



普通高等院校“十二五”规划教材

数字信号处理 原理及应用

SHUZI XINHAO CHULI
YUANLIJI YINGYONG

桂志国 杨民 陈友兴 郝利华 编著

本书看点：

1. 把理论、应用和实践相结合
2. 把工程应用实例同实现方法相结合
3. 以信号分析方法作为本书的第一主线
4. 以离散时间系统的分析与设计方法作为本书的第二主线



国防工业出版社

National Defense Industry Press

内 容 简 介

本书全面介绍了数字信号处理与应用的基础理论和分析方法。书中第1章至第3章是数字信号处理的基础,其中包括离散时间信号与系统、 Z 变换、离散傅里叶变换三部分内容。第4章是快速傅里叶变换及其应用。第5章至7章是数字滤波器的基本结构、设计原理以及设计方法。第8章和第9章分别讨论了有限字长效应和多抽样率转换。为了使读者加深对基本理论的理解和基本方法的掌握,书中编排了一些典型例题的 Matlab 程序。

本书内容全面,叙述清楚,可作为普通高等院校信息类等相关专业本科生或研究生教材,也可作为相关科研与工程技术人员的自学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理原理及应用 / 桂志国等编著. —北京:
国防工业出版社, 2012. 1
ISBN 978-7-118-07969-2

I. ①数… II. ①桂… III. ①数字信号处理 - 高等学校 - 教材 IV. ①TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 001494 号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 787 × 1092 1/16 印张 24 字数 550 千字
2012 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 48.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

数字信号处理是高等院校电子信息工程、电子信息科学与技术、通信工程、自动化、生物医学工程、测控技术与仪器、电子科学与技术、计算机科学与技术等专业的一门重要的专业基础课程。随着信息时代的发展,数字信号处理理论与技术日益完善,已成为一门重要的学科与技术领域,其应用领域日益扩大,几乎遍及各个工程技术领域。

作者根据当前数字信号处理技术的发展动态,结合十几年教学实践中的经验和教学需要,对本书内容进行了精心编排,以期能够更好地为高校“数字信号处理”的教学服务。本书系统地讨论了数字信号处理的基本理论、基本分析方法、基本算法和实现方法。全书共9章。第1章至第3章是离散时间信号与系统的基本理论,即离散时间信号与系统、 Z 变换及离散傅里叶变换。第4章讨论傅里叶变换的快速算法。第5章至第7章是数字滤波器的结构、理论和设计方法。第8章是数字信号处理的有限字长效应。第9章讨论了多抽样率转换。通过本书的学习,可以为进一步学习有关信号方面的课程打下良好的理论基础。

本书以数字信号处理基本知识、基本理论为主线,为加深对数字信号处理理论的理解,将 Matlab 软件引入本书,并给出了典型例题的 Matlab 程序,有助于读者对课程基本概念的理解和巩固。本书论述深入浅出,数学推导严谨,逻辑性、系统性强,对相关专业的工程技术人员来说也是一本有益的自学用书和实用的参考资料。

本书的编写分工如下:李沅编写第1章和第2章,郝利华编写第3章,桂志国编写第4章,杨民编写第5章,王鉴编写第6章和第7章,陈友兴编写第8章,韩建宁编写第9章。全书由桂志国教授统稿。

北京航空航天大学杨民副教授百忙之中参加了本书的编写,同事张权参加了书稿的校对工作,在此一并表示感谢。国防工业出版社王京涛先生的热情帮助与支持,为本书的顺利出版创造了有利条件,在此表示深深的谢意!

由于水平有限,本书难免有不妥或错误之处,恳切广大读者给与批评指正。

作者
2011年9月

目 录

第 1 章 离散时间信号与系统的时域分析	1
1.1 离散时间信号——序列	1
1.1.1 几种常用序列	2
1.1.2 序列的基本运算	6
1.2 序列的卷积和	12
1.2.1 卷积和的定义及计算	12
1.2.2 卷积和的性质	14
1.3 线性移不变系统	15
1.3.1 线性系统	16
1.3.2 移不变系统	16
1.3.3 单位抽样响应与卷积和	17
1.3.4 因果系统	17
1.3.5 稳定系统	18
1.4 线性常系数差分方程	20
1.4.1 线性常系数差分方程的描述	20
1.4.2 线性常系数差分方程的求解	21
1.5 连续时间信号的抽样及抽样定理	23
1.5.1 理想抽样	23
1.5.2 实际抽样	27
1.5.3 带通信号的抽样	28
习题	30
第 2 章 离散时间信号与系统的 z 域分析	32
2.1 Z 变换的定义及收敛域	32
2.1.1 Z 变换的定义	32
2.1.2 Z 变换的收敛域	32
2.1.3 常用序列的 Z 变换	37
2.1.4 Z 变换收敛域的性质	40
2.2 Z 反变换	40
2.2.1 部分分式展开法	40

2.2.2	幂级数展开法	43
2.2.3	围线积分法(留数法)	45
2.3	Z 变换的性质与定理	48
2.4	Z 变换与连续信号拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系	55
2.4.1	Z 变换与拉普拉斯变换的关系	56
2.4.2	序列的 Z 变换和傅里叶变换的关系	58
2.5	序列傅里叶变换及性质	58
2.5.1	非周期序列傅里叶变换	58
2.5.2	序列傅里叶变换的性质与定理	61
2.6	离散时间系统的系统函数和频率响应	65
2.6.1	系统函数的定义	65
2.6.2	系统函数与差分方程的关系	65
2.6.3	系统的频率响应	66
2.6.4	利用 $H(z)$ 的零极点分析系统	68
2.6.5	无限长单位抽样响应系统与有限长单位抽样响应系统	72
习题	73
第3章	离散傅里叶变换	76
3.1	傅里叶变换的几种形式	76
3.1.1	非周期连续时间信号的傅里叶变换——时域连续、频域连续	76
3.1.2	周期连续时间信号的傅里叶级数——时域连续、频域离散	76
3.1.3	非周期离散时间信号(序列)的傅里叶变换——时域离散、频域 连续	77
3.1.4	周期离散时间信号的傅里叶级数——时域离散、频域离散	77
3.2	周期序列的离散傅里叶级数及性质	79
3.2.1	周期序列的离散傅里叶级数	79
3.2.2	周期序列离散傅里叶级数的性质	82
3.2.3	周期序列的傅里叶变换	86
3.3	离散傅里叶变换	88
3.3.1	离散傅里叶变换的定义	88
3.3.2	DFT与 Z 变换以及DTFT之间的关系	90
3.3.3	模拟频率、离散频率和数字频率的关系	91
3.4	离散傅里叶变换的性质	92
3.4.1	离散傅里叶变换隐含的周期性	92
3.4.2	离散傅里叶变换的性质	92
3.5	有限长序列的循环卷积定理和循环相关定理	99
3.5.1	有限长序列的循环卷积	99

3.5.2	循环卷积定理	100
3.5.3	有限长序列的线性卷积和循环卷积	101
3.5.4	线性相关与循环相关	103
3.6	频域抽样理论	106
3.6.1	由 $X(k)$ 不失真地恢复 $x(n)$ 的条件	106
3.6.2	频率抽样的内插公式	107
3.7	基于 DFT 技术的频谱分析技术	110
3.7.1	利用 DFT 对连续非周期信号进行频谱分析	110
3.7.2	利用 DFT 对连续信号进行频谱分析中的问题及其解决方法	112
3.7.3	补零问题	119
	习题	121
第 4 章	快速傅里叶变换	125
4.1	DFT 的运算量分析	125
4.1.1	直接计算 DFT 的运算量	125
4.1.2	改善 DFT 运算效率的基本途径	126
4.2	按时间抽取的基-2FFT 算法	128
4.2.1	算法的基本原理	128
4.2.2	运算量	132
4.2.3	算法特点	133
4.2.4	按时间抽取的其他形式流程图	135
4.2.5	DIT 基-2FFT 的软件编程思想	136
4.3	按频率抽取的基-2 FFT 算法	138
4.3.1	算法的基本原理	138
4.3.2	按频率抽取的 FFT 算法特点	140
4.3.3	时间抽取法与频率抽取法的比较	141
4.4	快速傅里叶反变换	141
4.4.1	稍微变动 FFT 程序和参数实现 IFFT	141
4.4.2	不改变 FFT 的程序直接实现 IFFT	142
4.5	FFT 算法的 Matlab 软件实现	143
4.6	实序列的 FFT 算法	146
4.6.1	利用频谱对称性求实信号的 FFT	146
4.6.2	离散哈德曼变换	147
4.7	线性卷积与线性相关的 FFT 算法	150
4.7.1	有限长序列线性卷积的 FFT 算法	150
4.7.2	有限长序列和无限长序列卷积的 FFT 实现	152
4.7.3	线性相关的 FFT 算法	156

习题	159
第 5 章 数字滤波器的基本结构	160
5.1 数字滤波器结构的表示方法	160
5.2 无限长单位抽样响应(IIR)滤波器的结构	162
5.2.1 直接 I 型	162
5.2.2 直接 II 型(典范型、正准型)	163
5.2.3 级联型	163
5.2.4 并联型	166
5.2.5 转置定理	168
5.3 有限长单位抽样响应(FIR)滤波器的基本结构	168
5.3.1 直接型(横截型、卷积型)	169
5.3.2 级联型	169
5.3.3 快速卷积型	170
5.3.4 频率抽样型	171
5.3.5 梳状滤波器	175
5.4 格型滤波器的基本结构	177
5.4.1 全零点(FIR)格型滤波器	177
5.4.2 全极点(IIR)格型滤波器	180
5.4.3 零、极点(IIR)格型滤波器	181
习题	183
第 6 章 无限长单位抽样响应数字滤波器的设计	185
6.1 滤波器的基本概念	185
6.1.1 滤波器的分类	185
6.1.2 滤波器的技术指标	186
6.1.3 滤波器的设计步骤	187
6.2 模拟低通滤波器的设计	188
6.2.1 由幅度平方函数来确定系统函数	188
6.2.2 巴特沃斯模拟低通滤波器的设计	190
6.2.3 切比雪夫模拟低通滤波器的设计	195
6.2.4 椭圆模拟低通滤波器的设计	205
6.2.5 贝塞尔模拟低通滤波器的设计	207
6.2.6 归一化原型滤波器设计数据	208
6.2.7 常用模拟滤波器的比较	210
6.3 用模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器	211
6.3.1 抽样响应不变法	211

6.3.2	双线性变换法	219
6.4	数字高通、带通和带阻 IIR 滤波器的设计	227
6.4.1	模拟频带法	228
6.4.2	数字频带法	238
6.5	常用特殊 IIR 滤波器	246
6.5.1	全通滤波器	246
6.5.2	最小相位滤波器	248
6.5.3	特殊零极点二阶滤波器	253
习题		257
第7章	有限长单位抽样响应数字滤波器的设计	259
7.1	线性相位 FIR 数字滤波器及其特点	259
7.1.1	线性相位的定义	259
7.1.2	线性相位的条件	260
7.1.3	线性相位 FIR 滤波器的幅度特性	263
7.1.4	线性相位 FIR 滤波器的零点分布	267
7.2	窗函数设计法	268
7.2.1	设计方法	268
7.2.2	加窗处理对频谱性能的影响	270
7.2.3	典型窗函数	273
7.2.4	窗函数设计法举例	279
7.3	频率抽样设计法	287
7.3.1	设计方法	288
7.3.2	逼近误差	289
7.3.3	频率抽样法设计举例	292
7.4	等波纹最佳设计法	296
7.4.1	设计思想	297
7.4.2	交错点组定理	297
7.4.3	Parks - McClellan 算法	298
7.4.4	Matlab 实现	301
7.5	简单整系数 FIR 滤波器	303
7.5.1	均值滤波器	304
7.5.2	平滑滤波器	305
7.5.3	建立在零极点相消的简单整系数滤波器	307
7.6	IIR 滤波器和 FIR 滤波器的比较	310
习题		311

第 8 章 有限字长效应	314
8.1 问题的提出	314
8.2 二进制数的表示	315
8.2.1 定点运算与浮点运算	315
8.2.2 原码、补码和反码	317
8.3 量化误差	319
8.3.1 定点运算中的量化误差	320
8.3.2 浮点运算中的量化误差	322
8.4 系统输入信号的量化效应	323
8.4.1 信号量化误差的统计分析	324
8.4.2 量化噪声通过线性系统的响应	326
8.5 系统系数的量化效应	326
8.5.1 系数量化误差对系统零极点的影响	327
8.5.2 系数量化对滤波器稳定性的影响	332
8.6 定点运算 FIR 滤波器的有限字长效应	333
8.6.1 FIR 滤波器的有限字长效应	333
8.6.2 FFT 算法的有限字长效应	334
8.7 定点运算 IIR 滤波器的有限字长效应	336
8.7.1 量化噪声	336
8.7.2 极限环振荡	337
8.7.3 死带效应	340
8.8 浮点运算的有限字长效应	342
习题	343
第 9 章 多抽样率转换	345
9.1 按整数因子 D 抽取	345
9.1.1 抽取器	345
9.1.2 抗混叠抽取器	346
9.1.3 频谱关系	348
9.2 按整数因子 I 内插	350
9.2.1 插值器	350
9.2.2 插值器的频域分析	353
9.2.3 插值器的时域关系	355
9.3 按有理因子 I/D 的抽样率转换	355
9.4 多抽样率转换 FIR 滤波器的 Matlab 实现	358
9.4.1 相关的 Matlab 函数	358

9.4.2	FIR 整数插值举例	359
9.4.3	FIR 整数抽取举例	361
9.4.4	FIR 有理因子的抽样率转换	362
9.5	多抽样率转换的 FIR 滤波器结构	364
9.5.1	整数因子抽取的 FIR 实现	364
9.5.2	整数因子插值的 FIR 实现	365
9.5.3	多相 FIR 结构	366
	习题	368
	参考文献	371

第 1 章 离散时间信号与系统的时域分析

信号是承载信息的工具,如古代的烽火台,它传递的信息是“火(烟)起便是有敌人进犯”。信号可以用时间函数的方式进行表述,根据函数自变量的取值是否连续,可以将信号分为连续时间信号和离散时间信号。连续时间信号是在连续时间范围内定义的信号;离散时间信号与系统的研究由来已久,并且随着数字电路和计算机技术的迅猛发展,离散时间信号的研究日趋丰富,其应用日益广泛。

本章首先介绍离散时间信号的表述方法、常用的离散序列和序列的基本运算;其次介绍序列的卷积和及其求解方法;然后着重讨论线性移不变系统的特性和差分方程的时域解法;最后介绍连续时间信号数字化时的抽样及抽样定理。

1.1 离散时间信号——序列

时间为离散变量的信号称为离散时间信号,它只在离散时间上给出函数值,是时间上不连续的序列,用 $x(n)$ 表示第 n 个离散时间点的序列值,并用 $\{x(n)\}$ 表示序列,为方便起见,序列也直接用 $x(n)$ 表示。

离散时间信号可用数的集合 $\{\cdot\}$ 的形式表示。例如一个离散时间信号可表示为 $x(n) = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0\}$, 箭头指向的元素表示 $n=0$ 时的序列值,即 $x(0) = 1$ 。

离散时间信号也可用数学表达式来表示,例如 $x(n) = 3^n$, 这里 n 为整数。

另外,离散信号 $x(n)$ 也常用图形来描述,如图 1.1.1 所示。纵轴线段的长短代表各序列值的大小。注意,图中横轴虽为连续直线,但只在 n 为整数时才有意义,而对于非整数没有定义,即此时不能认为 $x(n)$ 的取值为零。

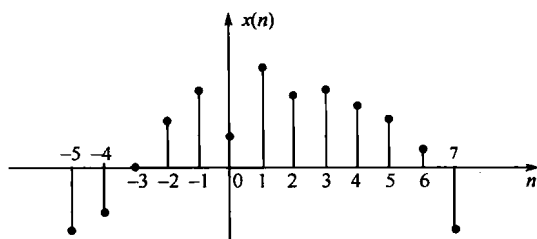


图 1.1.1 离散信号 $x(n)$ 的图形描述

一个离散信号 $x(n)$ 可能产生时就是离散的,例如,若 $x(n)$ 表示某市每天出生的新生儿数,则 $x(n)$ 本身就是离散的。离散信号 $x(n)$ 也可以由一个连续时间信号 $x(t)$ 的抽样得到。若 $x(t)$ 表示一个连续时间信号,以抽样间隔 T_s 对其进行周期抽样得到离散时间信号 $x(nT_s)$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。 nT_s 作为信号的变量,表明信号在离散时间 nT_s 点上出现,

但在很多情况下, nT_s 并不代表具体的时刻而只表明离散时间信号在序列中前后位置的顺序, 所以 $x(nT_s)$ 可直接记为 $x(n)$ 。

1.1.1 几种常用序列

在离散时域中, 有一些基本的离散时间信号, 它们在离散时间信号与系统中起着重要的作用。下面给出一些典型的离散时间信号表达式和波形。

1. 单位抽样序列 $\delta(n)$

单位抽样序列 $\delta(n)$ 的定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

$\delta(n)$ 的波形如图 1.1.2(a) 所示。 $\delta(n)$ 也称为单位脉冲序列或单位样值序列。这是最常用最重要的序列之一, 它在离散时间信号与系统的分析、综合中发挥着重要的作用, 其地位犹如连续时间信号与系统中的单位冲激信号 $\delta(t)$ 。注意 $\delta(t)$ 与 $\delta(n)$ 的区别: $\delta(t)$ 在 $t=0$ 时, 脉宽趋于零、幅值趋于无限大、面积为 1, 是极限概念的信号, 是现实中不可实现的一种信号, 表示在极短时间内所产生的巨大“冲激”; 而 $\delta(n)$ 在 $n=0$ 时, 值为 1, 是一个可现实序列。图 1.1.2(b) 所示为 $\delta(n)$ 右移 3 个单位的信号 $\delta(n-3)$ 的波形。

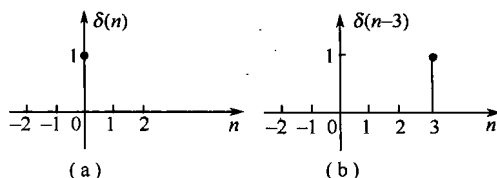


图 1.1.2 单位抽样序列及其移位
(a) $\delta(n)$; (b) $\delta(n-3)$ 。

显然, 任意序列可以表示成单位抽样序列的移位加权, 即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.1.2)$$

例 1.1.1 已知 $f(n) = \begin{cases} 1, & n = -1 \\ 2, & n = 0 \\ -3, & n = 1 \end{cases}$, 该序列可用单位抽样序列信号表示为

$$f(n) = \delta(n+1) + 2\delta(n) - 3\delta(n-1)$$

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

单位阶跃序列 $u(n)$ 的定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.1.3)$$

其波形如图 1.1.3 所示。它类似于连续时间信号与系统中的单位阶跃信号 $u(t)$ 。但一般情况下 $u(t)$ 在 $t=0$ 处没有定义, 而 $u(n)$ 在 $n=0$ 时定义为 $u(0) = 1$ 。

用 $\delta(n)$ 及其移位来表示 $u(n)$, 可得两者之间的关

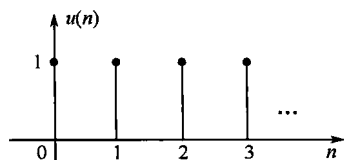


图 1.1.3 单位阶跃序列

系为

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

而 $\delta(n)$ 可用 $u(n)$ 的后向差分来表示, 即

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.1.4)$$

可见, 相对于连续时间信号与系统中单位冲激信号 $\delta(t)$ 与单位阶跃信号 $u(t)$ 之间的微分关系, 离散时间系统中, 单位阶跃序列 $u(n)$ 与单位抽样序列 $\delta(n)$ 之间是差分关系。

由 $u(n)$ 的定义可知, 若将序列 $x(n)$ 乘以 $u(n)$, 即 $x(n)u(n)$, 则相当于保留 $x(n)$ 序列 $n \geq 0$ 的部分。

3. 矩形序列 $R_N(n)$

矩形序列 $R_N(n)$ 的定义为

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.5)$$

其波形如图 1.1.4 所示。显然, 矩形序列与单位抽样序列、单位阶跃序列的关系为

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n-m)$$

$$(1.1.6)$$

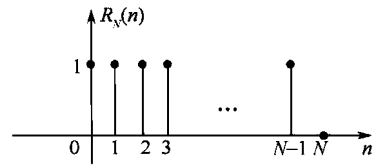


图 1.1.4 矩形序列

4. 正弦序列

正弦序列表达式为

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi) \quad (1.1.7)$$

式中: A 为幅度; ϕ 为初始相位; ω_0 为正弦序列的数字域频率; $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ 。其波形如图 1.1.5 所示。

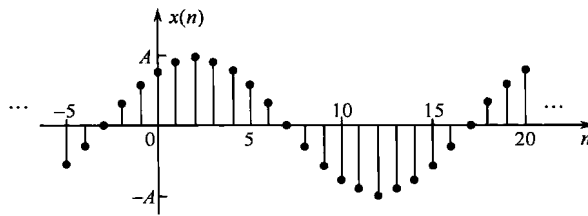


图 1.1.5 正弦序列

该信号可以看成是对连续时间正弦信号进行抽样得到的。若连续正弦信号 $x(t)$ 为

$$x(t) = A \sin(\Omega_0 t + \phi) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)$$

式中: f_0 为信号频率; $\Omega_0 = 2\pi f_0$ 为模拟角频率, 而信号的周期 $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ 。

对 $x(t)$ 以抽样间隔 T_s 进行等间隔周期抽样得到离散信号 $x(n)$, 即

$$x(n) = x(t) |_{t=nT_s} = A \sin(\Omega n T_s + \phi) = A \sin(\omega_0 n + \phi)$$

由上述推导过程可知

$$\omega_0 = \Omega_0 T_s = 2\pi f_0 T_s$$

上式便是正弦序列的数字频率 ω_0 、连续正弦信号角频率 Ω_0 以及连续正弦信号频率 f_0 三者之间的关系,以后章节会陆续用到。这个关系不仅适用于正弦信号,也可以推广到一般信号。

由图 1.1.5 可见,正弦序列的包络是周期正弦函数。但序列本身可能是周期的,也可能是非周期的,关于正弦序列的周期性将在下面的内容中进行详细讨论。

5. 周期序列

对于任意整数 n ,若 $x(n) = x(n + N)$ (N 为某一最小正整数),则序列 $x(n)$ 是周期序列, N 是该序列的周期。

对于正弦序列 $A\sin(\omega_0 n + \phi)$,当 ω_0 一定, n 为自变量时,是否是周期序列? 假设其为周期序列,有 $A\sin[\omega_0(n + N) + \phi] = A\sin(\omega_0 n + \phi)$,由此得 $\omega_0 N = 2\pi k$ (N, k 为整数),周期 $N = 2\pi k / \omega_0$ 。下面分几种情况对其周期性进行讨论。

(1) 当 $2\pi/\omega_0$ 是整数时,只要取 $k = 1$,则 $N = 2\pi/\omega_0$ 为最小正整数,也就是说序列的周期为 $2\pi/\omega_0$ 。如 $\cos[\pi n/5]$, $\omega_0 = \pi/5$,所以周期为 10,如图 1.1.6(a) 所示。

(2) 当 $2\pi/\omega_0$ 不是整数,而是有理数时,例如 $2\pi/\omega_0 = Q/P$,其中 Q, P 是互素的整数,此时只有取 k 为 P ,才能保证 N 为整数。这时 $N = 2\pi/\omega_0 \cdot P = Q$,正弦序列具有周期性,周期大于 $2\pi/\omega_0$ 。如 $\cos[3\pi n/20]$, $\omega_0 = 3\pi/20$,取 $P = 3, Q = 40$,得周期为 40,如图 1.1.6(b) 所示。

(3) 当 $2\pi/\omega_0$ 是无理数时,则无论如何取 k (整数) 值,均不能使 N 成为整数,所以此时正弦序列不具有周期性。如 $\cos[3n/10]$, $2\pi/\omega_0 = 20\pi/3$ 为无理数,所以该序列不是周期序列,如图 1.1.6(c) 所示。

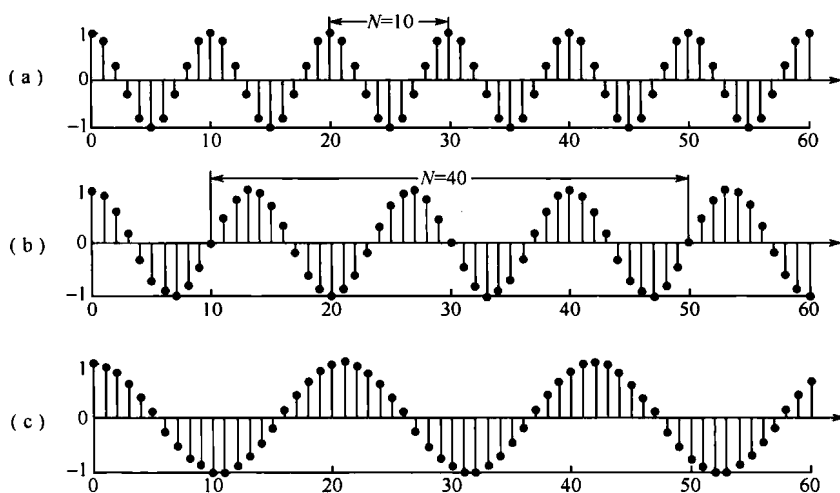


图 1.1.6 周期序列

6. 实指数序列

实指数序列的表达式为

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

利用前面介绍的 $u(n)$ 序列,上式可改写成

$$x(n) = a^n u(n) \quad (1.1.8)$$

式中： a 为实数。由于 $u(n)$ 的作用，当 $n < 0$ 时， $x(n) = 0$ 。其波形特点是：当 $|a| < 1$ 时，序列收敛，如图 1.1.7(a) 和 (c) 所示；当 $|a| > 1$ 时，序列发散，如图 1.1.7(b) 和 (d) 所示；从图 1.1.7(c) 和 (d) 可以看出，当 a 为负数时，序列值在正负之间摆动。

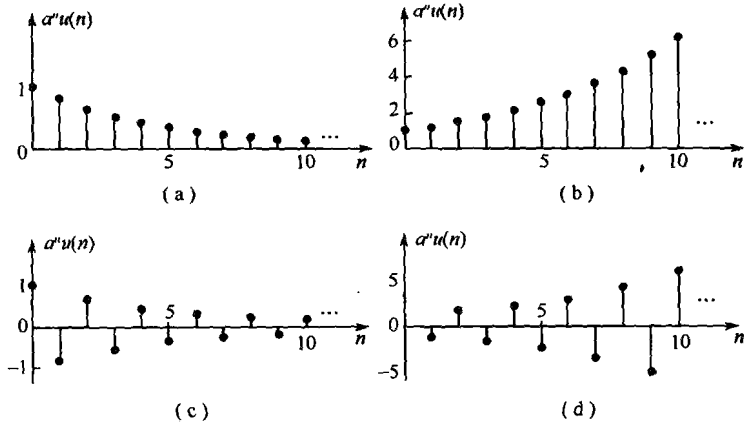


图 1.1.7 实指数序列

(a) $0 < a < 1$; (b) $a > 1$; (c) $-1 < a < 0$; (d) $a < -1$ 。

7. 复指数序列

复指数序列的表达式为

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} \quad (1.1.9)$$

其指数是复数(或纯虚数)，用欧拉公式展开后，得到

$$x(n) = e^{\sigma n} \cos \omega_0 n + j e^{\sigma n} \sin \omega_0 n \quad (1.1.10)$$

式中： ω_0 为复正弦序列的数字域频率； σ 表征了该复正弦序列的幅度变化情况。其实部和虚部的波形如图 1.1.8 所示。

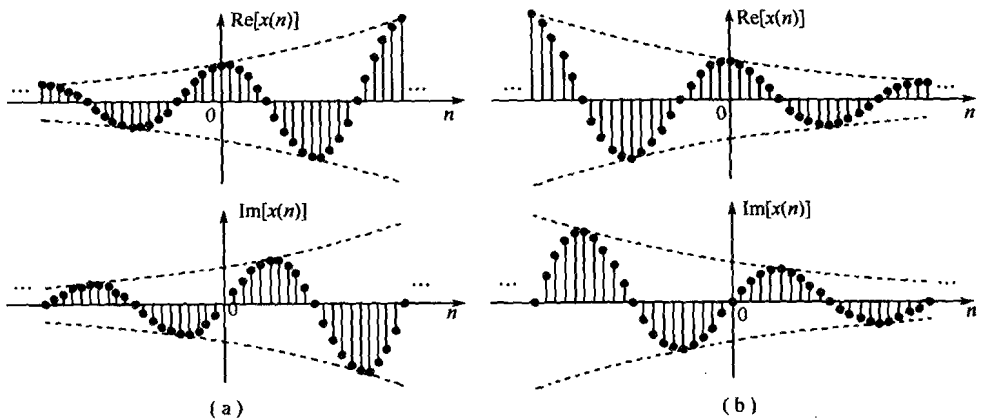


图 1.1.8 复指数序列

(a) $\sigma > 0$; (b) $\sigma < 0$ 。

复指数序列表示成极坐标形式为

$$x(n) = |x(n)| e^{j\arg[x(n)]} = e^{\sigma n} \cdot e^{j\omega_0 n}$$

式中

$$|x(n)| = e^{\sigma n}, \quad \arg[x(n)] = \omega_0 n$$

产生复指数序列 $x(n) = e^{(0.02 + j0.5)n}$ 的 Matlab 程序为:

```
n=[0:40];
x=exp((0.02+0.3j)*n);
subplot(2,2,1);
stem(n,real(x));
xlabel('n');ylabel('Re(x)');
subplot(2,2,2);
stem(n,imag(x));
xlabel('n');ylabel('Im(x)');
subplot(2,2,3);
stem(n,abs(x));
xlabel('n');ylabel('Magnitude');
subplot(2,2,4);
stem(n,(180/pi)*angle(x));
xlabel('n');ylabel('Phase');
```

结果如图 1.1.9 所示。

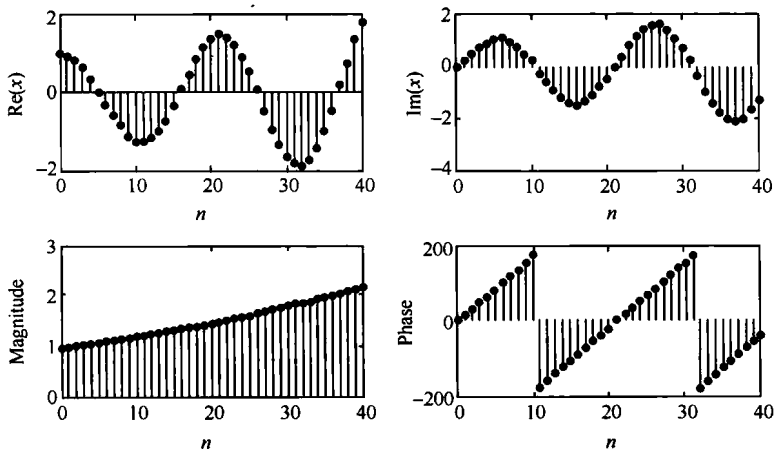


图 1.1.9 复指数序列 $x(n) = e^{(0.02 + j0.5)n}$

1.1.2 序列的基本运算

序列的运算包括相加、乘积、差分、累加、卷积和以及变换自变量(移位、反褶和尺度变换等)。下面简单介绍几种常用的运算。

1. 移位

设某一序列为 $x(n]$, 当 m 为正时, $x(n - m)$ 指原序列 $x(n)$ 逐项依次延时(右移) m 位; 而 $x(n + m)$ 则指 $x(n)$ 逐项依次超前(左移) m 位, 这里 m 为整数。 m 为负时, 正好相反。

例 1.1.2 已知序列 $x(n) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$, 则

$$x(n+1) = \begin{cases} \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq -2 \\ 0, & n < -2 \end{cases}$$

$$x(n-1) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

移位运算如图 1.1.10 所示。从图中可以看出,一个非因果的右边序列可以通过移位变成因果信号;反之亦然。

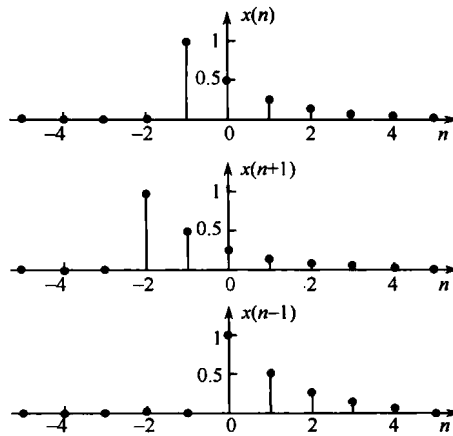


图 1.1.10 移位运算

例 1.1.2 的 Matlab 程序为:

```
m = [-1:5];
x = (1/3) * (1/3).^m;
n = m - 1;
x1 = x; % 将序列左移一位
n1 = m + 1;
x2 = x; % 将序列右移一位
subplot(3,1,1); stem(m,x); ylabel('x(n)'); xlabel('n');
subplot(3,1,2); stem(n,x1); ylabel('x(n+1)'); xlabel('n');
subplot(3,1,3); stem(n1,x2); ylabel('x(n-1)'); xlabel('n');
```

2. 反褶

若有序列 $x(n)$, 定义 $x(-n)$ 为对 $x(n)$ 的反褶信号, 此时 $x(-n)$ 的波形相当于将 $x(n)$ 的波形以 $n=0$ 为轴翻转得到。

例 1.1.3 已知序列 $x(n) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$, 则 $x(-n) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \leq 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$ 。