begin{aligned} \text{[解法一]} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{n} \right\} \end{aligned}$$

其中大括号内的极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 因此由洛必达法则, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}} = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

于是原式 $= e^{\frac{n+1}{2}}$

$$\text{[解法二]} \text{ 由于 } \frac{(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx})^{nx}}{2} = \left(1 + \frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{n} \right)^{\frac{1}{x}},$$

$$\begin{aligned} \text{又因} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{nx} \\ &= \frac{1}{n} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{nx} - 1}{x} \right] \\ &= \frac{1}{n} (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{2} (n+1) \end{aligned}$$

故原式 $= e^{\frac{1}{2}(n+1)}$.

4. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】1, -4

【解析】不难得出

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = \begin{cases} 0, & a \neq 1, \text{ 任何 } b \\ 1 - b, & a = 1, \text{ 任何 } b \end{cases}$$

从而, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则必须且只需 $a = 1$, $1 - b = 5$, 即 $a = 1$, $b = -4$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

$$\begin{aligned} \text{[解法一]} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4} \sin^2 2x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4} \sin 4x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\text{解法二}] \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x (1 - \sin^2 x)}{x^4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} + 1 \\
 &= 1 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = 1 + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

6. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x-1}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】 $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x} = \ln e^2 = 2$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(2x)} = 2, \quad \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{f(2x)} = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{f(u)} = 2$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{ax^2 - x + 2} + x + 1}{\sqrt{x^2 - \cos x}} = 3$, 则 $a =$ _____.

【答案】16

【解析】原式 $\stackrel{\text{令 } x = -t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{at^2 + t + 2} - t + 1}{\sqrt{t^2 - \cos t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{a + 1/t + 2/t^2} - 1 + 1/t}{\sqrt{1 - (\cos t)/t}} = \frac{\sqrt{a} - 1}{1} = 3$

故 $a = 16$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^x - 3^x}{x^2} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^x - 3^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \left[\left(1 + \frac{x}{3}\right)^x - 1 \right]}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 3^x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(1+x/3)} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \left(1 + \frac{x}{3}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3}}{x} = \frac{1}{3}$$

9. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) =$ _____.

【答案】2

【解析】原式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3\sqrt{n} - n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 2$

10. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $a =$ _____.

【答案】 $a = -\frac{3}{2}$

【解析】由 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}ax^2$, $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, 以及

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}a = 1$$

可得 $a = -\frac{3}{2}$

11. 设 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{1-2a}$

【解析】由于 $\ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right]^n = n \ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right]$, 利用等价无

穷小代换, 有 $\ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right] \sim \frac{1}{n(1-2a)} (n \rightarrow \infty)$

于是, 原式 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(1-2a)} = \frac{1}{1-2a}$

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n} =$ _____.

【答案】 $4e^{-1}$

【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n} \cdots \frac{n+n}{n}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[\sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} \right] = \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} \right] \right\}$
 $= e^{\int_0^1 \ln(1+x) dx} = 4e^{-1}$

第二章 导数与微分

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \cos \sqrt[5]{x^4}$ 在点 $x=0$ 处().
 (A) 不可导且 $f'(0) \neq \infty$ (B) 不可导且 $f'(0) = \infty$
 (C) 可导且 $f'(0) = 0$ (D) 可导且 $f'(0) = \frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt[5]{x^4} - 1}{x} = 0$, 即 $f'(0) = 0$.

2. 设 $f(x) = 3x^3 + x^2 |x|$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为().
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】C

【解析】因 $3x^3$ 处处任意阶可导, 只需考查 $x^2 |x| \triangleq \varphi(x)$, 它是分段函数, $x=0$ 是连接点.

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x^3, & x \leq 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < 0 \\ 3x^2, & x > 0 \end{cases}$$

又 $\varphi'_+(0) = (x^3)' \big|_{x=0} = 0$, $\varphi'_-(0) = (-x^3)' \big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \varphi'(0) = 0$;

$$\text{即 } \varphi'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x \leq 0 \\ 3x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

同理可得 $\varphi''(x) = \begin{cases} -6x, & x < 0 \\ 6x, & x > 0 \end{cases}$, $\varphi''(0) = 0$;

$$\text{即 } \varphi''(x) = \begin{cases} -6x, & x \leq 0 \\ 6x, & x \geq 0 \end{cases} = 6|x|,$$

因 $y = |x|$ 在 $x=0$ 不可导 $\Rightarrow \varphi'''(0)$ 不存在, 应选(C).

3. 由 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \left(0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的图形在 $(0, 1)$ 内().

- (A) 单调下降且向下凹 (B) 单调下降且向上凹
 (C) 单调上升且向下凹 (D) 单调上升且向上凹

【答案】B

【解析】当 $t \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ 时, $x \in (0, 1)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{3 \cos^2 t (-\sin t)} = -\tan t < 0$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-\tan t) = \frac{d}{dt}(-\tan t) \cdot \frac{dt}{dx} = -\sec^2 t \cdot \frac{1}{3 \cos^2 t (-\sin t)} = \frac{1}{3 \cos^4 t \sin t} > 0,$$

故选(B).