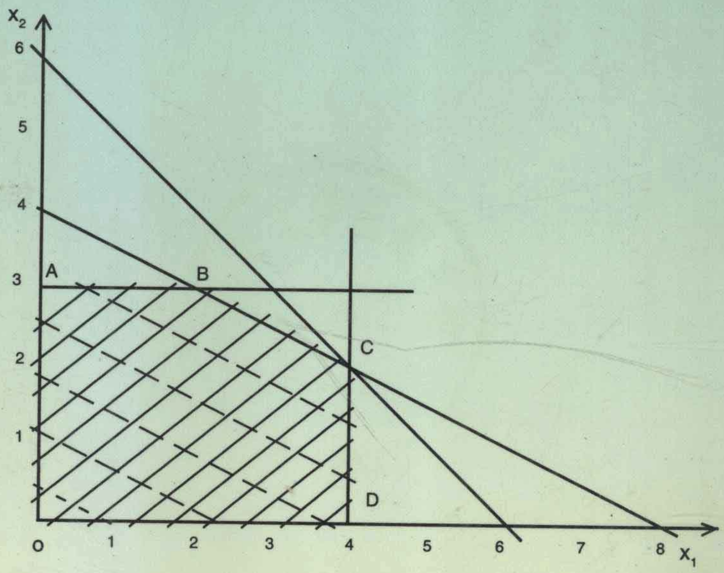
高等学校试用教材

应用数学

梁保松　党耀国　主编



气象出版社

应用数学

梁保松　党耀国　　主编

气象出版社

内 容 简 介

本书根据高等农业院校素质教育的要求编写而成，内容包括线性代数、线性规划、概率论、数理统计、灰色系统理论等。

本书内容丰富、理论严谨、结构紧凑、体系完整，叙述由浅入深，文字通俗易懂，在讲清数学理论的同时，特别注意各种概念的实际背景及解决问题的思路及方法。各章后附有一定数量的习题，书末附有参考答案。

本教材可做为高等院校农、林、医、理工、经管、财会等专业的教材，也可供各专业技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/梁保松，党耀国编著. －北京：气象出版社，1999.7

ISBN 7－5029－2731－X

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①梁… ②党… Ⅲ. 应用数学 Ⅳ. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 22866 号

应 用 数 学

梁保松 党耀国 编著

责任编辑：张 斌 终审：纪乃晋

气象出版社出版发行

（北京市海淀区白石桥路 46 号 100081）

河南农业大学印刷厂印刷

* * *

开本：787×1092 1/16 印张：21.56 字数：552 千字

1999 年 7 月第一版 1999 年 7 月第一次印刷

印数：1—3000 册

ISBN 7－5029－2731 －X/O·0061

定价：28.00 元

《应用数学》编委会

主　审　刘思峰　　程　序

主　编　梁保松　　党耀国

副主编　（按姓氏笔画排序）

王莲花　　叶耀军　　孙书安

曹殿立

编　委　（按姓氏笔画排序）

刘　芳　　朱　倩　　李占国

李西平　　侯金超　　高建来

魏　磊

前　　言

在知识经济时代迅速向我们走来的时候，在市场经济日益深化的今天，国家响亮地提出了全面推进素质教育，实施科教兴国的口号。数学作为自然科学和社会科学的基础，不仅可以提高学生的逻辑思维、空间想象和科学计算能力，而且还可以培养学生的创新意识与创新能力。但是目前的高等农业数学教育远远不能适应农业发展及素质教育的要求，数学课程体系及教学内容的改革已成为当务之急。我们遵循邓小平同志关于“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”的战略指导方针，充分解放思想，认真调查研究，集思广益，群策群力，组织编写了这本教材。与同类教材相比，本教材有以下几个特点：

一、按照素质教育的要求，突出了数学教育对人才培养的特殊作用，重视了对学生数学建模能力的培养。

二、教材克服了重理论，轻应用的传统思想，重视理论与实践的有机结合，突出了实用性。

三、在课程体系的构建和内容的选取上，删去了一些陈旧内容，摒弃了一些不必要的繁杂推证，同时增设了现代数学理论和方法，如灰色系统理论等，实现了经典与现代的统一，使数学教学更富有时代气息。

本书由河南农业大学、洛阳大学、河南省统计学校等院校的数学教师集体讨论编写，主审刘思峰教授和程序副教授仔细审阅了原稿，并提出了修改意见，最后由主编梁保松、党耀国同志统一定稿。由于编者水平所限，错误之处在所难免，敬请同仁批评指正。

编　者

1999 年 6 月

目　　录

第一编　线性代数与线性规划

第二编　概率论与数理统计

第三编 灰色系统理论简介

例 1.1.1 计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

解

$$D=2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=2(-2-3)-3(1-3)-(-1-2)=-1$$

二. n 阶行列式

仿照(1.1.2)用二阶行列式定义三阶行列式的方法,可以用 $n-1$ 阶行列式来定义 n 阶行列式.

定义 1.1.1 一阶行列式$|a|$定义为$|a|=a$,二阶行列式由(1.1.1)定义,当 $n\geqslant 2$ 时,假如$(n-1)$阶行列式已定义,那么 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \tag{1.1.4}$$

n 阶行列式由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$构成,它们排成 n 行 n 列,横的各排叫做行,纵的各排叫做列,数 a_{ij} 叫做行列式的第 i 行第 j 列元素.在行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线.

n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在行和列划去后剩下的元素(不改变它们的相对位置)所构成的$(n-1)$阶行列式,叫做元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}; M_{ij} 乘以$(-1)^{i+j}$,叫做元素 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.这样,定义 1.1.1 可以简写成如下的形式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}$$
$$=a_{11}M_{11}+(-1)^{2+1}a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

定义 1.1.1 中的 n 阶行列式是按第一列元素展开的.可以证明,同一个行列式按照任意的行或列展开所得的结果是一致的.

例 1.1.2 计算

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & -2\end{vmatrix}$$

解 按定义有

$$D=1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+1}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}0 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}0 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-7)+(-2)\cdot(-11)+(-1)(-5)=20$$

例 1.1.3 计算上三角行列式(主对角线下方的所有元素都为零):

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

解 由定义知

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n}\\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

§1.2 行列式的性质

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\quad D^T=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

称 D^T 为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 的值相等,即 $D=D^T$.

证 当 $n=2$ 时显然成立.设它对于 $n=m-1$ 时成立,现证明当 $n=m$ 时成立.行列式 D^T 按第一行元素展开得:

$$D^T=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}^T$$

这里 M_{i1}^T 是 $m-1$ 阶行列式.由假设知 $M_{i1}^T=M_{i1}$,所以

$$D^T=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}=\sum_{i=1}^{m}a_{i1}A_{i1}=D$$

由性质 1 可知，行列式的“行”所具有的性质，对“列”也一定成立，反之亦然.

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式的值改变符号.

推论 1.2.1　如果行列式有两行(列)对应元素相同，则此行列式为零.

性质 3　如果行列式某一行(列)的元素有公因子，可将公因子提到行列式外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1.2.2　如果行列式有一行(列)元素全为零，则行列式的值为零.

推论 1.2.3　如果行列式有两行(列)的元素对应成比例，则行列式的值为零.

性质 4　如果行列式某一行(列)元素都是两项的和，则可把这个行列式化为两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5　如果行列式某一行(列)的元素加上另一行(列)对应元素的 k 倍，则行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

该性质常用来简化行列式的计算.

性质 6　行列式 D 等于它任意一行(列)的元素与它的代数余子式的乘积之和，即

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

性质 7　行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和为零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \qquad (i \neq j)$$

例 1.2.1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

解　D 中第一列元素加到第三列的对应元素上,得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

再把第一列的元素乘以 -5 加到第四列的对应元素上,得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -11 \\ 3 & 1 & 3 & -8 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

把这个行列式按第四行展开,得

$$\begin{aligned} D &= 1\times A_{41}+0\times A_{42}+0\times A_{43}+0\times A_{44} \\ &= (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -11 \\ 1 & 3 & -8 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=-85 \end{aligned}$$

例 1.2.2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$$

解　这个行列式有一个特点,即每一列上四个元素之和都等于 $3a+b$,这时连续利用性质 5,将第二、三、四行逐一加到第一行上去,可简化计算.

$$D=\begin{vmatrix} b+3a & b+3a & b+3a & b+3a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}=(b+3a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$$

再把上行列式第一行乘 $(-a)$ 分别加到第二、三、四行,得

$$D=(b+3a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}=(b+3a)(b-a)^3.$$

§ 1.3　克莱姆法则

利用性质 6 和 7,可给出线性方程组求解的克莱姆法则.

设 n 个未知量 n 个方程的线性方程组为

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
\tag{1.3.1}
$$

它的系数构成的行列式

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3.2}
$$

叫做方程组的系数行列式

定理 1.3.1(克莱姆法则) 如果方程组(1.3.1)的系数行列式 $D\neq 0$,那么方程组有唯一解:

$$
x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D} \tag{1.3.3}
$$

这里 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 依次去换系数行列式中第 j 列元素所得的 n 阶行列式.

例 1.3.1 解线性方程组

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 + 2x_4 = -5 \\
3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 6 \\
4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\
2x_1 - x_3 = 0
\end{cases}
$$

解 因为

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 10
$$

$$
D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -15, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 20
$$

$$
D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -25
$$

所以方程组的解为

$$
x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -3, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 4, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = -5
$$

习 题 一

1. 用定义计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

2. 计算行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$

3. 利用行列式的性质证明:

(1) $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a_1+k_1a_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$

4. 设 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于 Δ,则行列式

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

等于什么?

5. 一个 n 阶行列式 D,如果所有它的各行都倒过来写,则它的值起什么变化?

6. 解下列线性方程组

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$

第二章　矩　阵

§ 2.1　矩阵的概念

设 n 个未知量 m 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1.1}$$

线性方程组(2.1.1)有解或无解,完全由系数和常数项来确定.方程组(2.1.1)的系数可以排成 m 行 n 列的矩形表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

把它们的系数和常数项排在一起也可以排 成 m 行 $n+1$ 列的矩形表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

这种矩形表称为矩阵.

再如,在许多问题中,常遇到 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 由 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示的线性关系

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{2.1.2}$$

其中 a_{ij} 为常数($i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$).由(2.1.2)式确定的从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的变换,称为线性变换.线性变换(2.1.2)的系数也可以排成 m 行 n 列的矩形表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

这个表称为线性变换(2.1.2)的系数矩阵,线性变换(2.1.2)由它的系数矩阵完全确定.这样,对线性变换的讨论也可以转化为对矩阵的讨论.