TURING 图灵新知

双色印刷

如何破解达芬奇密码？

35问揭示数学之美

原名：How to Build a Brain
And 34 Other Really Interesting
Uses of Mathematics

[英] Richard Elwes 著
刘熙 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵新知

如何破解达芬奇密码？

35问揭示数学之美

原名：How to Build a Brain
And 34 Other Really Interesting
Uses of Mathematics

[英] Richard Elwes 著
刘熙 译

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

如何破解达芬奇密码？：35问揭示数学之美 /（英）埃尔维斯（Elwes,R.）著；刘熙译. -- 北京：人民邮电出版社，2012.6

（图灵新知）

书名原文：How to Build a Brain: And 34 Other Really Interesting Uses of Mathematics

ISBN 978-7-115-27045-0

Ⅰ. ①如… Ⅱ. ①埃… ②刘… Ⅲ. ①数学—普及读物 Ⅳ. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第263966号

内 容 提 要

这是一本数学科普书。作者通过如何成为著名数学家、如何在股市掘金、如何生出漂亮宝宝、如何破解达芬奇密码等35个有趣的问题，涵盖了数学发展史的方方面面，展示了数学世界的多彩和美丽。

本书适合对数学感兴趣的各层次读者阅读。

图灵新知

如何破解达芬奇密码？35问揭示数学之美

◆ 著　　[英] Richard Elwes
　 译　　刘 熙
　 责任编辑　朱 巍　卢秀丽

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
　 邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　 网址　http://www.ptpress.com.cn
　 北京鑫丰华彩印有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/24
　 印张：9.5
　 字数：263千字　　2012年6月第1版
　 印数：1－5 000册　　2012年6月北京第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2011-1371号

ISBN 978-7-115-27045-0

定价：39.00元

读者服务热线：(010)51095186转604　印装质量热线：(010)67129223

反盗版热线：(010)67171154

版 权 声 明

引　言

一点都不无聊的数学？搞笑呢吧！谁都知道数学是最令人望而生畏、最难以入门的一门学问，它有着自己独特的语言，充斥着各种费解的图示、诡异的符号和隐秘的黑话。

唉，这种观点实在是太普遍了。枯燥的作业和艰辛的考试给人们留下了痛苦回忆，更是把这种看法深深地烙印在许多人的心头。除了加一加账单、算一算日期和时间之类的日常琐事，大多数人都乐于把数学工作丢给专家去做。程序员、工程师和物理工作者发现数学在他们的工作中很有用处，这当然很好，只要他们让我们陷入技术细节，我们就乐于享受他们的工作成果。

数学工作者也加深了人们的这种印象。长久以来，他们都被当成只是躯干上顶着的大脑而已，或多或少地缺少些常人的属性。你肯定希望在你的酒吧竞猜[①]队伍中有这么一个人。但是，难道你愿意在竞猜结束以后加入到他们的闲聊中吗？或者（千万别！）让他们参加你的宴会？

是时候应该破除谣传、消灭偏见了。我们要承认，任何一个值得人类努力探索的领域都会最终发展到很有技术难度，那么我们也可以恰如其分地说，与其他一些或许较为文字化的领域相比，很多人会在数学方面更早地达到那种境界。但是在达到这一水平之前，却还是可以看到一个容易理解、可以亲近的数学世界。它的多彩会使你震惊，它的神秘会将你俘获，而它的美丽又将使你迷醉。

当今的数学实在是太博大了，几乎一切的形容词（甚至这些词的反义词）都可以用来描述它，只要你愿意一试。我们就用这个来开始：数学既古老又现代。它是由流传几个世纪之久的传统方法建立起来的，同时又总是积极地拥抱未来。在“文明的摇篮”——中东地区，古巴比伦数学家发明了精密的计数系统。之后，希腊思想家柏拉图、欧几里得等人在几何、数论方面都做出了令人震惊的探索。在这古老的血统里，却有着难以抑制的现代基因，这是因为数学总是孕育在人类科学技术最前沿的进展当中，

① 酒吧为了招徕顾客而在店内组织的一种智力竞猜活动，通常分组进行。（如无特别说明，本书脚注均为译者注，下同。）

从计算机编程到理解宇宙，无不有着数学的身影。数学既涵盖了显微镜下之小，又有着无边无际之大，另外还有这两个极端之间的一切。对于穷其一生研究亚原子粒子的人们，数学不可或缺；而最近的宇宙仍在继续膨胀的假说，也需要数学给予它支撑。数学在发现着那些已经存在的事实，而且也在不断地创新。它提供了描述和度量自然世界的原则，同时又集人类创造力之大成，绵延数千年而不绝。换言之，数学家必须既是严格且善于分析的，又是热情而长于想象的。坚如磐石、无懈可击的证明是他们的最爱，但他们也不惧于去思考哪怕最骇人听闻的假设。

数学既是关于已知的，又是关于未知的。那些古老而经久不衰的谜题仍然在迷惑、引诱着人们。证明一个定理带来了征服难题的巨大满足感，而每一个新的发现又会促生十个新的问题，这将我们对数学的共同理解不断推进到更深的层次。

今天，克雷数学研究所为若干著名问题的解决者提供了丰厚的奖金[①]，这其中的每一个问题都会对我们的生活产生深远的影响。比如说，如果其中的一个问题——简要表示为“$P=NP$?”——能够得到解决，那么全世界的计算机网络安全就将会满目疮痍、不堪一击。数学至关重大。

数学在逻辑上应当是无懈可击的——除非当它遇到了悖论。一方面，它好像沉醉于清晰整洁的结论，如同在拼图游戏里，每一块拼版都恰好填进适当的位置。例如 $a+b=5$，我们又知道 $a=2$，那么就能自信地断定 $b=3$。但另一方面，数学又会搅乱我们的预期。一旦达到了无穷，你还能数到更远吗？常识告诉我们“不能”，但是在 19 世纪的德国，康托尔敢于站出来说“能”。数学需要证明，是康托尔而非常识获得了胜利。

数学既狂野而不守规矩，又平和而精巧细致。混沌理论预示了微小的环境差异都能够导致结果的剧烈变化。而数学原理又奠定了美学的基础，无论这指的是对称的、成比例的还是匀称的，无论我们谈论的是一张俊俏的脸庞、一幅优美的壁纸图案还是 J. S. 巴赫的一首赋格曲。对一位数学鉴赏家来说，一个简明的公式（例如圆形公式）其自身就洋溢着简约的优雅，为大自然的问题提供了令人满意的答案。

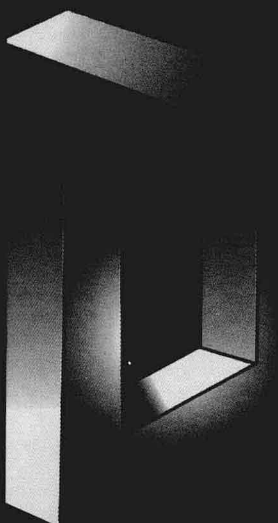
我们还可以继续描述下去，但现在大概该由数学自己来说话了。这本书——作为数学世界中 35 个地标的向导——正是为了献给数学世界的观光者们。我希望你们能冒险前进、遍览胜景、有所收获、有所惊讶——没准偶尔还会大为惊奇。当然最重要的还是享受这段旅程。祝你一路顺风！

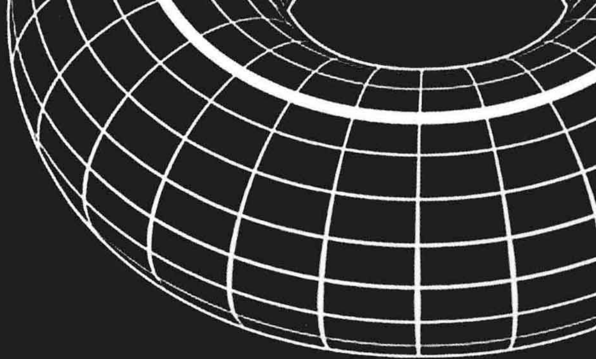
---

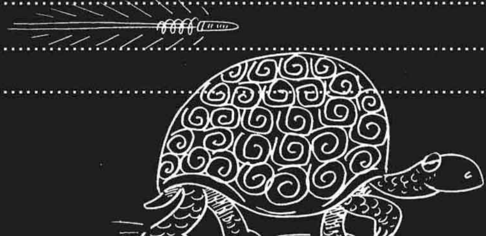
① 美国的克雷数学研究所在 2000 年宣布了 7 个千禧年重大难题，将对任何一个问题的解决者颁发 100 万美元的奖金。其中的“庞加莱猜想”已获解决，奖金于 2010 年颁发给俄罗斯数学家佩雷尔曼，后者却拒领奖金。

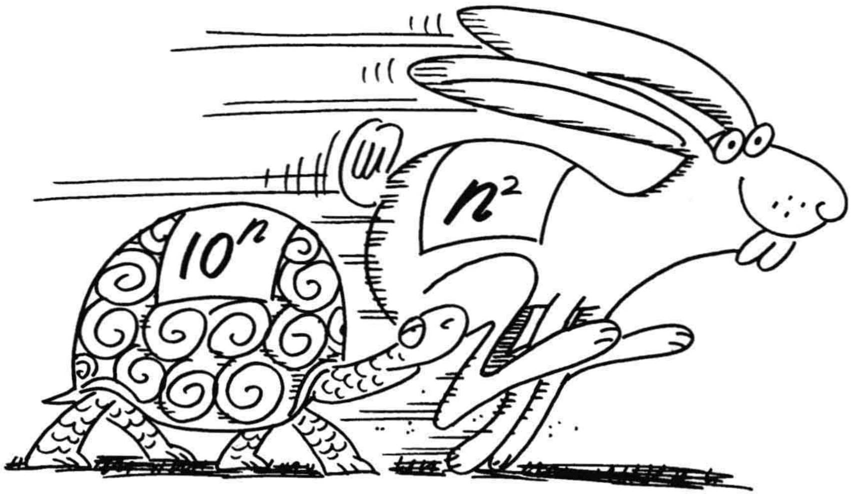
$t^3+t=11$

目　录








10^n
n^2

1 如何求解任意方程

- 计数法和自然数
- 负数和交易
- 有理数和无理数
- 实数和虚数
- 复数和代数基本定理

$$x^3+x=11$$

自从最远古的猎人在一天结束后清点他们打到的猎物起，人类就开始把数字作为认识世界至关重要的工具。人类文明沧海桑田，这期间我们的数字同样也有了巨大的变化。今天的数字是幢华丽的摩登建筑，它的发展正和一个个重大的历史时刻相吻合。在每一个阶段，人们都扩充了数的概念，使它容纳进引起争议的新元素。

1.1 数字有何用处

数字最早的用处就是计数：三棵树、两个孩子、一百名敌军士兵。一旦有了数的概念，我们就可以用它来解决一些问题。譬如我家四口人，每人每天要喝两罐水，另外还需要三罐水来浇菜园。我一共需要几罐水呢？用数字来表示，这个问题就是 $(4\times2)+3=?$

今天的数学家更喜欢用 x 或 y 这样的字母来表示未知数。这样，问题就可以重新写作 $(4\times2)+3=x$。

这就是一个*方程*（equation）。要解决它，我们只需要进行基本的计算，得到解：$x=11$。但并非所有的方程都这么好解。

1.2 有理数：分而治之

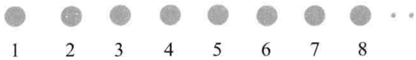
假如我有两个小孩，可是我打猎打了一天只收获了一只兔子。那我应该怎么分给他们呢？无法让任何一个孩子得到一整只兔子。这种问题预示着要引入一种新数，这就是我们大部分人所知道的分数。$\frac{1}{2}$ 只不过是 $1\div2$ 的另一种写法。数学家喜欢把分数叫作*有理数*（rational number）。（这来源于它们是整数之比，跟理智可没关系。[①]）

1.3 负数和交易的发端

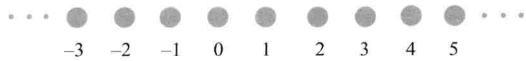
人类社会的又一大关键进展是交易的出现。有了交易，人们就可以专门从事某一种特定的工作。一个人去打猎，另一个人去种菜，而第三个人则去制鞋。那么他们就可以通过交易来保证每个人都有肉、菜和鞋子。

---

① 英文中有理数 rational number 来自词根 ratio，即“比例”；而 rational 的意思是“理性的”。



自然数



整数

一天的交易结果可能是赚了，赔了，或者持平。为了在统一标准下同时衡量盈利和亏损，早期的数学家提出了一种新的数，也就是今天所说的整数（integer）。整数系统结合了正的整数和新来的负数（negative number）：$-1, -2, -3, -4, -5, -6, \cdots$

从解方程的角度来说，这一新的系统有个突出的优点。现在任何只包含加法和减法的方程都可以求解了。例如，在负数出现以前，方程 $x+4=3$ 会被当做没有意义的。但是在交易的背景来解释，它就有了完美的含义。如果我这一天在赚了 4 个苹果以后，晚上剩下 3 个苹果，那么在这天早上我一定是欠了 1 个苹果。所以解是 $x=-1$。

1.4　负负得正

一旦我们有了负数，就需要了解怎样按照规则对它们进行加减乘除的运算。加法自然很简单：$(-3)+(-5)=(-8)$。减法就是：$(-3)-(-5)=2$。理解它的最好的办法就是把这些无穷多的数排成一条线：加负数就往左移动，如同减正数；加正数就往右移动，如同减负数。

最棘手的就是乘法。规则是这样的：两个正数相乘，答案是正数；一个负数和一个正数相乘，答案是负数；会令人困惑的是，两个负数相乘，结果是正数。

为什么会这样呢？假设我每天获利 2 个单位，那么从今天起数三天，我就能挣得 6 个单位$(2\times 3=6)$。但在三天以前呢（也就是说从今天起的 −3 天时间里），我会比今天少 6 个单位（$2\times(-3)=(-6)$）。

现在，如果我每天会亏损 2 个单位呢？那么在三天时间里，我会比今天少 6 个单位（$(-2)\times 3=(-6)$）。但在三天以前，我就比今天多 6 个单位（$(-2)\times(-3)=6$）。

1.5　有理性的局限

有理数的系统（正有理数、负有理数和零）足够描述这个世界的很多方面。从数学的角度看，它们也能够很好地发挥作用，这表现在我们能够

在这个系统中计算加减乘除，而永远不会超出到这些数的范围以外。大概这个系统就足以表示出我们所需要的全部了吧？但事实证明，数的历史还有着更长的路要走。

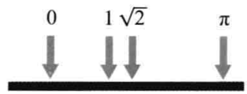
不过有理数即便在最初等的几何学上也是不够用的。让我们来考虑一个边长 1 厘米的正方形，它的对角线是多长呢？记这个数为 c。由勾股定理，它应当满足$1+1=c\times c$（参见第 2 问）。换言之，我们需要求解 $c^2=2$ 这个方程。这个数专门的名称叫作 2 的平方根，记作$c=\sqrt{2}$。这个数是什么呢？

一个近似的答案是$1\frac{2}{5}$。但恼人的事实是，没有一个分数恰好符合这样的条件。用现代的术语来说，$\sqrt{2}$ 属于*无理数*（irrational number）的行列。这意味着它不能被恰好表示成一个分数。无理数另外一个著名的例子是 π。

> 无理性不仅不能成为反驳事物存在的根据，反而是事物存在的条件。
>
> ——尼采

1.6 数字之间的幽灵

初等几何表明有理数在数学中还很不够。如果我们把有理数排在一条长直线上，它们之间会有空隙。乍看上去这并不明显，因为有理数相互之间挨得太近了，而且你想有多近它就有多近。尽管如此，在$\sqrt{2}$处就有一个空洞，在 π 处也有一个。让人意想不到的是，这些空洞可不止一两个，整条线都被这样的空洞戳得像个筛子一样。无理数就存在于此，而且它们中的大多数描述起来都远比$\sqrt{2}$或者 π 更加困难。



实数组成了一条中间没有孔隙的直线

尽管无理数已经存在了上千年，但直到 19 世纪人们才发现了将有理数扩充到更大数系的正确途径，用以填补其中的空隙。这个系统就叫作*实数*（real number）。这是个华丽且强大的现代结构。但是，数的进化历程仍然没有完结。

1.7 求解方程

从数学家的角度来看，实数代表着一个巨大的进步。许多之前不能求解的方程很快都有了它们的解了。$\sqrt{2}$使方程$x^2=2$得以成立。类似地，我们现在还可以求解方程$x^2=3$，$x^2=5$，$x^2=6$，乃至更复杂的方程诸如$x^3+x=11$等。

想象比知识更重要。这是因为知识仅局限在我们当前所知道和理解的范畴；而想象则包纳了整个世界，以及一切我们将要知道和理解的。

——爱因斯坦

可是，即使在实数中也并非所有方程都有解。正数自乘得到的结果为正。负数自乘得到的结果也为正。这就意味着，没有实数自乘会得到负。也就是说，方程 $x^2 = -1$ 在实数中没有解。实数里没有 $\sqrt{-1}$ 。

1.8 虚数

负数和无理数在初次引入时都存在着很大争议。然而，随后出现的虚数（imaginary number）使得数的概念得到了极大的扩充。与此相比，前面那些进程就是小巫见大巫了。

16 世纪的意大利学者是最早考虑虚数的人。在这个时期，求解越来越复杂的方程是一种智力上的角斗竞赛。那个年代最伟大的数学家会为一些公开的方程求解问题而较量。这些斗士们可并不把虚数当做某种哲学上的理念来看待。相反地，他们认识到了虚数在计算中发挥的巨大威力。$\sqrt{-1}$ 之类的对象经常会出现在他们的工作当中。那个时期大多数人都摈弃这样的计算，因为他们相信这就退化到了毫无意义的地步。可仍有一些人决定继续推进，他们并不为 $\sqrt{-1}$ 意味着什么而去过多地担心。于是，每当在工作中发现了 $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ ，他们就用一个 -1 来代替，然后继续算下去。那些敢于迈出这一步的人们得到了很好的回报。在计算的最后，他们总是发现其中的“虚项”能相互消掉，最终得到方程的一个很好的实数解①。

1.9 数成为了二维的

一旦确立了虚数的作用，那么距离最终要走的那一步，即正式扩充数系以容纳它们，就只是个时间问题了。为了达成这个目标，人们先给 $\sqrt{-1}$ 这个量起名叫 i。

从实数和虚数出发，人们构建了复数（complex number）系统。精确地说，一个复数是一个实数（例如 4）和一个虚数诸如 $3\times i$（或者 3i）相加的结果，这个例子中即为 $4 + 3i$ 。这个步骤在数学上是完全严格的，从而虚数再也不是单纯的想象，而可以像其他数一样用来做加法和乘法了：

$$(4 + 3i) + (2 - i) = 6 + 2i$$

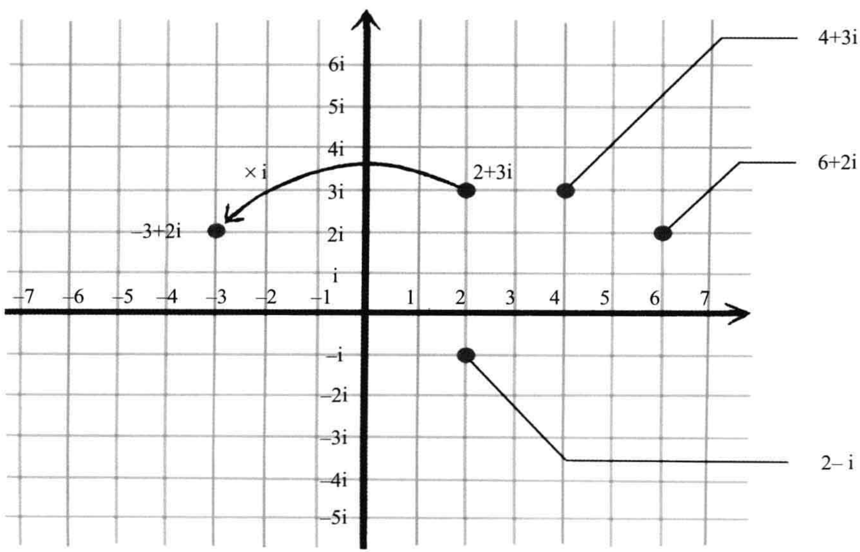
① 这一段内容讲的是求解三次方程的故事。在很多情况下，尽管最终得到实根，一元三次方程的求根公式中却会出现虚项。

复数有一种美妙的图示法，叫作阿尔冈图（Argand diagram）。在这种图中，实数组成了横轴，虚数组成了纵轴。平面上的每个点都可以用它的实坐标和虚坐标来表示。就如同加 1 或减 1 对应着在数轴上左移或右移一样，现在加 i 或减 i 则对应着上移或下移。乘以 i 则对应着逆时针旋转 90°。

1.10 数字历史终结时的数学

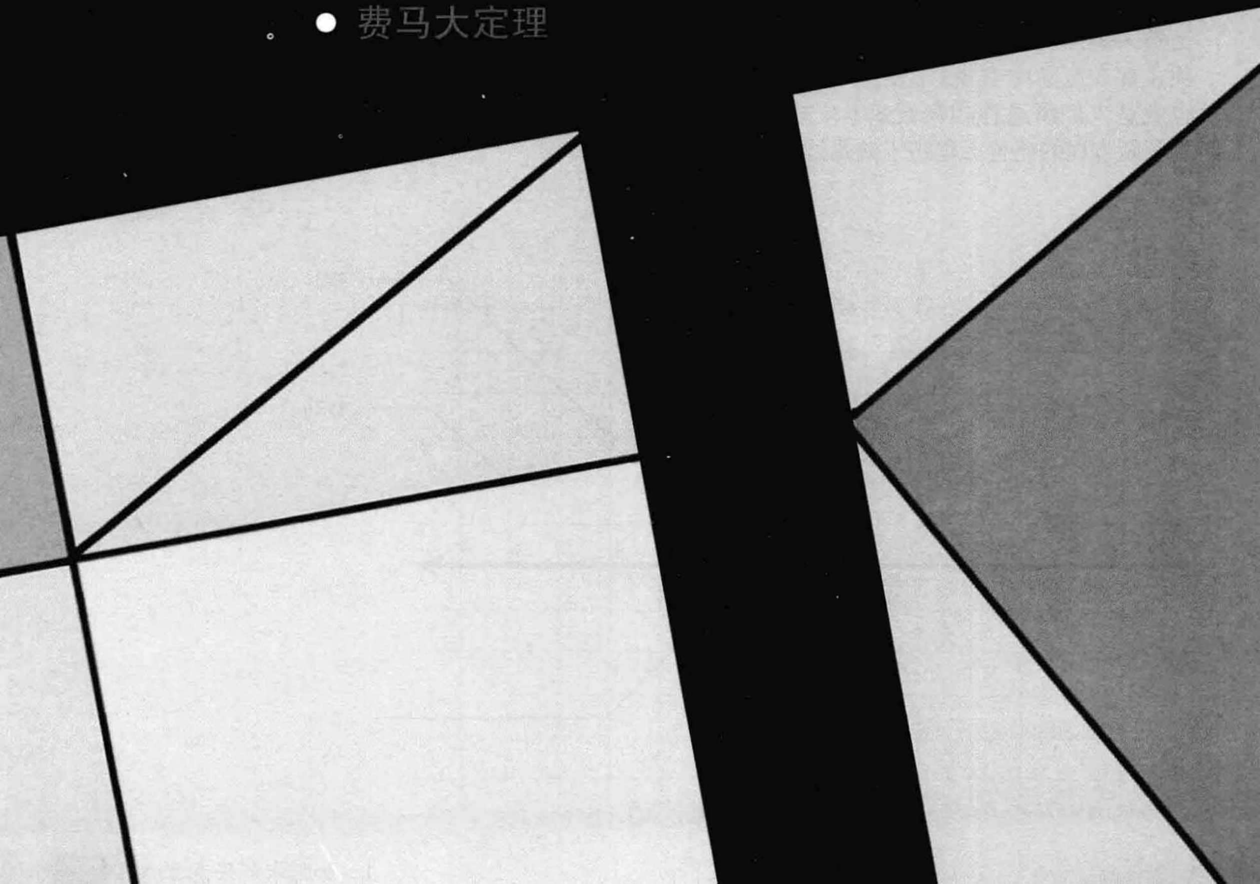
和实数相比，复数允许人们求解更多的方程。实际上，定义这个新系统就是要让方程 $x^2=-1$ 有解。这时，一个讨厌的想法就出现了：我们还需要再继续扩充这个系统来包含更高级方程（譬如 $x^2=\mathrm{i}$）的解吗？

19 世纪初，阿尔冈完成了下面这一重大事实的第一个证明：复数已经足够求解所有可能的方程了。更正式地讲就是，任何能用复数写出来的多项式都在复数中有根。之后不久，高斯完成了同一结果的另一个证明，这也就是人们所通称的代数基本定理。经过了上千年之后，人们扩充数系以求解新方程的痛苦历程终于就此结束了。



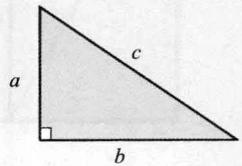
2 如何成为著名数学家

- 几何学的肇始
- 三角形与毕达哥拉斯定理
- 欧拉长方体与完美长方体
- 费马大定理



直角三角形就是包含了一个直角的三角形。也许每个学几何学的学生问到的第一个问题就是：这有啥稀奇？首先，数学中最古老、最耀眼的成果之一——毕达哥拉斯定理所探讨的正是这不起眼的直角三角形。尽管这个定理已经有上千年的历史，但它仍和一些当代数学最深层的问题有着直接的关系，这其中就包括1995年才最终被证明的费马大定理，以及棘手的完美长方体问题——这个问题仍在继续挑战着当今的数学家们。

其实关于上面一开始提的这个问题还有个更实际的解答：直角三角形是直线所构成的最简单的形状。从它们出发可以构成更复杂的形状，比如正方形和长方形，以及更高维的立方体和长方体之类。



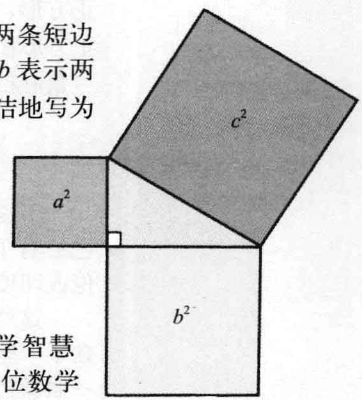
直角三角形

2.1 几何学的肇始

毕达哥拉斯定理描述了直角三角形中各边的关系。最长的边总是与直角相对，即众所周知的斜边（hypotenuse）。毕达哥拉斯给出了通过两条短边来计算斜边长度的方法。

我们依次量出各边长度，然后算出它们的平方，也就是自乘。如果第一条边长度为3，那它的平方就是$3\times3=9$，这被写成$3^2=9$。

当我们对三角形各边都如此处理后，毕达哥拉斯定理断言，两条短边的平方相加就等于长边的平方。用代数记号表述为，如果用a和b表示两条短边，用c表示长边，那么就有$a\times a+b\times b=c\times c$，或者更简洁地写为$a^2+b^2=c^2$。从几何的角度来看，这意味着如果在各边上分别作正方形，那么两条短边上的正方形面积之和等于斜边上的正方形的面积。



毕达哥拉斯定理

2.2 毕达哥拉斯：神秘的数学家

毕达哥拉斯生活在公元前500年前后，相传他为了探寻数学智慧曾广泛游历，到过印度、犹地亚和埃及等许多地方。他不仅是一位数学家，而且还是一位哲学家和某种意义上的宗教导师，是一个叫作“数众”（mathematikoi）的团体的领袖。他主张教众们应当立誓抛弃一切个人财产，日常生活恪守素食原则。“数学”（mathematics）一词即是由“数众”所衍生而来的。