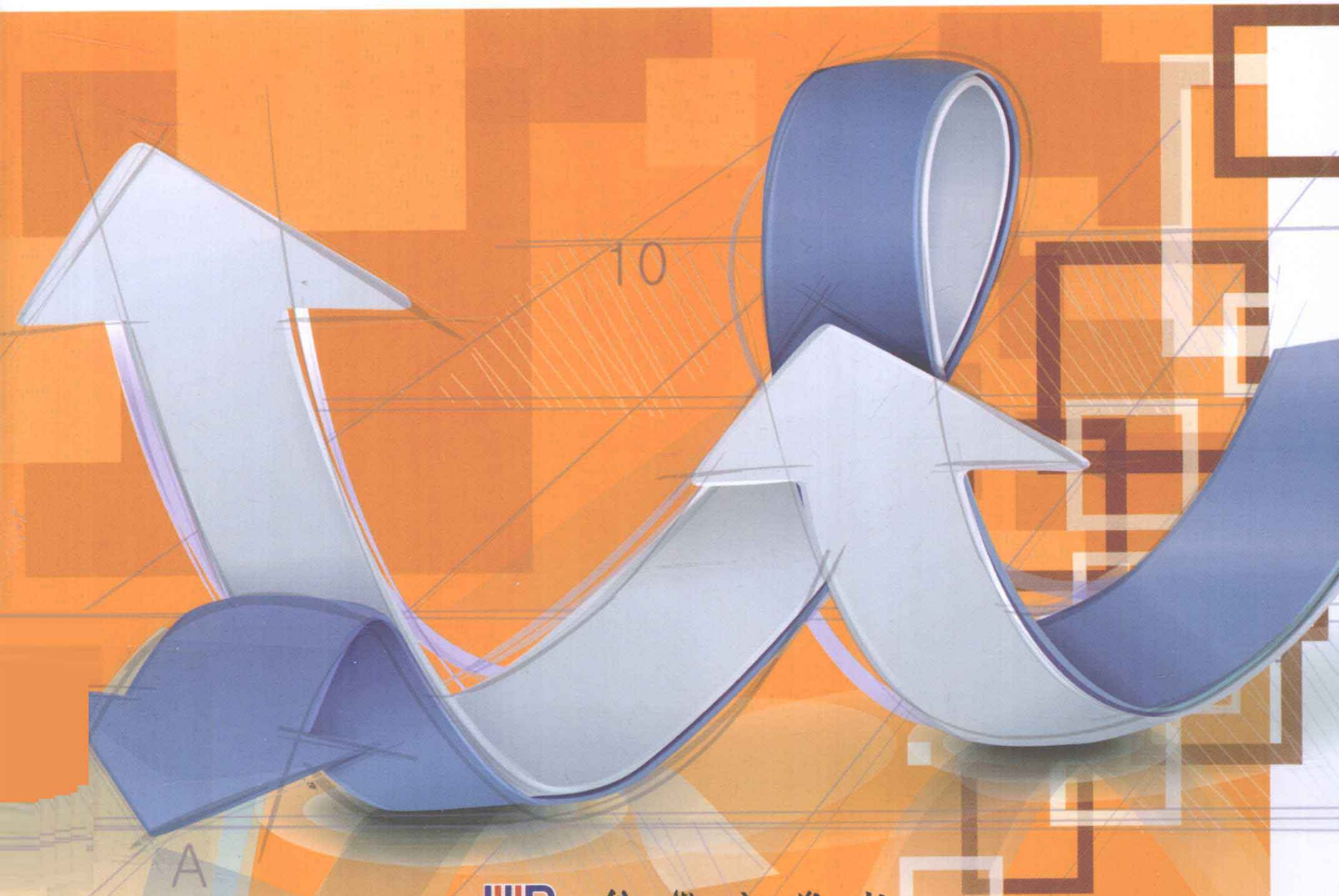
普通高等教育"十二五"规划教材
全国高等医药院校规划教材

医药数理统计学习辅导

第3版

汪旭升　曹　敏　主编



科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材
全国高等医药院校规划教材

医药数理统计学习辅导

第3版

汪旭升　曹　敏　主编
周永治　主审

北　京

内 容 简 介

本书是普通高等教育"十二五"规划教材、全国高等医药院校规划教材《医药数理统计》(第4版)的配套教材,也是本书的第3版.本书侧重于理论知识的归纳总结及各类习题的分析解法、各种医药实际问题的统计处理.本书针对教材给出了各章的内容提要、基本概念、习题解答和补充习题及解答.除此之外本书还提供了7套试题,对学生进一步的提高能力和备考有很大帮助,也便于学生自学.通过本书的学习,可帮助学生更好地掌握常用统计方法的运用,培养学生归纳总结能力、分析解决问题的应用能力.

本书可供医药院校各专业、各层次的学生使用,也可作为医药工作者学习数理统计的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

医药数理统计学习辅导 / 汪旭升,曹敏主编.—3版.北京:科学出版社,2012.5

普通高等教育"十二五"规划教材·全国高等医药院校规划教材

ISBN 978-7-03-034112-9

Ⅰ.医…　Ⅱ.①汪…②曹…　Ⅲ.医用数学-数理统计-医学院校-教学参考资料　Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第078377号

责任编辑:杨　扬　曹丽英 / 责任校对:包志虹
责任印制:刘士平 / 封面设计:范璧合

科学出版社　出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004年9月第　一　版　　开本:787×1092　1/16
2012年5月第　三　版　　印张:8 1/2
2012年5月第 十 次印刷　　字数:195 000

定价:21.90元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《医药数理统计学习辅导》（第3版）编写人员

主　编　汪旭升　曹　敏

副主编　钱微微　赵聪俐　吕佳萍　郝　涛
　　　　　王世钦　钟小芳　黄　浩　黄爱武

主　审　周永治

编　委（按姓氏笔画排序）

王　剑	广西中医药大学	赵文峰	河南中医学院
王世钦	甘肃中医学院	赵聪俐	天津中医药大学
尹立群	天津中医药大学	郝　涛	山东中医药大学
邓红勇	贵阳中医学院	钟小芳	安徽中医学院
石　莹	南京中医药大学	钱微微	浙江中医药大学
吕佳萍	南京中医药大学	高　云	山东中医药大学
李晓红	浙江中医药大学	黄　浩	福建中医药大学
汪旭升	广西中医药大学	黄爱武	湖南中医药大学
陈丽君	湖北中医药大学	曹　敏	贵阳中医学院
周　菲	甘肃中医学院		

第3版编写说明

《医药高等数学》、《医药数理统计》、《医药高等数学学习辅导》、《医药数理统计学习辅导》是全国 18 所中医院校联合编写的数学系列教材. 自 2004 年 9 月由科学出版社出版以来,该套教材发行面广，发行量大，在中医院校受到广大师生的欢迎. 为了更进一步提高该套教材的质量，编写组对前几版教材进行了分析、总结,根据科学出版社精品教材“五性”、“三基”的要求,对教材认真进行了修改、补充，编写了第 4 版的《医药高等数学》、《医药数理统计》与第 3 版的《医药高等数学学习辅导》、《医药数理统计学习辅导》. 该配套教材将更适应医药院校的医药类、管理类、信息类、人文类等专业的需要，定于 2012 年 6 月由科学出版社正式出版.

《医药数理统计学习辅导》(第 3 版)是《医药数理统计》(第 4 版)的配套教材,相应地也有 9 章. 每章包括四大部分:一、内容提要; 二、基本概念;三、习题解答(该章习题的解答过程); 四、补充习题及解答(增补一些有代表性有适当难度的习题). 书的最后编入 7 套各院校有代表性的试卷，供学生练习。本辅导教材有利于学生掌握统计方法的原理与步骤，帮助学生学好数理统计同时培养自己分析解决问题的能力，也有利于教师的教学工作.

参加本教材编写的院校有:天津中医药大学、山东中医药大学、甘肃中医学院、陕西中医学院、河南中医学院、安徽中医学院、南京中医药大学、浙江中医药大学、湖北中医药大学、湖南中医药大学、福建中医药大学、广西中医药大学、贵阳中医学院.

本教材编写过程中得到许多同行专家的关心与支持,在此一并表示感谢.

本教材尚有不少不足之处,恳请读者与同行批评指正.

编　者

2012 年 4 月

目　　录

第一章

事件与概率

一、内容提要

了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件之间的关系和运算；了解事件频率的概念，了解概率的统计定义，掌握古典型概率的计算；了解条件概率的概念，理解事件独立性的概念，掌握利用事件的独立性进行概率计算. 掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式.

二、基本概念

(一) 随机事件及其关系和运算

1. 随机现象→随机试验→随机事件.

2. 事件的关系和运算.

事件的关系和运算主要有：用简单事件表示复杂事件；化简事件的关系式；证明事件之间的某些等式或不等式.

(1) 四种关系，如表 1-1 所示：

表 1-1

关系	符号	概率论的定义	集合论的含义
包含关系	$A\subset B$	事件 A 发生必然导致 B 发生	A 是 B 的子集
相等	$A=B$	$A\subset B$ 且 $B\subset A$	A 与 B 相等
对立关系	$\overline{A}$	A 所构成的事件不发生	A 的补集
互不相容(或互斥)	$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 不能同时发生	A 与 B 没有公共元素

(2) 事件的运算服从下列规律.

交换律：$A+B=B+A, AB=BA$；

结合律：$(A+B)+C=A+(B+C), (AB)C=A(BC)$；

分配律：$(A+B)(A+C)=A+BC, A(B+C)=AB+AC$；

吸收律：$A+AB=A, A(A+B)=A$；

补余律：$A+\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing$；

De-Morgan 律：对有限个或可列无限个事件 A_i 恒有

$$\boxed{\overline{\sum_i A_i}=\prod_i \overline{A_i}} \Leftrightarrow \boxed{\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A_i}}, \boxed{\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A_i}} \Leftrightarrow \boxed{\overline{\prod_i A_i}=\sum_i \overline{A_i}}$$

(二) 事件频率、概率的统计定义、古典型概率的计算

1. 概率的定义：古典概率、几何概率、统计概率、公式化定义.

2. 古典概率计算的要点.

古典概率计算的要点：给定基本事件的总数，然后再计算事件 A 中包含的基本事件数，这就归结为计数问题. 计数的基本工具主要有两个：基本原理和排列组合方法.

(1) 排列：$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$

(2) 组合：$C_n^m = \dfrac{P_n^m}{m!} = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$

3. 古典概型概率解题时应注意的若干事项：

(1) 所求中有“至少”的问题，通常用“对立事件”解答较简便.

(2) “任取 k 件”与“无放回地逐件抽取 k 件”，虽然考虑问题的角度不同，但二者所计算出的概率都是相同的.

(3) “任取 k 件”与“有放回地逐件抽取 k 件”，所得概率一般是不同的.

(三) 条件概率、概率的加法公式、乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式

在求解较为复杂的条件概率问题时，还需要灵活运用下面三个重要的公式：

1. 如果所求概率是任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交事件的概率且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则可应用乘法公式

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

求解.

2. 如果某一结果(事件 A)是由多种“原因”事件 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所引起的，并且作为“原因”的这些事件彼此间互不相容，其和事件恰为必然事件，则结果 A 发生的概率可由全概率公式

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

求解，其中，$P(B_i)>0$.

3. 如果某一事件 A 的发生是由多种“原因”$B_i(i=1,2,\cdots,n)$所引起的，并且知事件 A 已发生，当需要了解 A 的发生是由某 B_k 所引起的概率有多大时，可按贝叶斯公式

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

计算，其中，$P(B_i)>0, P(A)>0$.

(四) 事件的独立性

独立性是概率论中应用极为广泛的重要概念. 就解而言，事件的独立性有助于简化概率计算.

1. 计算相互独立事件的积的概率，可简化为

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

2. 计算相互独立事件的和的概率，可简化为

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$

三、习题一解答

1. 设 A,B,C 为三事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(3) A,B,C 都发生；

(4) A,B,C 中至少有一个发生；

(5) A,B,C 都不发生；

(6) A,B,C 中不多于一个发生；

(7) A,B,C 中不多于两个发生；

(8) A,B,C 中至少有两个发生.

解 (1) $A\overline{B}\overline{C}$

(2) $AB\overline{C}$

(3) ABC

(4) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\,\bar{B}C+AB\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C+ABC$

$=A+B+C$

(5) $\bar{A}\,\bar{B}\bar{C}$

(6) $A\bar{B}\,\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\,\bar{B}C+\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$ 或 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$

(7) $A\bar{B}\,\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\,\bar{B}C+AB\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C+\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$ 或 $\overline{ABC}$

(8) $AB+BC+AC$

2. 对三人做舌诊,设 A={三人正常},B={至少一人不正常},C={只有一人正常},D={只有一人不正常}指出这四个事件中的互斥事件、对立事件,$A+D$,BD 各表示什么意思.

解　A 与 B,A 与 C,A 与 D,C 与 D 是互斥事件.

因为 $A+B=\Omega$,$AB=\varnothing$,所以 A 与 B 是对立事件.

$A+D$ = {至少有两人正常} = {至多一人不正常}

$BD=D$ = {只有一人不正常} = {恰有两人正常}

3. 某市在某年的第一季度出生婴儿的情况为一月份男孩 145 个,女孩 135 个;二月份男孩 125 个,女孩 136 个;三月份男孩 152 个,女孩 140 个,问该季度生男孩的频率是多少?

解　第一季度共出生婴儿数为

$$145+135+125+136+152+140=833$$

该季度出生的男孩数为

$$145+125+152=422$$

因此该季度生男孩的频率为

$$f=\frac{422}{833}=0.5066$$

4. 40 个药丸中 3 丸已失效,现任取 5 丸,求其中有 2 丸失效的概率.

解　A = {任取 5 丸,其中有 2 丸失效}

$$P(A)=\frac{C_{37}^{3}\times C_{3}^{2}}{C_{40}^{5}}=\frac{(37\times36\times35)\times(3\times2)}{40\times39\times38\times37\times36}=0.0354$$

5. 一批针剂共 100 支,其中,有 10 支次品,求

(1) 这批针剂的次品率;

(2) 从中任取 5 支,全部是次品的概率;

(3) 从中任取 5 支,恰有 2 支次品的概率.

解　(1) A = {次品}

$$P(A)=\frac{10}{100}=0.1$$

(2) B = {任取 5 支,全部是次品}

$$P(B)=\frac{C_{10}^{5}}{C_{100}^{5}}=0.000003347$$

(3) C = {任取 5 支,恰有两支次品}

$$P(C)=\frac{C_{90}^{3}\times C_{10}^{2}}{C_{100}^{5}}=0.07$$

6. 某地居民血型分布为 P(O 型)=50%,P(A 型)=14.5%,P(B 型)=31.2%,P(AB 型)=4.3%,若有一个 A 型血型患者需要输血,问当地居民任一人可为他输血的概率是多少?

解　Ω={O 型}+{A 型}+{B 型}+{AB 型}

设

A={当地居民为一个 A 型血型患者输血}

则

$P(A)=P$({O 型}+{A 型})

$=P$(O 型)$+P$(A 型)

$=0.5+0.145=0.645$

7. 药房有包装相同的六味地黄丸 100 盒,其中,5 盒为去年产品,95 盒为今年产品. 现随机发出 4 盒,求

(1) 有 1 盒或 2 盒陈药的概率;

(2) 有陈药的概率.

解 样本总数为 C_{100}^4,

(1) 设 A={有 1 盒或 2 盒陈药},则

$$P(A)=\frac{C_{95}^3\times C_5^1+C_{95}^2\times C_5^2}{C_{100}^4}=0.1879$$

(2) 设 B={有存药}, $\overline{B}$={无存药},则

$$P(\overline{B})=\frac{C_{95}^4}{C_{100}^4}=0.8119$$

所以

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.8119=0.1881$$

8. 从 1,2,3,4,5 号小白鼠中任取两只做新药试验,计算所取两只中一只是 4 号小白鼠的概率.

解 设 A = {所取两只中一只是 4 号小白鼠}. 样本空间中基本事件的总数为 $n=C_5^2=10$,事件 A 所包含的基本事件数为 $m=C_1^1\cdot C_4^1=4$, 所以

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{10}=0.4$$

9. 某药检所从送检的 10 件药品中先后抽取了两件. 如果 10 件中有三件是次品.

(1) 求第一次检得次品的概率?

(2) 第一次检得次品后,第二次检得次品的概率?

(3) 两次都检得次品的概率.

解 设 A_i = {第 i 次所取的药品是次品}, $i=1,2$,

(1) $P(A_1)=\dfrac{3}{10}$

(2) $P(A_2\mid A_1)=\dfrac{3-1}{10-1}=\dfrac{2}{9}$

(3) 根据概率的乘法公式得

$$P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=0.0667$$

10. 某厂生产的产品中,36%为一等品,54%为二等品,10%为三等品,任取一件产品,已知它不是二等品,求它是一等品的概率.

解 设 A_1 ={一等品}, A_2 ={二等品}, A_3 ={三等品},则

$$P(A_1)=0.36,\quad P(A_2)=0.54,\quad P(A_3)=0.1$$

设 B={任取一件产品是一等品},由题意知

$$P(B)=\frac{P(A_1)}{P(A_1)+P(A_2)}=\frac{0.36}{0.36+0.54}=0.4$$

11. 经调查,在 50 个聋耳人中有 4 人色盲,在 950 个非聋耳人中有 76 人色盲,试说明聋耳与色盲无关.

解 设 A = {色盲}, B = {聋耳},则

$$P(A)=\frac{80}{1000}=0.08,\quad P(A\mid B)=\frac{4}{50}=0.08$$

可见 $P(A)=P(A\mid B)$, A 与 B 相互独立,即聋哑与色盲无关.

12. 假如某人群中患结核病的概率为 0.003,患沙眼的概率为 0.04,现从该人群中任意抽查一人,求下列事件的概率:

(1) 此人患结核病且患沙眼病;

(2) 此人既无结核病又无沙眼病;

(3) 此人至少有这两种病的一种;

(4) 此人只有其中一种病.

解 设 A = {患结核病}, B = {患沙眼}. 由题意知 A 与 B 是相互独立事件 .

$$P(A)=0.003,\quad P(B)=0.04$$

(1) $P(AB)=P(A)P(B)=0.0012$

(2) $P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1+P(AB)-P(A)-P(B)$

$= 0.9571$

(3) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$= 0.003 + 0.04 - 0.00012$

$= 0.0429$

(4) $P(\overline{A}B + A\overline{B}) = P(\overline{A})P(B) + P(A)P(\overline{B})$

$= 0.0428$

13. 设$A=\{$甲市有雨$\}$,$B=\{$乙市有雨$\}$,由以往的气象记录知$P(A)=0.3$,$P(B)=0.4$且$P(AB)=0.28$,

(1) 说明两市下雨有牵连(非独立);

(2) 求$P(A|B)$,$P(B|A)$,$P(A+B)$.

(注意:A,B不互斥也不独立.)

解　(1) 因为

$$P(AB) = 0.28,\quad P(A)P(B) = 0.12$$

所以

$$P(AB) \neq P(A)P(B)$$

(2) $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{0.28}{0.4} = 0.7$

$P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0.28}{0.3} = 0.933$

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.42$

14. 设某产品进行验收检查,发现次品率为0.02.

(1) 今独立地检验100件产品,问至少发现一件产品为次品的概率是多少?

(2) 如保证至少发现一件次品的概率为0.9,问应检验多少件产品?

解　(1) 令$A_i=\{$第i件是次品$\}$,那么$\overline{A_i}=\{$第i件是合格品$\}$,$i=1,2,\cdots,100$.

$P(A_i) = 0.02,\quad P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 0.98$

因为100个事件$\overline{A_1},\cdots,\overline{A_{100}}$独立,所以发现无次品的概率为

$$P\{\text{发现无次品}\} = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_{100}})$$
$$=0.98^{100}$$
$$=0.13$$
$$P\{\text{至少发现一件产品为次品}\} = 1 - P\{\text{发现无次品}\}$$
$$= 0.8674$$

(2) $P\{$至少发现一件产品为次品$\} = 0.9$,则

$P\{$发现无次品$\} = 0.1$

即$0.98^n=0.1$,

$$n = \frac{\ln 0.1}{\ln 0.98} \approx 114$$

15. 三家工厂生产同一种产品,每家厂商分别占总产量的25%,35%,40%,又知每厂的次品率分别为5%,4%,2%,求从这种产品中取一件,取到次品的概率.

解　设$B=\{$取到次品$\}$,$A_i=\{$取到的产品是属于第i家工厂生产的$\}$,$i=1,2,3$.

$$P(A_1)=0.25,\quad P(A_2)=0.35,\quad P(A_3)=0.4$$
$$P(B|A_1)=5\%,\quad P(B|A_2)=4\%,\quad P(B|A_3)=2\%$$
$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i)$$
$$=0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.4\times0.02$$
$$=0.0345$$

16. 仓库里有10箱规格相同的产品,已知其中有5箱、3箱、2箱依次是甲厂、乙厂、丙厂生产的,且甲厂、乙厂、丙厂的产品次品率分别为1/10,1/15,1/20,从这10箱中取1箱,再从中任取1件产品,求取得正品的概率.

解　$B=\{$次品$\}$,$A_1=\{$取的箱子是甲厂的$\}$,$A_2=\{$取的箱子是乙厂的$\}$,$A_3=\{$取的箱子是丙厂的$\}$.

$$P(A_1)=0.5,\quad P(A_2)=0.3,\quad P(A_3)=0.2$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{1}{10},\quad P(B\mid A_2)=\frac{1}{15},\quad P(B\mid A_3)=\frac{1}{20}$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.5\times\frac{1}{10}+0.3\times\frac{1}{15}+0.2\times\frac{1}{20}=0.08$$

$$P(\overline{B})=1-P(B)=0.92$$

即其概率为 0.92.

17. 把甲乙两种外观一样、数量相等的药片混在一起，若甲种药片的次品率为 0.05，乙种药片的次品率为 0.0025，现从中抽出 1 片发现是次品，求该药片来自甲、乙种的概率.

解 $A_1=\{$甲种药片$\}$， $A_2=\{$乙种药$\}$， $B=\{$次品$\}$ 则

$$P(A_1)=P(A_2)=0.5$$

$$P(B\mid A_1)=0.05,\quad P(B\mid A_2)=0.0025$$

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)\\&=0.5\times0.05+0.5\times0.0025\\&=0.02625\end{aligned}$$

所以

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=0.9524$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}=0.04761$$

18. 已知一批产品中 96%是合格品，检查时，一个合格品误认为不合格的概率是 0.02，一个不合格品误认为合格的概率是 0.05，求在检查合格的产品中确是合格品的概率.

解 设 $A=\{$合格$\}$，$B=\{$被判合格$\}$，则

$$P(A)=0.96,\quad P(\overline{A})=0.04,\quad P(\overline{B}\mid A)=0.02$$

$$P(B\mid A)=1-P(\overline{B}\mid A)=0.98$$

$$P(B\mid\overline{A})=0.05$$

由贝叶斯公式，被合格的产品确定有合格产品的概率为

$$\begin{aligned}P(A\mid B)&=\frac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})}\\&=\frac{0.96\times0.98}{0.96\times0.98+0.04\times0.05}\\&=0.9979\end{aligned}$$

19. 用 X 线透视诊断肺结核，设 $A=\{$实有肺结核$\}$，$B=\{$被判有肺结核$\}$. 若某市成人中 $P(A)=0.001$，这种检查阳性的正确率 $P(B\mid A)=0.95$，阴性的正确率 $P(\overline{B}\mid\overline{A})=0.998$.

(1) 求该市一人经透视被判有肺结核的概率；

(2) 若一个经透视被判有肺结核，求他实际患有肺结核的概率.

解 设 $A=\{$实有肺结核$\}$，$B=\{$被判有肺结核$\}$. 由题意

$P(A)=0.001$， $P(B\mid A)=0.95$， $P(\overline{A})=0.999$， $P(\overline{B}\mid\overline{A})=0.998$， $P(B\mid\overline{A})=0.002$

A 与 $\overline{A}$ 构成互斥完备群，

(1) $P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})$
$=0.002948$

(2) $$\begin{aligned}P(A\mid B)&=\frac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})}\\&=\frac{0.001\times0.95}{0.001\times0.95+0.999\times0.002}\\&=0.3223\end{aligned}$$

20. 某电子设备厂所用的晶体管由甲乙丙三家元件制造厂提供. 已知甲乙丙三厂的次品率分别为 0.02，0.01，0.03，又知三个厂提供晶体管的份额分别为 0.15，0.80，0.05，设三个厂的产品是同规格的(无区别标志)

且均匀的混合在一起.求 1. 在混合的晶体管中随机取一支是次品的概率. 2. 现在抽取了一支晶体管次品,问这支晶体管最可能是哪个厂家生产的?

解 A_i $i=1,2,3$ 代表抽到三个厂家生产的晶体管,B 代表抽到的是次品.

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B/A_i)=0.02\times0.15+0.01\times0.80+0.03\times0.05=0.0125$$

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B/A_i)}=0.24,\qquad P(A_2/B)=\frac{P(A_2)P(B/A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B/A_i)}=0.64$$

$$P(A_3/B)=\frac{P(A_3)P(B/A_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B/A_i)}=0.12.$$

所以最有可能是乙厂生产的。

四、补充习题及解答

1. 盒子中盛有 12 个乒乓球,其中,9 个是新球,3 个是旧球. 练球时第一次从盒子中任取 3 个来用(新球用一次后就成为旧球),用后仍放回盒子中,第二次再从盒子中任取 3 个球,试求第二次取出的球都是新球的概率.

解 设 $B=\{$第二次取出的球都是新球$\}$,$A_i=\{$第一次取出的球中有 i 个新球$\}$,$i=0,1,2,3$,则 A_0,A_1,A_2,A_3 是一个完备事件组且

$$P(A_0)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{220},\quad P(A_2)=\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}=\frac{108}{220}$$

$$P(A_1)=\frac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}=\frac{27}{220},\quad P(A_3)=\frac{C_9^3C_3^0}{C_{12}^3}=\frac{84}{220}$$

$$P(B\mid A_0)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{84}{220}$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{56}{220}$$

$$P(B\mid A_2)=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{35}{220}$$

$$P(B\mid A_3)=\frac{C_6^3}{C_{12}^3}=\frac{20}{220}$$

由全概率公式可得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_0)P(B\mid A_0)+P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)\\&=\frac{1}{220}\cdot\frac{84}{220}+\frac{27}{220}\cdot\frac{56}{220}+\frac{108}{220}\cdot\frac{35}{220}+\frac{84}{220}\cdot\frac{20}{220}=\frac{441}{3025}=0.1458\end{aligned}$$

2. 某产品设计长度为 20cm,规定误差不超过 0.5cm 为合格产品. 今对一批产品尽心测量,长度如表 1-2 所示:

表 1-2

长度/cm	19.5 以下	19.5～20.5	20.5 以上
件数	5	68	7

计算这批产品的合格率.

解 根据设计要求知长度在 19.5cm 以下和 20.5cm 以上的均为不合格品,这批产品的合格率为

$$p=\frac{68}{5+68+7}=0.85$$

3. 掷三枚硬币,求出现三个正面的概率.

解 掷一枚硬币,记出正面为 H,反面为 T,则掷三枚硬币试验的样本空间为 $\Omega=\{$HHH, THT, HTT, TTH, HHT, HTH, THH, TTT$\}$,出现三个正面的事件记为 A,则 $A=\{$HHH$\}$,于是

$$P(A)=\frac{1}{8}=0.125$$

4. 10 把钥匙中有 3 把能打开门，今任取 2 把，求能打开门的概率.

解法一 随机试验是从 10 把钥匙里任取 2 把，从样本空间 Ω 的样本点总数为

$$n=C_{10}^{2}=45$$

要想把门打开，取出的 2 把钥匙中至少有一把从能把门打开的 3 把钥匙中获得，从而能把门打开这一事件所包含的样本点数为 $m=C_3^2+C_7^1C_3^1=24$. 故所求概率为

$$p=\frac{m}{n}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}\approx 0.53$$

解法二 随机试验是从 10 把钥匙中任取 2 把，从而样本空间 Ω 的样本点总数为

$$n=C_{10}^{2}=45$$

记事件 $A=\{$能把门打开$\}$，则 $\overline{A}=\{$不能把门打开$\}$，从 7 把不能把门打开的钥匙中任取 2 把，共有 $C_7^2=21$ 种取法，即事件 $\overline{A}$ 共包含 21 个样本点，从而

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{21}{45}=\frac{24}{45}\approx 0.53$$

5. 一部 4 卷的文集随便放在书架上，问恰好各卷自左向右或自右向左的卷号为 1,2,3,4 的概率是多少？

解 一部 4 卷的文集随便放在书架上共有 $4\times3\times2\times1=24$ 种放法，而文集恰好各卷自左向右或自右向左的卷号为 1,2,3,4 共有两种放法，从而所求概率为

$$P=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}\approx 0.083$$

6. 100 个产品中有 3 个次品，任取 5 个，求其中次品数分别为 0,1,2,3 的概率.

解 随机试验是从 100 个产品中任取 5 个，样本空间所包含的样本点总数为 $n=C_{100}^{5}$. 记事件 $A_i=\{$取出的 5 个产品中含有 i 个次品$\}$，$i=0,1,2,3$. 若取出的 5 个产品中没有次品，则取出的 5 个产品都必须从 97 个合格品种获得，从而事件 A_0 所包含的样本点总数为 $m_0=C_{97}^{5}$，故

$$P(A_0)=\frac{m_0}{n}=\frac{C_{97}^{5}}{C_{100}^{5}}\approx 0.856$$

同理，若取出的 5 个产品中含有 i 个次品，则 i 个次品必须从 3 个次品中获得，$5-i$ 个合格品必须从 97 个合格品种获得，从而事件 A_i 所包含的样本点数为 $m_i=C_3^iC_{97}^{5-i}$，$i=1,2,3$. 故

$$P(A_1)=\frac{C_3^1C_{97}^4}{C_{100}^5}\approx 0.138$$

$$P(A_2)=\frac{C_3^2C_{97}^3}{C_{100}^5}\approx 0.006$$

$$P(A_3)=\frac{C_3^3C_{97}^{2}}{C_{100}^5}\approx 0.00006$$

第二章

随机变量的概率分布与数字特征

一、内容提要

本章主要介绍用随机变量描述各种随机现象的方法，这是概率论与数理统计的重点. 随机变量常见的有两类：离散型与非离散型（主要指连续型的），它们分别用概率函数与概率密度函数描述其概率分布，而又以分布函数的形式统一起来. 本章还讲述了几何分布、二项分布、泊松分布、正态分布、对数正态分布、均匀分布、指数分布的概率分布、数字特征及有关概率的计算方法.

二项分布、泊松分布、正态分布是常用的三种分布，而正态分布无论在实际应用还是理论研究中都占有头等重要的地位.

二、基本概念

（一）随机变量与分布函数

1. 随机变量：设 Ω 是试验 E 的样本空间，对于每一个样本点 $\omega\in\Omega$，都有唯一一个实数 $X(\omega)$ 与之对应且对于任意实数 x

$$\{\omega \mid X(\omega)\leqslant x\}$$

都是试验 E 的事件，存在着概率，则称 $X(\omega)$ 为随机变量，简记为 X.

注 随机变量是定义域为样本空间的函数，自变量是样本点 ω，而 ω 未必是数. 在每次试验之前，只知道随机变量都可能取哪些值，但不能预知它取什么值；每一次试验，随机变量在某一确定范围中取值的概率是确定的.

随机变量常用 $X,Y,Z,\cdots$ 表示.

2. 分布函数.

函数 $F(x)=P(X\leqslant x)\ (-\infty<x<+\infty)$ 称为随机变量 X 的分布函数，它具有以下性质：

(1) $0\leqslant F(x)\leqslant 1,-\infty<x<+\infty$.

(2) $F(x)$ 是单调不减函数，即若 $x_1\leqslant x_2$，则有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$.

(3) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

(4) $F(x)$ 是右连续的，$\lim\limits_{t\to x+0}F(t)=F(x+0)=F(x)$.

反之，具有上述性质的函数 $F(x)$ 一定是某随机变量的分布函数.

若已知随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，则

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=P(X\leqslant x_2)-P(X\leqslant x_1)=F(x_2)-F(x_1)$$
$$P(X>x)=1-P(X\leqslant x)=1-F(x)$$

实际中常遇到的随机变量是离散型和连续型两类随机变量.

（二）离散型随机变量

1. 离散型随机变量：若随机变量 X 的取值为有限个或可列无限个，则称 X 为离散型随机变量.

2. 概率分布：

(1) 概率函数：设离散型随机变量 X 的取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots$，$X$ 取各个可能值的概率为 $P(X=x_k)=p_k,k=1,2,\cdots$，则称其为离散型随机变量的概率函数（又称分布率）.

(2) 分布列：概率函数用列表的方式给出，如表 2-1 所示：

表 2-1

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

该表格称为 X 的分布列，它还可以用矩阵形式来简记

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{pmatrix}$$

概率函数满足下列性质：

$$p_k \geqslant 0, k = 1,2,\cdots, \quad \sum_k p_k = 1$$

(3) 分布函数：X 为离散型随机变量，则有分布函数为

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

分布函数与概率函数的关系为

$$F(x_i) = P(X \leqslant x_i) = p_1 + p_2 + \cdots + p_i$$

$$p_i = P(X = x_i) = P(X \leqslant x_i) - P(X \leqslant x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

3. 常见的离散型随机变量的概率分布(简称为分布)：

(1) 二项分布：设随机变量 X 的分布为

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n; 0 < p < 1, q = 1 - p$$

则称 X 服从参数为 n，p 的二项分布，记 $X \sim B(n,p)$.

一般地，在 n 重伯努利试验中事件 A 恰好发生 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 次的概率为 $P_n(k) = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$，$k = 0,1,2,\cdots,n$

用 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，则 $X \sim B(n,p)$.

(2) 两点分布：设随机变量 X 的分布为

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p, \quad 0 < p < 1$$

则称 X 服从参数为 p 的两点分布. 两点分布又称 1-0 分布，记 $X \sim B(1,p)$.

(3) 泊松分布：设随机变量 X 的分布为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\cdots, \lambda > 0$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记 $X \sim P(\lambda)$.

一般地，n 次独立重复试验中，n 很大而 p 很小时，事件 A 恰好发生的次数 X 就服从泊松分布，利用 e^x 的幂级数展开式，容易验证泊松分布的概率值满足

$$\sum_k p_k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

(4) 几何分布：设随机变量 X 的分布为 $P(X = k) = pq^{k-1}(k = 1,2,\cdots,n; 0 < p < 1, q = 1 - p)$，则称 X 服从参数为 p 的几何分布.

一般地，在伯努利试验中，事件 A 首次出现在第 k 次的概率为

$$p_k = pq^{k-1}, \quad k = 1,2,\cdots$$

若用 X 记事件 A 首发生次数，则 X 服从几何分布.

(5) 超几何分布：设随机变量 X 的分布为

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \cdots, l$$

其中，$n < N - M, k_0 = \max(0, n - m), l = \min(M, n)$，则称 X 服从超几何分布.

(三) 连续型随机变量

1. 连续型随机变量：对于随机变量 X，如果存在一个非负可积函数 $f(x)(-\infty < x + \infty)$，使对任意 a，$b(a < b)$ 都有

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

则称 X 为连续型随机变量，称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数，有时称为概率密度或密度函数.

概率密度函数满足下面两个性质：

$$f(x) \geqslant 0, -\infty < x + \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

反之，凡满足上面两个条件的函数 $f(x)$，均可作为某连续型随机变量 X 的密度函数.

另外，对连续型随机变量 X 有

(1) $P(X = x_0) = 0$，即连续型随机变量取个别值的概率等于零.

(2) $P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = P(x_1 < X \leqslant x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leqslant X < x_2)$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) $f(x) = F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x \leqslant X < x + \Delta x)}{\Delta x}$.

2. 常见的连续型随机变量的概率分布：

(1) 均匀分布：设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则称 X 服从参数为 a，b 的均匀分布.

由定义显然有 $f(x) \geqslant 0$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \dfrac{1}{b-a}\mathrm{d}x = 1$. 若 X 服从均匀分布，那么对于任意的 c，$d(a \leqslant c < d \leqslant b)$，按概率密度定义有

$$P(c < X < d) = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{d-c}{b-a}$$

上式表明，X 落在 (a,b) 中任意长度相同为 $(d-c)$ 的子区间内的概率是相同的，而与小区间的位置无关.

随机变量 X 服从均匀分布，则其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b, \\ 1, & x \geqslant b \end{cases}$$

(2) 标准正态分布：若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

则称 X 服从标准正态分布，记 $X \sim N(0,1)$，其分布函数为

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

为计算方便，对于不同的 x 值，有标准正态分布函数值表可查. 此时有

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad P(x_1 < X < x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

(3) 正态分布：若连续型随机变量 X 概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x + \infty$$

其中，μ，σ 为常数且 $\sigma > 0$，则称 X 服从参数为 μ，σ^2 的正态分布，记 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

其分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$$

此时有 $F(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$，从而可查表计算 $F(x)$. 当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时有

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

特别地有 $P(|X-\mu| < 3\sigma) = 0.9973$，称为正态分布的 3σ 规则.

(4) 指数分布：若连续型随机变量 X 的概率密度为