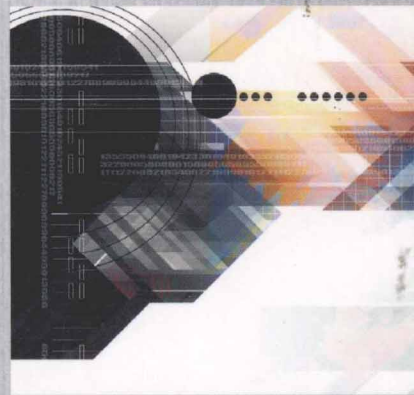


CONTROL THEORY



周凤岐 周 军 郭建国 编

西北工業大學出版社

现代控制理论基础

周凤岐 周 军 郭建国 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是针对高等工科院校控制类专业学科本科生和非控制类学科研究生的现代控制理论基础课程需要而编写的。本教材针对现代控制理论的基本内容作了全面系统、深入浅出的阐述,内容包含了线性系统理论、最优控制理论、最优估计理论、系统辨识理论、自适应控制理论和变结构控制理论等六大部分。内容取舍上不仅注重于基础和工程实用性,同时每部分章节均配有一批应用实例和思考题,使学生在专业理论知识的同时,能够熟练掌握和应用相关的基本知识。此外,为了便于掌握,本书还在附录中列出了矩阵微分法、矩阵求逆引理、矩阵许瓦茨不等式和随机变量与随机过程基本概念等。

本书主要作为高等工科院校控制类专业本科生和非控制类学科(如电子类、机电类学科)等研究生的教材和参考书,也可作为广大工程科技人员以及其他大专院校师生自学现代控制理论时的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础/周凤岐,周军,郭建国编. —西安:西北工业大学出版社,2011.3
ISBN 978-7-5612-3042-8

I. ①现… II. ①周… ②周… ③郭… III. ①现代控制理论 IV. ①0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 037596 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电话:(029)88493844 88491757

网址:www.nwpup.com

印刷者:陕西宝石兰印务有限责任公司

开本:787 mm×1 092 mm 1/16

印张:30.5

字数:746 千字

版次:2011 年 10 月第 1 版 2011 年 10 月第 1 次印刷

定价:58.00 元

前 言

本教材的内容共分为线性系统理论、最优控制理论、最优估计理论、系统辨识理论、自适应控制理论和变结构控制理论等六篇十六章。线性系统理论篇中介绍状态空间分析法、线性系统的结构特性、状态反馈与状态观测器、多变量输出反馈和解耦控制等。最优控制理论篇中介绍变分法在最优控制中的应用、极小值原理、动态规划法、二次型性能指标的线性系统最优控制等。最优估计理论篇中介绍了参数估计方法、卡尔曼最优线性预测与滤波方法等。系统辨识理论篇中介绍线性系统的经典辨识方法、最小二乘辨识和极大似然辨识。自适应控制理论篇中介了自适应控制系统基本概念和稳定性、自校正控制、模型参考自适应控制。变结构控制理论篇中介绍变结构控制理论的基本概念以及变结构调节控制,变结构模型跟踪控制和变结构模型参考自适应控制等设计方法。各章均附有习题。

本书是基于1988年由国防工业出版社出版的《现代控制理论基础引论》和1992年由电子科技大学出版社出版的《现代控制理论及其应用》的基础上,经过删减和增补,重新编写而成的。这两本书曾作为控制类专业本科生和非控制类学科研究生的教材在许多院校使用过,受到了广泛好评。根据十几年来对该教材的使用和教学实践的经验,对原教材做了许多修改,并增加了变结构控制理论和应用算例,使教材内容更加系统充实,与应用实际结合更加紧密。

编写本书时,力求对现代控制理论的基本理论内容进行全面系统、深入浅出的阐述,以最低限度的数学工具、适当的物理浅释、实际的工程应用算例和通俗易懂的语言,引导和帮助读者尽快掌握基本理论和方法,以便继续深入讨论有关的理论和工程应用问题。为了便于读者学习,本书还专门在附录中列出了矩阵微分法、矩阵求逆引理、矩阵许瓦茨不等式和随机变量与随机过程的基本概念等数学知识。

本书不仅适用于高等院校控制类专业本科生教材和非控制类学科研究生教材,也可作为广大工程科技人员自学现代控制理论的重要参考书和应用现代控制理论进行设计的工具书。

限于编者的水平,书中难免会有缺点、不妥和错误,衷心希望读者批评指正。

编 者

2011年3月

目 录

第一篇 线性系统理论

第一章 状态空间分析法.....	1
1.1 系统的状态空间描述	1
1.2 线性定常连续系统动态方程的建立	7
1.3 线性定常连续系统状态方程的解.....	18
1.4 线性时变连续系统的运动分析.....	23
1.5 线性离散系统的运动分析.....	27
1.6 传递函数矩阵.....	32
1.7 脉冲响应矩阵.....	35
习 题	37
第二章 线性系统的能控性和能观测性	40
2.1 凯莱哈密尔顿定理.....	40
2.2 线性定常连续系统的能控性.....	43
2.3 线性定常连续系统的能观测性.....	50
2.4 线性时变系统的能控性和能观测性.....	55
2.5 线性离散系统的能控性和能观测性.....	60
2.6 对偶原理.....	70
2.7 能控性和能观测性与传递函数(矩阵)的关系.....	72
2.8 能控能观测规范形和系统的结构分解.....	79
2.9 传递函数矩阵的状态空间实现.....	99
习 题.....	106
第三章 稳定性理论.....	109
3.1 外部稳定性与内部稳定性	109
3.2 李雅普诺夫稳定性概念	112
3.3 李雅普诺夫稳定性定理	116
3.4 线性系统稳定性判据	120
3.5 线性系统的李雅普诺夫分析	121

3.6 非线性系统的线性化稳定性判据	125
习 题	126
第四章 状态反馈与状态观测器	128
4.1 线性系统反馈结构及其对系统特性的影响	128
4.2 单输入-单输出系统的极点配置	133
4.3 多输入-多输出系统的极点配置	137
4.4 全维状态观测器	143
4.5 分离定理	145
4.6 降维状态观测器	147
4.7 倒立摆系统的状态反馈控制	151
习 题	158
第五章 输出反馈控制和解耦控制	160
5.1 输出反馈的单位秩结构	160
5.2 PD 输出反馈的设计	162
5.3 PID 输出反馈的设计	166
5.4 二连杆机械手输出反馈控制	171
5.5 输出反馈器解耦控制	178
5.6 状态反馈解耦控制	182
习 题	194

第二篇 最优控制理论

第六章 变分法在最优控制中的应用	200
6.1 无约束条件的泛函极值问题	200
6.2 有约束条件的泛函极值问题	206
6.3 变分法解最优控制问题	209
习 题	213
第七章 极小值原理	215
7.1 连续系统的极小值原理	215
7.2 离散系统的极小值原理	219
7.3 极小值原理解最短时间控制问题	220
7.4 奇异最优控制	226
习 题	230

第八章 动态规划法	232
8.1 动态规划法的基本概念	232
8.2 动态规划法解离散系统的最优控制问题	236
8.3 动态规划法解离散线性二次型系统问题	238
8.4 动态规划法解连续系统的最优控制问题	240
习 题	242
第九章 二次型性能指标的线性系统最优控制	244
9.1 线性连续系统状态调节器问题	245
9.2 $t_f = \infty$ 时线性定常连续系统状态调节器问题	248
9.3 线性连续系统输出调节器问题	250
9.4 线性连续系统跟踪器问题	252
9.5 离散系统状态调节器	255
习 题	257

第三篇 最优估计理论

第十章 参数估计方法	260
10.1 最小方差估计与线性最小方差估计	260
10.2 极大似然法估计与极大验后法估计	264
10.3 最小二乘法估计与加权最小二乘法估计	267
10.4 递推最小二乘法估计	272
习 题	276
第十一章 最优线性预测与滤波的基本方程	278
11.1 维纳滤波	278
11.2 卡尔曼滤波问题的提法	280
11.3 离散系统卡尔曼最优预测基本方程的推导	282
11.4 离散系统卡尔曼最优滤波基本方程的推导	287
11.5 连续系统卡尔曼滤波基本方程的推导	291
11.6 系统噪声与观测噪声相关的卡尔曼滤波	296
11.7 具有输入信号的卡尔曼滤波	297
11.8 具有有色噪声的卡尔曼滤波	303
11.9 滤波稳定性概念和滤波发散问题	312
11.10 非线性滤波	313

11.11 卡尔曼滤波应用实例	322
习 题	324

第四篇 系统辨识理论

第十二章 线性系统的经典辨识方法	329
12.1 脉冲响应的确定方法——相关法	329
12.2 伪随机二位式序列—— M 序列的产生及其性质	331
12.3 用 M 序列辨识线性系统的脉冲响应	336
12.4 由脉冲响应求传递函数	341
习 题	345
第十三章 最小二乘法辨识	347
13.1 最小二乘法与递推最小二乘法辨识	347
13.2 辅助变量法辨识与递推辅助变量法辨识	353
13.3 广义最小二乘法辨识与递推广义最小二乘法辨识	355
13.4 增广矩阵法辨识	358
13.5 多步最小二乘法辨识	359
习 题	365
第十四章 极大似然法辨识	367
14.1 极大似然法辨识	367
14.2 递推极大似然法辨识	372
14.3 导弹气动参数的极大似然法辨识	375
14.4 模型阶的确定	380
习 题	383

第五篇 自适应控制理论

第十五章 自适应控制理论	385
15.1 自适应控制系统的基本概念	386
15.2 自适应控制的稳定性理论	390
15.3 自校正控制	395
15.4 模型参考自适应控制	406
习 题	423

第六篇 变结构控制基本原理

第十六章 变结构控制理论	425
16.1 变结构控制基本原理.....	425
16.2 变结构调节控制器.....	433
16.3 变结构模型跟踪控制.....	441
16.4 变结构模型参考自适应控制.....	447
习 题.....	455
附 录	457
附录 I 矩阵微分法.....	457
附录 II 矩阵求逆引理.....	467
附录 III 矩阵许瓦茨不等式.....	468
附录 IV 随机变量与随机过程的基本概念.....	469
参考文献	477

第一篇 线性系统理论

第一章 状态空间分析法

系统在时域内一般可用微分方程描述,系统越复杂,微分方程阶次越高,而求解高阶微分方程却是相当困难的。经典控制理论中在复频域内采用拉普拉斯变换法得到联系输入-输出关系的传递函数来描述系统。基于传递函数用试凑法设计单输入-单输出控制系统极为有效,可以从传递函数的零点极点分布得出系统定性特性,并已建立起了一整套图解分析设计法,至今仍得到广泛成功的应用。但传递函数对系统是一种外部描述,它不能描述系统内部结构和处于系统内部的变化,且忽略了初始条件。因此传递函数不能包含系统的所有信息。20 世纪 60 年代以来,随着控制对象的日益复杂,控制性能要求的不断提高,控制系统所需利用的信息已不局限于输入量和输出量,还需要系统内部的变化规律,并且还可能需要处理复杂的时变、非线性、多输入-多输出问题,而基于传递函数的系统描述方法在这新一领域的应用受到了很大限制,于是需要用新的对系统内部进行描述的方法——状态空间分析法。

1.1 系统的状态空间描述

1.1.1 系统数学描述的两种基本类型

所谓的系统是泛指一些互相作用的部分构成的整体,它可能是一个反馈控制系统,也可能是某一控制装置或受控对象。所研究系统均假定具有若干输入端和输出端。外部环境对系统的作用称为系统输入,以向量 $u = [u_1 \ \cdots \ u_m]^T$ 表示,施于输入端;系统对外部环境的作用称系统输出,以向量 $y = [y_1 \ \cdots \ y_l]^T$ 表示,可在输出端测量,它们均为系统的外部变量。描述系统内部所处的行为状态的变量以向量 $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T$ 表示,它们为内部变量。

系统的数学描述通常可分为下列两种基本类型:一为系统的外部描述,即输入-输出描述,这种描述将系统看成是一个“黑箱”,只能接触系统的输入端和输出端,不去表示系统内部的结构及变量,只从输入-输出的因果关系中获悉系统特性。若系统是一个单输入-单输出线性定常系统,其外部描述的数学方程就是一个 n 阶微分方程及对应的传递函数。二为系统的内部描述,即状态空间描述,这种描述将系统的动态过程细化为两个过程,即输入引起内部状态的变化,即 $[x_1, \dots, x_n]$ 和 $[u_1, \dots, u_m]$ 间的因果关系,常用一阶微分方程组或差分方程组表示,称为状态方程;还有内部状态和输入一起引起输出的变化,即 $[y_1, \dots, y_l]$ 和 $[x_1, \dots, x_n]$,

$[u_1, \dots, u_m]$ 间的因果关系, 是一组代数方程, 称为输出方程。外部描述仅描述系统的终端特性, 内部描述则既描述系统内部特性又描述终端特性。系统两种基本描述的结构示意图如图 1-1 所示。以后的研究可看出, 外部描述通常是一种不完全的描述, 因为具有完全不同的内部结构特性的两个系统可能具有相同的外部特性; 而内部描述是一种完全的描述, 能完全表示系统的一切动态特性。仅在系统具有一定属性的条件下, 两种描述才具有等价关系。

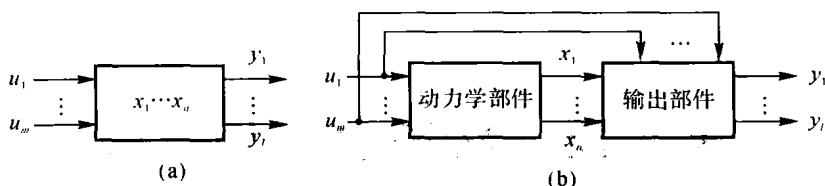


图 1-1 系统的两种基本描述

(a) 外部描述; (b) 内部描述

1.1.2 系统描述中常用的几个基本概念

无论是外部描述还是内部描述, 下列概念是常用的, 现给出定义以理解系统性质及系统分类。

松弛性 系统在时刻 t_0 称为是松弛的, 当且仅当输出 $y[t_0, \infty)$ 由输入 $u[t_0, \infty)$ 唯一确定。

从能量的观点看, 在时刻 t_0 不存在存储能量, 则称系统在时刻 t_0 是松弛的。 $u[t_0, \infty)$ 和 $y[t_0, \infty)$ 分别表示定义在时间区间 $[t_0, \infty)$ 的输入和输出。

例如一个 RLC 网络, 若所有电容两端的电压和流过电感的电流在 t_0 时刻均为零 (即初始条件为零), 则网络称为在 t_0 时刻是松弛的。若网络不是松弛的, 其输出响应不仅由 $u[t_0, \infty)$ 所决定, 还与初始条件有关。

在松弛性假定下, 系统的输入-输出描述有

$$y(t) = Hu(t) \quad (1-1)$$

式中, H 是某一算子或函数, 例如传递函数就是一种算子。

因果性 若系统在时刻 t 的输出仅取决于时刻 t 及在 t 之前的输入, 而与 t 之后的输入无关, 则称系统具有因果性。

本书所研究的实际物理系统都具有因果性, 并称为因果系统。若系统在 t 时刻的输出与 t 之后的输入有关, 则称该系统不具有因果性。不具有因果性的系统能够预测 t 之后的输入并施加于系统而影响其输出。

线性 一个松弛系统称为线性的, 当且仅当对于任何输入 u_1 和 u_2 , 以及任何实数 α , 均有

$$H(u_1 + u_2) = Hu_1 + Hu_2 \quad (1-2)$$

$$H(\alpha u_1) = \alpha Hu_1 \quad (1-3)$$

否则称为非线性的。式 (1-2) 称为可加性, 式 (1-3) 称为齐次性。若松弛系统具有这两种特性, 则称该系统满足叠加原理。式 (1-2) 和式 (1-3) 可合并表示为

$$H(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 Hu_1 + \alpha_2 Hu_2 \quad (1-4)$$

线性系统数学方程中的各项, 只含变量及其各阶导数的一次项, 不含变量或其导数的高次

项,也不含不同变量的乘积项。

时不变性(定常性) 一个松弛系统为时不变的(定常的),当且仅当对于任何输入 u 和任何实数 $\tau (-\infty < \tau < \infty)$,有

$$y(t-\tau) = Hu(t-\tau) \quad (1-5)$$

否则称系统为时变的。即相对于式(1-1),当输入 u 延迟 τ 时,输出 y 也延迟 τ 。

线性时不变(定常)系统的数学方程中各项的系数必为常数,只要有一项的系数是时间的函数,就是时变的。

1.1.3 状态与状态空间的基本概念

系统的状态空间描述是建立在状态(状态变量)和状态空间概念的基础上的。状态与状态空间概念早在古典力学中就得到广泛应用,当将其引入到系统和控制理论中来,用于描述系统的运动和行为了,这两个概念有了更一般性的含义。

系统的状态变量定义为:能够唯一地确定系统在时间域中行为的一组相互独立且数目最少的变量,即只要给定 t_0 时刻的这组变量和 $t \geq t_0$ 的输入,则系统在 $t \geq t_0$ 的任意时刻的行为随之完全确定。因此,所谓状态变量必须是满足以下条件的一组变量:

- (1) 对系统行为的描述是完全的;
- (2) 相互之间是独立的;
- (3) 数量是最少的。

一组状态变量的集合称为系统的状态。众所周知,一个用 n 阶微分方程描述的系统,当 n 个初始条件 $x(t_0), \dot{x}(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$ 和输入 $u(t)$ 给定时,可唯一确定方程的解 $x(t)$,故变量 $x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ 是一组状态变量。对于确定系统的时域行为来说,一组独立的状态变量既是必要的,也是充分的,独立状态变量的个数即为系统微分方程的阶次 n 。显然,当状态变量个数小于 n 时,便不能完全确定系统状态,对系统的行为描述是不完全的;当变量个数大于 n 时则必有不独立变量,对于确定系统状态是多余的。至于 t_0 时刻的状态,表征了 t_0 以前的系统运动的结果,通常取参考时刻 t_0 为零。

状态变量的选择不是唯一的。选择与初始条件对应的变量作为状态变量是一种状态变量的选择方法,但也可以选择另外一组独立变量作为状态变量,特别应优先考虑在物理上可量测的量作为状态变量,如机械系统中的转角、位移以及它们的速度,电路系统中的电感电流、电容器两端电压等,这些可量测的状态变量可用于实现反馈控制以改善系统性能。在理论分析研究中,常选择一些在数学上有意义的量作为状态变量,它们可能是一些物理量的复杂的线性组合,但却可以导出某种典型形式的数学方程,以利于建立一般的分析理论。选择不同的状态变量只是以不同形式描述系统,由于不同的状态变量组之间存在着确定关系,对应的系统描述随之也存在着对应的确定关系,而系统的特性是不变的。

本书将状态变量记为 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 。若将 n 个状态变量看做向量 $x(t)$ 的分量,则 n 维列向量

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

称为系统的状态向量。给定 t_0 时刻的状态向量 $x(t_0)$ 及 $t \geq t_0$ 的输入向量 $u(t), u(t) =$

$[u_1(t) \cdots u_m(t)]^T$, 则 $t \geq t_0$ 的状态向量 $x(t)$ 唯一确定。

以 n 个状态变量为坐标轴所构成的 n 维空间称为状态空间。状态空间中的一点代表系统的一个特定时刻的状态, 该点就是状态向量的端点, 也可称为状态点。随着时间的推移, 系统状态在变化, 状态点便在状态空间中移动形成一条轨线, 即状态向量的矢端轨线, 称为状态轨线或状态轨迹。由于状态变量只能取实数值, 故状态空间是建立在实数域上的向量空间。

在上述状态和状态空间概念基础上, 可着手建立系统的状态空间描述。

1.1.4 系统的状态空间描述

图 1-1 已示出状态空间描述的结构, 输入引起状态的变化是一个动态过程。列写每个状态变量的一阶导数与所有状态变量、输入变量关系的数学方程称为状态方程。由于 n 阶系统有 n 个独立的状态变量, 故系统状态方程是 n 个联立的一阶微分方程或差分方程。考虑最一般的情况, 连续系统状态方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_m; t) \\ &\cdots \cdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_m; t) \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

输入和状态一起引起输出的变化是一个代数方程, 每个输出变量与所有状态变量及输入变量的关系的数学方程称为输出方程。设系统有 l 个输出变量, 则系统输出方程含 l 个联立的代数方程。最一般情况下的连续输出方程为

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_m; t) \\ &\cdots \cdots \\ y_l &= g_l(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_m; t) \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

为了书写简洁, 引入向量及矩阵符号, 令

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

分别为系统的状态向量、控制向量(输入向量)、输出向量。再引入函数向量

$$f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ \vdots \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix}, g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x, u, t) \\ \vdots \\ g_l(x, u, t) \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

则式(1-6)和式(1-7)可简记为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) \\ y &= g(x, u, t) \end{aligned} \quad (1-10)$$

式(1-10)为状态方程和输出方程的组合, 构成了完整的状态空间描述, 称为状态空间方程, 又称为动态方程。

只要式(1-10)中函数向量 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 的某元素显含时间 t , 便表明系统是时变的。定常系统不显含 t , 故其状态空间方程可写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned} \quad (1-11)$$

若式(1-11)中 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 的任一元素是 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $u_1, \cdots, u_m$ 的非线性函数, 则系统

是非线性的。若 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 的所有元素都是 $x_1, \dots, x_n$ 和 $u_1, \dots, u_m$ 的线性函数, 则系统是线性的。

对于线性系统, 状态空间方程可表示为更明显的一般形式, 即

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_{11}(t)u_1 + b_{12}(t)u_2 + \dots + b_{1m}(t)u_m \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_{n1}(t)u_1 + b_{n2}(t)u_2 + \dots + b_{nm}(t)u_m \\ y_1 &= c_{11}(t)x_1 + c_{12}(t)x_2 + \dots + c_{1n}(t)x_n + d_{11}(t)u_1 + d_{12}(t)u_2 + \dots + d_{1m}(t)u_m \\ &\dots\dots\dots \\ y_l &= c_{l1}(t)x_1 + c_{l2}(t)x_2 + \dots + c_{ln}(t)x_n + d_{l1}(t)u_1 + d_{l2}(t)u_2 + \dots + d_{lm}(t)u_m \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

写成向量矩阵形式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{aligned} \quad (1-13)$$

式中, 系数矩阵 $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$ 分别称为系统矩阵(状态矩阵)、输入矩阵(控制矩阵)、输出矩阵和前馈矩阵, 分别为

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{l1}(t) & \dots & c_{ln}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{l1}(t) & \dots & d_{lm}(t) \end{bmatrix}$$

诸系数矩阵中只要有任意一个元素是时间函数, 便是时变系统; 当诸系数矩阵的所有元素都是常数时, 便是定常系统。线性定常连续系统是现代控制理论的最基本研究对象, 其状态空间方程可写为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (1-14)$$

式中, $\mathbf{A}$ 为 $(n \times n)$ 矩阵; $\mathbf{B}$ 为 $(n \times m)$ 矩阵; $\mathbf{C}$ 为 $(l \times n)$ 矩阵; $\mathbf{D}$ 为 $(l \times m)$ 矩阵。其状态空间方程可用方块图表示, 如图 1-2 所示。

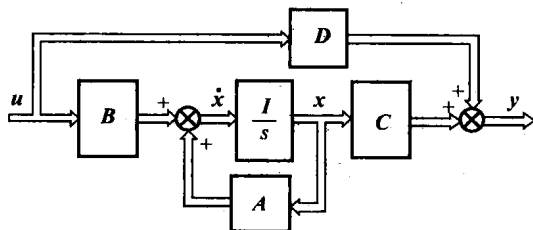


图 1-2 线性定常系统方块图

实际物理系统总是含有非线性因素, 但是许多实际系统当 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{u}$ 均限制在其工作点或平衡点附近做小偏差运动时, 其非线性方程就能够足够精确地用线性化方程来描述, 从而使状态空间方程线性化。设式(1-11)所示非线性函数向量 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 在工作点 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ 邻域

展开成泰勒级数并略去二次以及二次以上各项,有

$$f(x, u) = f(x_0, u_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x^T} \right)_{x_0, u_0} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u^T} \right)_{x_0, u_0} \Delta u$$

$$g(x, u) = g(x_0, u_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x^T} \right)_{x_0, u_0} \Delta x + \left(\frac{\partial g}{\partial u^T} \right)_{x_0, u_0} \Delta u$$

式中, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta u = u - u_0$, 且有 $\Delta y = y - y_0$, 故

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}, y = y_0 + \Delta y$$

工作点处满足

$$\dot{x}_0 = f(x_0, u_0), \quad y_0 = g(x_0, u_0)$$

于是可得小扰动线性化状态空间方程为

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^T} \right)_{x_0, u_0} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u^T} \right)_{x_0, u_0} \Delta u \stackrel{\text{def}}{=} A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y &= \left(\frac{\partial g}{\partial x^T} \right)_{x_0, u_0} \Delta x + \left(\frac{\partial g}{\partial u^T} \right)_{x_0, u_0} \Delta u \stackrel{\text{def}}{=} C \Delta x + D \Delta u \end{aligned} \quad (1-15)$$

当非线性系统在工作点附近运动时, 式(1-15)所示线性系统可以有足够的精度代替式(1-11)所示的非线性系统。式(1-15)中各系数矩阵可由列向量对行向量的求导规则导出, 它们分别为

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^T} \right)_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0}, \quad B = \left(\frac{\partial f}{\partial u^T} \right)_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \\ C &= \left(\frac{\partial g}{\partial x^T} \right)_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0}, \quad D = \left(\frac{\partial g}{\partial u^T} \right)_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \end{aligned}$$

当工作点变化时, 诸系数矩阵各元素的数值将随之变化。

需要指出的是, 对于同一个系统, 当所选状态变量不同时, 所得状态方程也不同, 故描述系统的状态方程也不是唯一的。为了保证状态方程解的存在和唯一性, 即满足初始条件 $x(t_0)$, 在 $u(t) (t \geq t_0)$ 作用下的解 $x(t)$, 在 $t \geq t_0$ 时存在且只有一个, $x(t)$ 不产生继电式的跳跃现象, 也不存在在某时刻变为 ∞ , 必须对函数 $f(x, u, t)$ 加以限制。解唯一存在的充分必要条件是满足利普希茨(Lipschitz)条件: 对线性时变系统而言, $A(t), B(t), u(t)$ 的元素都是 t 的分段连续函数; 对于线性定常系统而言, A, B 都是有限值的常数矩阵; 状态方程中不含 $u(t)$ 的导数项。有些实际系统的微分方程是含有输入导数项的, 为使导出的状态方程不含输入导数, 须适当选取状态变量。

式(1-13)和式(1-14)表示了多输入-多输出线性系统的动态方程, 当 $m=1, l=1$ 时, 即单输入-单输出线性系统的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + b(t)u & \text{或} & & \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c(t)x + d(t)u & & & y &= cx + du \end{aligned} \quad (1-16)$$

这时 u, y 均为标量, b 为 $(n \times 1)$ 维, c 为 $(1 \times n)$ 维, d 为标量。

系统的状态空间描述的优越性在于:能解释处于系统内部的状态信息并加以利用;一阶微分方程比高阶微分方程宜于在计算机上求解;采用向量矩阵形式,当各种变量数目增加时,并不增加数学表达式的复杂性;可适用于单变量或多变量、线性或非线性、定常或时变、确定性或随机性各类系统的描述。

1.2 线性定常连续系统动态方程的建立

实际物理系统动态方程的建立,通常是依据所含元件遵循的物理、化学定律,列写其微分方程,选择可以量测的物理量作为状态变量来导出的,它能反映系统的真实结构特性,故动态方程可由诸元件的微分方程组或传递函数结构图演化而来。不过据此建立的动态方程一般不具有典型形式。由于系统微分方程或传递函数也是一种线性定常连续系统的通用数学模型,当其已知时,可按规定方法导出典型形式的动态方程,便于建立统一的研究理论,并揭示系统内部固有的重要结构特性。下面来分别加以研究。

1.2.1 物理系统动态方程的建立

结合例子来说明。

例 1-1 设机械位移系统如图 1-3 所示。力 F 及阻尼器汽缸速度 v 为两种外作用,给定输出量为质量块的位移 x 及其速度 $\dot{x}$ 、加速度 $\ddot{x}$ 。图中 m, k, f 分别为质量、弹簧刚度、阻尼系数。试求该双输入-三输出系统的动态方程。

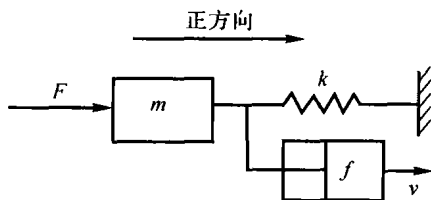


图 1-3 双输入-三输出机械位移系统

解 据牛顿力学,外力由惯性力 $m\ddot{x}$, 阻尼力 $f(\dot{x} - v)$, 弹簧恢复力 kx 平衡,故有

$$m\ddot{x} + f(\dot{x} - v) + kx = F$$

显见为二阶系统。若已知质量块的初始位移及初始速度,该二阶微分方程在输入作用下的解便唯一确定,故选 x 和 $\dot{x}$ 作为状态变量。设 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, 三个输出量为 $y_1 = x, y_2 = \dot{x}, y_3 = \ddot{x}$, 可由微分方程导出下列动态方程:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} = \frac{1}{m} [-f(x_2 - v) - kx_1 + F] \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= \frac{1}{m} [-f(x_2 - v) - kx_1 + F] \end{aligned} \quad (1-17)$$

其向量-矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} F \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{f}{m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{f}{m} \end{bmatrix}$$

状态变量图 将状态方程中的每个一阶微分方程用图解来表示,即每个一阶微分方程的右端诸项之和,构成了状态变量的导数,经积分可得该状态变量,最终按照系统中各状态变量的关系连接成封闭的图形,这便是状态变量图。它便于在模拟计算机上进行仿真,是向量-矩阵形式状态方程的展开图形,揭示了系统的内部结构。状态变量图中仅含积分器、加法器、比例器三种元件及一些连接线。积分器的输出均为状态变量。输出量可根据输出方程在状态变量图中形成和引出。例 1-1 的状态变量图如图 1-4 所示,图中 s 为拉普拉斯算子。

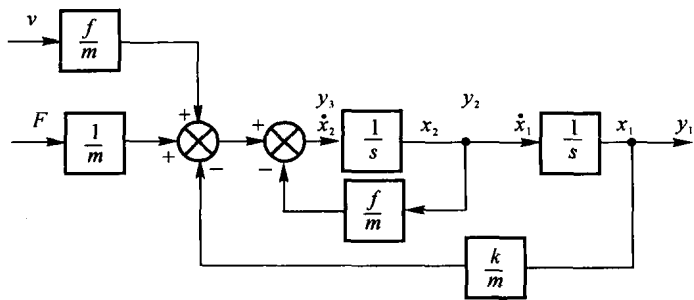


图 1-4 例 1-1 状态变量图

例 1-2 研究图 1-5 所示电网络,输入为两个电源的电压 e_1 和 e_2 ,输出为电容器的端电压 u_c ,试列写该双输入-单输出系统的状态空间方程。

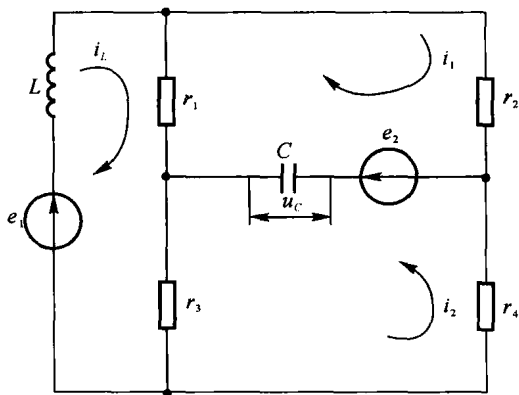


图 1-5 例 1-2 电网络