高等学校教材

工程数学

数学物理方程与特殊函数

（第四版）

东南大学数学系　王元明 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

工程数学

数学物理方程与特殊函数

Shuxue Wuli Fangcheng yu Teshu Hanshu

（第四版）

东南大学数学系
王元明　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书第四版是在第三版的基础上修订而成的。与第三版相比主要差别在于：在第三章增加了一节“傅里叶变换与拉普拉斯变换”，删去了第三版中的第七章能量积分法，对第三版中第九章非线性偏微分方程部分作了简化和精炼（删去了一些理论推导，补充了物理解释），增加了差分解法（这些内容与变分方法合在一起作为新版的第七章）。此外，对全书的内容和文字表述作了更细致的审校和修改，补充了几个例题和注解。

新版除了保留原来的特色和风格以外，体系更合理，难度更适中，更便于“教”和“学”。

本书是高等学校理工科各专业本科生的教材，也可作为部分工科专业的硕士研究生和总学时数在50学时左右的数学系本科生的教材。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学．数学物理方程与特殊函数／王元明编．—4版．—北京：高等教育出版社，2012.5

ISBN 978-7-04-034764-7

Ⅰ．①工…　Ⅱ．①王…　Ⅲ．①工程数学-高等学校-教材②数学物理方程-高等学校-教材③特殊函数-高等学校-教材　Ⅳ．①TB11 ②O175.24③O174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第045779号

策划编辑　于丽娜　　责任编辑　蒋　青　　封面设计　于　涛　　版式设计　王艳红
插图绘制　于　博　　责任校对　窦丽娜　　责任印制　田　甜

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100120
印　　刷　北京鑫海金澳胶印有限公司
开　　本　850mm×1168mm　1/32
印　　张　7.5
字　　数　190千字
购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598

网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
版　　次　1978年11月第1版
　　　　　2012年5月第4版
印　　次　2012年5月第1次印刷
定　　价　13.60元

物 料 号　34764-00

第四版前言

《数学物理方程与特殊函数(第三版)》问世以后,得到了国内同行和广大读者的认可和支持,虽然书中还有一些不足或失误之处,但都给予了极大的宽容和理解,并通过高等教育出版社编辑同志转达了不少建议和希望,使我非常感动。

本书第三版和第二版相比最大的改变就是增加了一些内容,主要表现在书中第七、八、九章中。经过这几年的实践,回过头来反思,我觉得这些改变未必完全符合当前高等教育教学改革的实际需要。例如,第七章能量积分法过于理论化,与全书的总体风格有点不一致;又如第九章有关非线性偏微分方程的例子过于复杂、有的内容也偏难;再如删去第二版中的差分解法似乎也不妥当,因为差分方法毕竟是求解偏微分方程最基本的近似方法。

基于以上思考,这次修订的重点将放在如下几个方面:

1. 对全书的内容和文字表述作进一步地、细致地审校、修改和增减,并适当补充例题和注解。

2. 在第三章增加一节"傅里叶变换和拉普拉斯变换"。这样做的目的就是让一些不需要单独开设"积分变换"课程的专业的学生能够顺利地学习积分变换解法,当然这些内容不会占用很大篇幅。

3. 删去第三版中的第七章。

4. 恢复第二版中的差分解法,将这些内容与第三版中的变分方法合在一起,作为新版的第七章,名为"数学物理方程的近似解法"。

5. 简化和精炼第三版中第九章的内容,删去一些理论推导,补充物理解释,从而构成新版的第八章。这章重点是让学生了解

非线性方程与线性方程有什么本质差异以及两个重要的波——激波和孤立波的概念。

本书经修订后由八章组成,新版的体系更合理,难度更适中。除了保留原有的特色和风格外,由于对文字作了再加工,应该更便于“教”和“学”。这本教材从第一版面世以来,已经历了三十多个春秋,几经修订,渐趋成熟。书中八章内容之间既相互呼应,又相对独立。教师完全可以根据学时数及教学要求,选择部分或全部内容进行讲授。讲完全部内容约需45~48学时,讲授前6章内容约需36~40学时。书中带有“*”号的内容可略去不讲,作为学生自学的材料。

学生在学习这门课程时会遇到一些困难,主要原因是由于涉及较多的知识,除了物理学以外,仅就数学而言,就涉及微积分、常微分方程、傅里叶分析、复变函数等,这些内容虽然读者在学习本课程之前大多已学习过,但到真正用的时候仍然会感到困难。为了便于广大读者学好这本书并顺利完成书内所有的习题,我同时编写出版了《数学物理方程与特殊函数(第四版)学习指南与习题解答》,在这本指南里,我们把上面提到的知识都作了较系统的概述,对各章内容也作了点评,对书中所有习题都除了较详细的释疑和启示外,还给出了全部的解答。只要读者把这本指南和教材配合使用,就一定能轻松地完成本课程的学习任务。

本书修订再版得到了高等教育出版社数学分社的大力支持,于丽娜和蒋青两位同志为本书的再版付出了许多辛勤的劳动,在这里对他们表示衷心的感谢。虽然经过4次修订,但仍难免会百密一疏,希望广大读者给予指正。

王元明

于东南大学

2011年12月

第三版前言

自本书第二版问世以来,得到了同行们的理解、关心和支持,二十年内共印刷33次,总发行量近70万册。书的优点和缺点都非常明显。优点是:文字精练、思路清晰、重点突出、篇幅适当,在较长时间内满足了工科学生对这门课程的要求;缺点是:二十年没有修订,内容有些陈旧,个别例子及个别地方有错误或表述不准确。

这次修订的基本宗旨就是要保留原书的优点,尽可能地克服其缺点。具体地说,就是:

第一,对第二版前六章除了对少数内容作了更正和文字修改以外,基本上保持不变。

第二,删去了第二版中第七章"数学物理方程的差分解法"。这样做的出发点是:我们认为这个内容放到"数值分析"这类课程内可能更合适一些。

第三,增加了"能量积分法"、"变分方法"及"非线性偏微分方程"三章内容。这三章的写法也力求前后呼应,彼此关联。此外,在"变分方法"和"非线性偏微分方程"两章内,还引入了定解问题"弱解"的概念。

书中各章的内容基本上都是彼此独立的,因此在教学时可根据需要和学时数任意取舍,但从本门课程来讲,前六章无疑是最基础的。为便于组织教学,我们宁愿放弃了从数学物理方程的体系来安排各章顺序的做法,将新增的内容放在书的后三章。对于不要求了解"特殊函数"这部分内容的读者,完全可以跳过第五、六章,直接读后面的内容。

鉴于原南京工学院已于1988年更名为现在的东南大学,数学

教研组已发展成为具有硕士、博士授予点的数学系，故将第二版的署名“南京工学院数学教研组”改为“东南大学数学系王元明”。

高等教育出版社理工分社的领导和张忠月、李艳馥两位编辑对本书的修订工作给予了热情的支持，并付出了辛勤的劳动，编者在此向她们表示衷心的感谢。

编　者

2003 年 6 月

目 录

第一章　一些典型方程和定解条件的推导

在讨论数学物理方程的解法以前，我们首先要弄清楚数学物理方程所研究的问题的正确提法．为此，我们从两方面来讨论，一方面要建立描述某种物理过程的微分方程，另一方面要把一个特定的物理现象本身所具有的具体条件用数学形式表达出来．

§1.1　基本方程的建立

在本节，我们将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中三种典型的方程，这些方程构成本书的主要研究对象．

例 1　弦的振动

弦的振动问题，虽然是一个古典问题，但对于初学者仍然具有一定的启发性．

设有一根均匀柔软的细弦，平衡时沿直线拉紧，而且除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外，不受外力影响．下面研究弦作微小横向振动的规律．所谓"横向"是指全部运动出现在一个平面上，而且弦上的点沿垂直于 x 轴的方向运动（图1-1）．所谓"微小"是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小，以至它们的高于一次方的项都可略而不计．

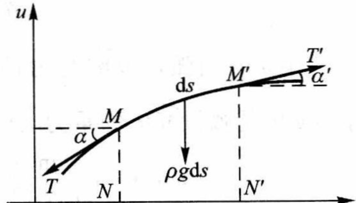

图 1-1

设弦上具有横坐标为 x 的点在时刻 t 时的位置为 M，位移 NM 记作 u．显然，在振动过程中位移 u 是变量 x 与 t 的函数 $u(x,t)$，现

在来建立位移 u 满足的方程. 我们把弦上点的运动先看作小弧段的运动,然后再考虑小弧段趋于零的极限情况. 在弦上任取一弧段 $\widehat{MM'}$,其长为 ds,设 ρ 是弦的线密度,弧段 $\widehat{MM'}$ 两端所受的张力记作 T,T'. 由于假定弦是柔软的,所以在任一点处张力的方向总是沿着弦在该点的切线方向. 现在考虑弧段 $\widehat{MM'}$ 在 t 时刻的受力情况. 用**牛顿运动定律**,作用于弧段上任一方向上的力的总和等于这段弧的质量乘该方向上的加速度.

在 x 轴方向弧段 $\widehat{MM'}$ 受力的总和为 $-T\cos\alpha+T'\cos\alpha'$,由于弦只作横向振动,所以

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0. \tag{1.1}$$

按照上述弦振动微小的假设,可知在振动过程中弦上 M 点与 M' 点处切线的倾角都很小,即 $\alpha\approx 0,\alpha'\approx 0$,从而由

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots$$

可知,当我们略去 α 与 α' 的所有高于一次方的各项时,就有

$$\cos\alpha \approx 1,\quad \cos\alpha' \approx 1,$$

代入(1.1)式,便可近似得到

$$T = T'.$$

在 u 方向弧段 $\widehat{MM'}$ 受力的总和为 $-T\sin\alpha+T'\sin\alpha'-\rho g ds$,其中 $-\rho g ds$ 是弧段 $\widehat{MM'}$ 的重力. 又因当 $\alpha\approx 0,\alpha'\approx 0$ 时

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \approx \tan\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$\sin\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x},$$

$$ds = \sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2}\,dx \approx dx,$$

且小弧段在时刻 t 沿 u 方向运动的加速度近似为 $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$,小弧

段的质量为 $\rho\mathrm{d}s$,所以

$$-T\sin\alpha+T'\sin\alpha'-\rho g\mathrm{d}s\approx\rho\mathrm{d}s\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}$$

或

$$T\left[\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]-\rho g\mathrm{d}x\approx\rho\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x,\quad(1.2)$$

上式左边方括号内的部分是由于 x 产生 $\mathrm{d}x$ 的变化而引起的 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 的改变量,可用微分近似代替,即

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial u}&\approx\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

于是
$$\left[T\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}-\rho g\right]\mathrm{d}x\approx\rho\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x$$

或
$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\approx\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}+g.$$

一般说来,张力较大时弦振动速度变化很快,即 $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$ 要比 g 大得多,所以又可以把 g 略去. 经过这样逐步略去一些次要的量,抓住主要的量,在 $u(x,t)$ 关于 x,t 都是二次连续可微的前提下,最后得出 $u(x,t)$ 应近似地满足方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad(1.3)$$

这里的 $a^2=\frac{T}{\rho}$. (1.3)式称为**一维波动方程**.

如果在振动过程中,弦上另外还受到一个与弦的振动方向平行的外力,且假定在时刻 t 弦上 x 点处的外力密度为 $F(x,t)$,显然,在这时(1.1)及(1.2)分别为

$$T'\cos\alpha'-T\cos\alpha=0,$$

$$F\mathrm{d}s - T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\mathrm{d}s \approx \rho\mathrm{d}s\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

利用上面的推导方法并略去弦本身的质量，可得弦的强迫振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad (1.3)'$$

其中 $f(x,t)=\dfrac{1}{\rho}F(x,t)$，表示 t 时刻单位质量的弦在 x 点处所受的外力密度.

方程(1.3)与(1.3)′的差别在于(1.3)′的右端多了一个与未知函数 u 无关的项 $f(x,t)$，这个项称为**自由项**. 包括有非零自由项的方程称为**非齐次方程**，自由项恒等于零的方程称为**齐次方程**. (1.3)为齐次一维波动方程，(1.3)′为非齐次一维波动方程.

注 1 在研究均匀细杆作纵向振动时，也会得到方程(1.3)及(1.3)′，其中 $u(x,t)$ 表示杆上点 x 在时刻 t 的纵向位移(见习题一第 3 题. 其推导过程见《数学物理方程与特殊函数(第四版)学习指南与习题解答》(以后简称学习指南)).

注 2 如果我们研究薄膜的振动或者声波在空气中的传播，就得到二维或三维波动方程，其形式和方程(1.3)′相似：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + f,$$

其中 $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$，$n$ 是维数($n=2$ 或 3)，$\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 称为**拉普拉斯**(Laplace)算子.

例 2 传输线方程

对于直流电或低频的交流电，电路的基尔霍夫(Kirchhoff)定律指出同一支路中电流相等. 但对于较高频率的电流(指频率还没有高到能显著地辐射电磁波的情况)，电路中导线的自感和电容的效应不可忽略，因而同一支路中电流未必相等.

今考虑一来一往的高频传输线，它被当作具有分布参数的导

体(图 1–2),我们来研究这种导体内电流流动的规律. 在具有分布参数的导体中,电流通过的情况,可以用电流密度 i 与电压 v 来描述,此处 i 与 v 都是 x,t 的函数,记作 $i(x,t)$ 与 $v(x,t)$. 以 R,L,C,G 分别表示下列参数:

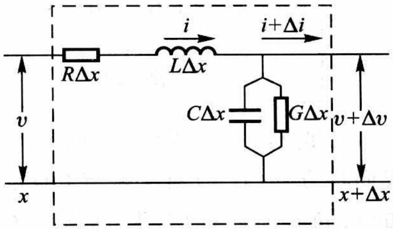

图 1–2

R——每一回路单位的串联电阻,

L——每一回路单位的串联电感,

C——每单位长度的分路电容,

G——每单位长度的分路电导.

根据**基尔霍夫第二定律**,在长度为 Δx 的传输线中,电压降应等于导线电阻 $R\Delta x$ 上的电压降和两线之间的电感 $L\Delta x$ 上的感生电动势之和,即

$$v-(v+\Delta v)=R\Delta x\cdot i+L\Delta x\cdot\frac{\partial i}{\partial t}.$$

由此可得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-Ri-L\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{1.4}$$

另外,由**基尔霍夫第一定律**,流入节点的电流应等于流出该节点的电流,即

$$i=(i+\Delta i)+C\Delta x\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+G\Delta x\cdot v,$$

其中右端第二项为两线之间的电容 $C\Delta x$ 上的充放电,右端第三项为两线间的漏电流. 由此式得